VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ОГЮСТ БРАВЕ

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

ОТВЕТСТВЕННЫЕ РЕДАКТОРЫ:
чл.-корр. АН СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ
проф. И. И. ШАФРАНОВСКИЙ

ПЕРЕВОД
П. Л. ДУБОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД
1974

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *А. А. Имшенецкий*, академик *Б. А. Казанский*, академик *Б. М. Кедров*, член-корреспондент АН СССР *Б. Н. Делоне*, профессор *Ф. А. Петровский*, профессор *Л. С. Полак*, профессор *Н. А. Фигуровский*, профессор *И. И. Шафрановский*

УДК 539.16

Избранные научные труды. Кристаллографические этюды. Браве О. Изд-во «Наука», Ленингр. отд., Л., 1973, стр. 1—419.

Огюст Браве является общепризнанным классиком в области теоретической кристаллографии. Ему мы обязаны созданием теории решетчатого строения кристаллов. Выведенные им 14 решеток представляют и сейчас математическую основу современной науки о кристаллах.

Перевод «Кристаллографических этюдов» дает полный текст всех кристаллографических работ О. Браве.

Б $\frac{0062\text{-}1012}{042\,(01)\text{-}74}$ 1092-73

© Издательство «Наука» 1974

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выдающийся французский кристаллограф О. Браве (1811—1863) является одним из основоположников современной теоретической кристаллографии. Изучая геометрию многогранников, он вывел точечные группы конечной симметрии. Сам вывод проведен с редкой красотой и изяществом. Достаточно сказать, что до сих пор ученые пользуются сформулированными им определениями оси симметрии, плоскости и центра симметрии, так же как и теоремами сложения элементов симметрии, предложенными им обозначениями и формулами видов симметрии. Очень жаль, что в процессе получения точечных групп им была опущена группа $\overline{2n}$, что привело к неполноте его работы, как следствию ошибочности метода вывода на основании известных ему элементов симметрии без учета сложных осей симметрии (зеркальных или инверсионных осей симметрии). Основным достижением О. Браве является вывод 14 типов пространственных решеток, заслуженно носящих ныне его имя. Эти четырнадцать групп чистых трансляций лежат в основе теории строения кристаллических тел. Теория решетчатого строения кристаллов занимает первостепенное по важности место в кристаллографии, физике твердого тела, существенна при расшифровке реальных кристаллических структур. В кристаллографических работах О. Браве проявил необычайную ясность и глубину мысли. Его мемуары, несмотря на все новые работы в области теоретической кристаллографии, сохранили и сейчас свое значение.

В настоящем издании впервые публикуется полный русский перевод знаменитых «Этюдов по кристаллографии», изданных посмертно в 1866 г. и объединивших все важнейшие кристаллографические сочинения ученого.

Наибольший интерес представляют следующие работы О. Браве: «Исследование о многогранниках симметричной формы», в котором дан вывод точечных групп симметрии; «Мемуар о системах точек, правильно распределенных на плоскости и в пространстве», содержащий вывод 14 решеток Браве. Особо следует отметить «Кристаллографические этюды» — многоплановую работу, посвященную как вопросам теоретической кристаллографии, так и проблемам зарождавшейся тогда кристалломорфологии, двойникованию, взаимодействию структуры кристаллического тела и его формы.

Завершению этой работы помешала болезнь и смерть великого ученого.

Б. Н. Делоне, И. И. Шафрановский, П. Л. Дубов



ЗАМЕЧАНИЯ О СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКАХ В ГЕОМЕТРИИ

Два многогранника называют симметричными в том случае, если они построены сходным образом так, что, будучи расположены один ниже, а другой выше плоскости, они удовлетворяют следующему условию: их гомологичные вершины равноудалены от этой плоскости и расположены на одной прямой, нормальной к этой плоскости (Лежандр. Геометрия, кн. 6).

Два многогранника, гомологичные вершины которых равноудалены от заданной точки и расположены по обе стороны от нее на прямой, проходящей через эту точку, будем называть обратными.

Обозначим через P основной многогранник, предполагаемый заданным, и через p — ему обратный. Ясно, что P будет обратным к p.

Назовем полюсом симметрии двух многогранников точку, через которую проходят все прямые, соединяющие попарно все гомологичные вершины обоих многогранников.

Если два многогранника P и p рассматривать как один многогранник (P, p), то эта точка будет называться центром симметрии многогранника (P, p).

Теорема I. Когда полюс симметрии многогранника P перемещается, то обратный ему многогранник p заменяется на p', и можно всегда перенести p в p' движением, общим для всех вершин.

Пусть C (рис. 1) — первый полюс симметрии и C' — второй; S — некоторая вершина неподвижного многогранника P, s — ей гомологичная до перемещения C и s' — ей гомологичная после перемещения C.

Из $Cs=CS$, $C's'=C'S$ следует, что $ss'=2CC'$, более того, отрезок ss' параллелен CC'.

Пусть также tt' — два последовательных положения другой вершины обратного многогранника, тогда будем иметь $tt'=2CC'$, tt' параллелен CC'. Следовательно, если перенести многогранник p, двигая его от C к C' параллельно CC' на величину, равную $2CC'$, то он совпадет с многогранником p'.

Следствие. Если задан многогранник, то обратный ему полностью определен как по форме, так и по направлению своих частей по отношению к абсолютному пространству; однако место, которое он должен занимать, остается неопределенным и зависит от расположения полюса симметрии.

Теорема II. В двух обратных многогранниках гомологичные грани попарно равны и наклон между двумя смежными гранями равен наклону между двумя гранями, гомологичными им в другом многограннике.

Эта теорема доказывается, как и предложение II книги 6 Лежандра. Эта теорема доказывается заменой противолежащих треугольников вершиной трапеций с тем же основанием, которое используется в доказательстве. Однако его можно получить более просто следующим способом.

Будем считать доказанным, что ребра, плоские углы и двугранные углы, образующие телесный угол S (рис. 2), такие же, как и им гомологичные в обратном многограннике. Выбор полюса симметрии S произволен: продолжим ребра SM, SN, SP, SQ на $Sm=SM$, $Sn=SN$, $Sp=SP$,

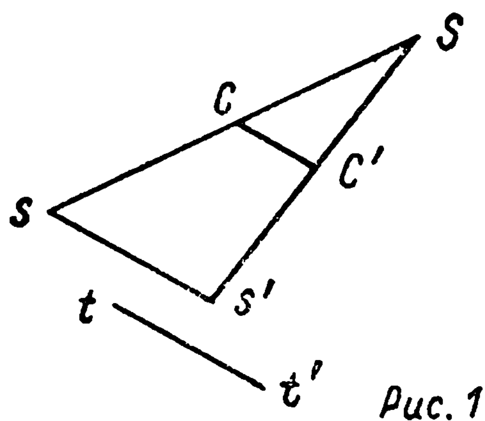


Рис. 1

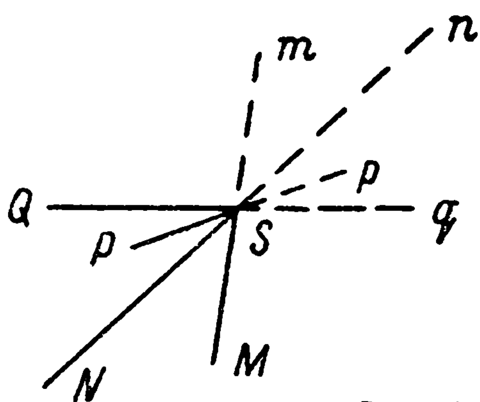


Рис. 2

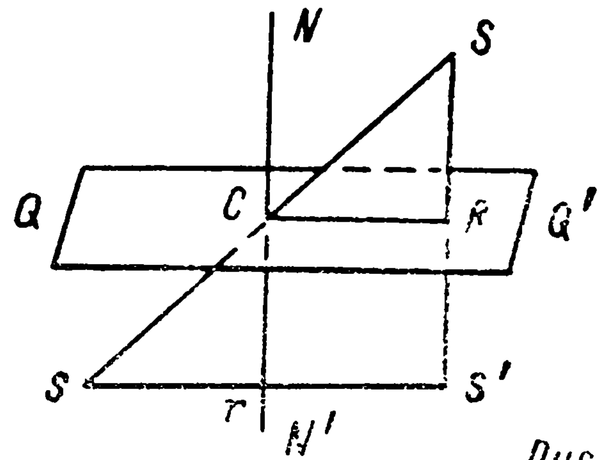


Рис. 3

$Sq=SQ$. Два противолежащих телесных угла будут, очевидно, иметь попарно равные по построению ребра, их плоские углы попарно равны, как противолежащие вершине, и их двугранные углы также равны, как противолежащие вершине; однако эти ребра, плоские углы и двугранные углы гомологичны как в заданном, так и в обратном многогранниках. То же доказательство может применяться для любых телесных углов, а следовательно, и к любым ребрам, плоским углам и двугранным углам; итак, грани равны и равно наклонены друг к другу.

Теорема III. Если многогранник p, обратный P, повернуть на 180° вокруг прямой, проходящей через полюс симметрии C, то таким образом полученный многогранник p будет симметричным P по отношению к плоскости, проведенной через C нормально к оси вращения.

Пусть NN' (рис. 3) — заданная прямая и QCQ' — нормальная ей плоскость, проходящая через C; S — некоторая вершина многогранника P и s — ей гомологичная в обратном многограннике. Из s опустим перпендикуляр sr на NN' и продолжим его до s' на величину $rs'=rs$. Очевидно, что поворот на 180° вокруг NN' приведет s в s'. Соединим S и s'. Так как $sC=CS$, $sr{-}{-}rs'$, то отрезок Ss' будет параллелен NN' и, следовательно, нормален плоскости QQ'. Если R есть точка пересечения Ss' с плоскостью QQ', то прямая CR будет нормалью к NN' и, следовательно, параллельна ss'; так как $sC=CS$, то $SR=Rs'$. Следовательно, s' является вершиной, гомологичной S в многограннике, построенном симметрично

относительно P ниже плоскости QQ'. То же будет для любой другой вершины многогранника P; стало быть, вращение p на 180° вокруг NN' приведет его к совпадению с P', симметричным P по отношению к плоскости QQ'.

Примечание. Плоскость QCQ' может быть названа плоскостью симметрии многогранника (P, p'), рассматриваемого как единое целое.

Теорема IV (обратная). Многогранник p', симметричный многограннику P относительно некоторой плоскости QQ', при повороте на 180° вокруг нормали к этой плоскости перейдет в многогранник, обратный P. Полюс симметрии расположен в точке C пересечения QQ' плоскости и оси вращения. Ибо, если построить многогранник, обратный p, принимая C за полюс симметрии, то p и p' могут быть совмещены: p с p' или p' с p вращением на 180° вокруг NN'.

Следствие 1. Из двух предыдущих теорем следует, что различные многогранники, симметричные P, являются не чем иным в отношении формы, как ему обратными многогранниками; что же касается направлений их частей, то они являются различными многогранниками, полученными поворотами на 180° обратного многогранника p и осуществленными вокруг произвольно взятых осей. Два многогранника, обратных заданному P, всегда одинаково повернуты в пространстве. Это не относится к двум многогранникам, симметричным P, если только определяющие их две плоскости симметрии не параллельны.

Следствие 2. Два многогранника, симметричных P по отношению к двум произвольно взятым плоскостям, всегда могут быть приведены в совмещение, так как оба они могут быть совмещены с многогранником, обратным P.

Теорема V. У двух симметричных многогранников гомологичные грани взаимно равны и т. д. (Далее как в теореме II).*

Теорема очевидна, потому что симметричный многогранник всегда способен совпасть с обратным многогранником и потому что обратный обладает по отношению к начальному многограннику указанными здесь свойствами в силу теоремы II. Доказательство теоремы становится ненужным.

Теорема VI. Два телесных угла, противопоставленные через вершину, обратны один другому.

Общая вершина является их полюсом симметрии.

Теорема VII. Плоскость, проходящая через два противолежащих ребра параллелепипеда, делит его на две обратные призмы, а их противолежащие телесные углы обратны одни к другим.

Сначала доказываем, что диагонали пересекаются в одной точке и эта точка является центром симметрии параллелепипеда. Тогда если рассматривать две призмы как два различных многогранника, то центр сим-

---

* Лежандр. Геометрия. Предложение II книги 6.

метрии перейдет в полюс симметрии; стало быть, противолежащие телесные углы обратны так же, как и две призмы.*

Теорема VIII. На сфере каждый сферический многоугольник P имеет себе обратный p, вершины которого диаметрально противоположны соответствующим вершинам заданного многоугольника. Если p повернуть на 180° вокруг одного из диаметров сферы, то новый многоугольник будет симметричным P по отношению к плоскости большого круга, нормальной диаметру, выбранному за ось вращения.

Это следует из того, что центр сферы берется за полюс симметрии.

Наоборот, всякий многоугольник, симметричный сферическому многоугольнику P, может быть приведен в совмещение с обратным ему p поворотом на 180° вокруг диаметра, нормального к плоскости симметрии.



* Там же. Предложения V и VI.

ИССЛЕДОВАНИЕ О МНОГОГРАННИКАХ СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ

В предстоящем исследовании о многогранниках, не обращая внимания на грани и ребра, рассмотрим только вершины. В результате многогранник будет представлять для нас совокупность конечного числа различных точек, расположенных вокруг центра тяжести.

Определение I. Центром симметрии многогранника будет называться точка (рис. 1), удовлетворяющая следующему условию: соединив C с некоторой вершиной S многогранника и продолжив CS на равную ей величину, получим точку s как вершину многогранника; эта точка s будет гомологичной относительно центра C.

Теорема I. Во всяком конечном многограннике может существовать только один центр симметрии.

Эта теорема очевидна.

Определение II. Осью симметрии многогранника будет называться прямая AB (рис. 1), удовлетворяющая следующему условию: при повороте многогранника на угол Q вокруг AB новые места вершин совпадут со старыми. Если, например, это вращение приводит вершину S в S', то S' тоже должна занять место некоторой вершины многогранника, и тогда S, S'будут называться гомологичными одна другой по отношению к оси AB.

Теорема II. Угол, самосовмещающий положения вершин многогранника при вращении вокруг оси симметрии, всегда соизмерим с 360°.

В самом деле, пусть вершина S' (рис. 1) гомологична S по отношению к оси AB. Через SS' проведем плоскость, нормальную AB и пересекающую эту ось в точке c; из C радиусом cS проведем окружность, на которой возьмем дугу $S''S'$, равную дуге SS'', дугу $S'''S''$, равную дуге SS', и т. д. В то время как вращение приведет S в S', вершина S', подчиняясь движению, перейдет в S'', которая тоже должна занять место вершины; стало быть, не только S, S' будут вершинами многогранника, но ими будут также S'', S''', . . ., полученные при движении. После одного или нескольких таких поворотов на дугу SS' мы должны прийти в исходную вершину S, ибо в противном случае число вершин было бы неограниченным, что невозможно. Следовательно, обозначив через K угол ScS', а через p, q — целые взаимно простые числа, получим

$$K = \frac{p}{q} 360^\circ.$$

Следствие. Наименьший угол вращения, способный самосовместить вершины, есть $\frac{360°}{q}$. В самом деле, общее выражение этих углов

$$mK - n\,360° = \frac{mp - nq}{q}\,360°,$$

где m и n — целые числа. Числа же m и n всегда можно определить из условия $mp - nq = \pm 1$.

Определение III. Прямая будет называться осью симметрии, если при повороте многогранника вокруг нее на делитель $\frac{1}{q}$ — 360° положение вершин многогранника не изменится. Знаменатель q будет называться порядковым номером симметрии оси. Если $q=2$, ось будет осью симметрии второго порядка, или двойной осью симметрии, или двойной осью. Если $q=3, 4, \ldots$, ось будет тройной, четверной, ... В этих различных случаях самосовмещение положений вершин будет происходить после поворота на соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}\ldots$ часть окружности.

Определение IV. Плоскостью симметрии многогранника будет называться плоскость PQ (рис. 1), удовлетворяющая следующим условиям: если из некоторой вершины S опустить перпендикуляр Sp на эту плоскость и затем продлить его на величину, равную ему, то полученный таким образом конец Σ, будет тоже вершиной многогранника. Вершины S, Σ будут гомологичными по отношению к плоскости PQ.

Определение V. Теперь можно определить многогранник симметричной формы, или, проще, симметричный многогранник как такой многогранник, который обладает или центром симметрии, или одной или несколькими осями симметрии, или одной или несколькими плоскостями симметрии. Многогранник, не обладающий ни центром, ни осями, ни плоскостями симметрии, будет называться асимметричным.

Это определение симметричного многогранника шире того, которое обычно дается в «Элементарной геометрии», где симметричными называются два различных многогранника, симметрично расположенные по отношению к плоскости. Будем считать симметричным многогранник, удовлетворяющий вышеуказанным условиям (определение V).

Теорема III. Если существует две или несколько осей симметрии, то эти оси, а также и плоскости симметрии, которые могут быть у многогранника, должны пересекаться в одной точке.

Действительно, центр тяжести вершин многогранника, предполагаемых равновесными, должен, по известному построению центров тяжести, находиться на каждой из осей симметрии и также на всех плоскостях симметрии многогранника.

Определение VI. Точка взаимного пересечения осей и плоскостей симметрии многогранника будет называться центром фигуры много-

гранника. Если существует только одна ось симметрии, все плоскости симметрии проходят через эту ось и нет центра симметрии, то тем более нет центра фигуры.

Центр правильного тетраэдра является центром фигуры, но не центром симметрии для этого многогранника.

Определение VII. Две оси одного порядка будут называться осями одного рода, если расположение вершин многогранника вокруг них одинаково. Чтобы в этом убедиться, мысленно связываем каждую из этих осей с вершинами многогранника и одну из этих систем предполагаем подвижной. Тогда, если можно добиться одновременно совпадения осей и подвижных и неподвижных вершин, эти оси будут одного рода и прямо сходными. Если же многогранники не совпадают (в то время, как оси совпадают) и являются гомологичными по отношению к некоторой плоскости симметрии, т. е. взаимно симметричными в принятом Лежандром смысле («Элементы геометрии»), то оси будут одного рода, но обратно сходными. Две плоскости симметрии будут одного рода и прямо сходными, если при повороте одной из них вокруг линии их пересечения с одновременным движением многогранника совпадение этой плоскости с другой плоскостью симметрии влечет за собой и самосовмещение положения вершин. Но если равенство, в смысле симметрии геометров, заменяет равенство совпадения, то плоскости будут называться одного рода, но обратно сходными. Если оба эти случая сходства не имеют места, то оси или плоскости будут разных родов.

Две оси одного рода всегда являются осями одного порядка, но не наоборот.

Определение VIII. Главной осью называется такая ось, которой все другие оси, если они существуют, перпендикулярны и все плоскости симметрии, если они существуют, параллельны или нормальны, если только порядок симметрии этой оси не меньше порядков симметрии других осей.

Если существует две или несколько осей, удовлетворяющих этим условиям, то одна из них может быть выбрана произвольно в качестве главной оси многогранника.

Обозначения. Чтобы символически представить виды симметрии, которые могут иметь многогранники, используем различные буквы. Для обозначения центра симметрии возьмем букву C; оC указывает, что многогранник не обладает таким центром; буквы Λ, L, L' будут обозначать оси симметрии; Λ^2, L^2, L'^2, . . . — двойные оси; Λ^3, L^3, L'^3, . . . — тройные оси и т. д. Верхний индекс указывает номер порядка симметрии. Буква Λ всегда обозначает главную ось. Эти обозначения достаточны для осей, поскольку в одном многограннике не может существовать более трех различных родов осей. Число осей одного рода указывается коэффициентом перед буквенным символом оси.

Так, например, символ $[\Lambda^6, 3L^2, 3L'^2]$ обозначает одну главную шестерную ось в комбинации с тремя двойными осями одного рода и тремя другими двойными осями другого рода. Плоскости симметрии будут обозначаться буквами Π, P, P' : символ Π означает плоскость симметрии, нормальную главной оси Λ; P, P' — плоскости симметрии, не нормальные никаким осям многогранника; p^q, p'^q, $p^{q'}$ — плоскости симметрии, нормальные осям L^q, L'^q, $L^{q'}$ многогранника. Наибольшее число различных родов этих плоскостей не превышает трех. Коэффициенты, стоящие перед символом этой плоскости, указывают число плоскостей симметрии одного рода, как и в случае осей симметрии.

Определение IX и подразделения. Исходя из симметрии многогранников, их можно разделить на четыре больших класса.

1. Асимметричные многогранники.
2. Симметричные многогранники без осей.
3. Симметричные многогранники с главной осью. Этот класс делится на два: многогранники с главной осью четного порядка и многогранники с главной осью нечетного порядка.
4. Симметричные сфероэдрические многогранники, обладающие несколькими осями, среди которых нет главной. Они делятся на две группы: четырежды тройные многогранники и десяти тройные многогранники в соответствии с числом тройных осей, которые им свойственны.

§ 1. Асимметричные многогранники

Так как эти многогранники не обладают ни центром, ни осями, ни плоскостями симметрии, то в соответствии с введенными обозначениями они могут быть представлены символом

$$[\mathrm{o}L, \mathrm{o}C, \mathrm{o}P].$$

§ 2. Симметричные многогранники без осей

Теорема IV. Во всяком многограннике, обладающем плоскостью симметрии и центром симметрии, прямая, проведенная через этот центр нормально плоскости, есть ось симметрии четного порядка.

Пусть PQ (рис. 2) — плоскость симметрии, C — центр, S — некоторая вершина многогранника, CaA — нормаль к плоскости. Через эту прямую и S проведем плоскость ACS, нормальную к PQ и содержащую вершину s, гомологичную S по отношению к центру C, так же как и вершину S', гомологичную s по отношению к плоскости PQ. Если соединить S и S', то соединяющая прямая будет перпендикуляром к CA и $aS'=aS$. Следовательно, условие того, что ось AC — двойная, удовлетворяется. Ось может быть также четверной, шестерной и в общем осью порядка $2q$.

Теорема V. Когда в многограннике существуют две плоскости симметрии, то их пересечение есть ось симметрии.

Пусть S (рис. 3) — некоторая вершина многогранника. Возьмем за плоскость рисунка плоскость, проведенную через S нормально к двум заданным плоскостям симметрии; пусть CP, Cp — следы этих плоскостей на плоскости рисунка. Мы получим s, гомологичную S по отношению к плоскости CP в плоскости PCp, когда угол $SCs=2$ углам $SCP=2$ углам sCP и $Cs=CS$. Аналогично получим S', гомологичную s по отношению к плоскости CP, когда угол $S'Cs=2$ углам sCp и $CS'=Cs$, откуда вычитанием получим $S'CS=2PCp$, $CS'=CS$.

Повторяя с вершиной S' те же действия, что и с S, получим другую, гомологичную S' вершину S'', определенную полярными уравнениями: $S''CS'=2PCp$, $CS''=CS'$.

Если из C радиусом CS провести окружность $SS'S''$ и отложить некоторое число раз дугу SS' на этой окружности, то точки S, S', S'', ..., непременно образующие конечную систему, будут вершинами правильного вписанного в этот круг многоугольника.

Пусть q — число этих вершин. Ясно, что каждой точке S соответствуют $q-1$ других точек, гомологичных S по отношению к нормали к плоскости. Эта нормаль будет осью симметрии порядка q, где q зависит от значения угла PCp.

Следствие. Угол SCS' должен иметь вид

$$\frac{p}{q}\,360^\circ,$$

где p, q — целые взаимно простые числа. В случае, когда S, S' — две наиболее близкие гомологичные точки, имеем $SCS'=\frac{360^\circ}{q}$ в силу следствия теоремы II.

Теорема VI. Симметричные многогранники без осей имеют только два различных вида симметрии — центр или плоскость симметрии.

Они не могут обладать одновременно центром и плоскостью симметрии в силу теоремы IV, ни двумя плоскостями симметрии — в силу теоремы V. Символы этих двух видов симметрии имеют следующий вид:

$$[\text{o}L,\ C,\ \text{o}P],\quad [\text{o}L,\ \text{o}C,\ P].$$

§ 3. Симметричные многогранники с главной осью

Теорема VII. Если многогранник имеет две неперпендикулярные между собой плоскости симметрии P и p, то он имеет третью плоскость симметрии P', которая гомологична P по отношению к p и того же рода, что и P.

Пусть CP, Cp (рис. 3) — следы двух плоскостей P, p на плоскости, нормальной к линии их пересечения, и s' — вершина, расположенная на этой последней плоскости. Пусть, кроме того, CP' след плоскости P', гомологичной P по отношению к промежуточной плоскости Cp. Вершина s'

будет гомологичной S по отношению к Cp, и S будет гомологичной s по другую сторону CP; s будет гомологичной S' по отношению к плоскости Cp. Легко видеть, что S' будет гомологичной s'по отношению к плоскости CP'. Стало быть, каждой вершине соответствует другая вершина, которая ей гомологична по отношению к этой последней плоскости; следовательно, P' есть также плоскость симметрии, и ясно, что она того же рода, что и P.

Теорема VIII. Когда многогранник обладает плоскостью симметрии Р и осью симметрии L, косо наклоненной к этой плоскости, то прямая L', гомологичная L по отношению к этой плоскости, тоже ось симметрии.

Пусть S (рис. 4) — некоторая вершина, имеющая гомологичную вершину по отношению к плоскости P, и пусть s, s', s'', . . . и т. д. — система гомологичных s вершин по отношению к оси L. Пусть S, S', S'', . . . и т. д. гомологичны s, s', s'', . . . и т. д. по отношению к плоскости P. Расположение S, S', S'', . . . и т. д. вокруг L' будет таким же, как расположение s, s', s'', . . . и т. д. вокруг L. Следовательно, L' тоже ось симметрии и того же рода, что и L.

Следствие. Всякая плоскость симметрии влечет за собой воспроизведение по другую сторону от нее не только каждой вершины, но также каждой плоскости или оси симметрии многогранника. Воспроизведенные таким образом плоскости и оси того же рода, что и начальные и обратно, сходны этим последним.

Теорема IX. В любом многограннике с осью L порядка q каждой плоскости симметрии, косо расположенной по отношению к оси, соответствует $q - 1$ других плоскостей симметрии того же рода.

Эта теорема доказывается так же, как теоремы VII и VIII. Можно ограничиться замечанием, что во время вращения многогранника вокруг оси L^q плоскость симметрии подчинена этому вращению. В процессе вращения эта плоскость служит плоскостью симметрии по отношению к движущемуся многограннику. Это будет иметь место и при повороте на $\frac{360°}{q}$.

Теорема X. Во всяком многограннике с осью L порядка q всякой оси симметрии L', косо расположенной по отношению к L, соответствует $q - 1$ других осей того же порядка и того же рода, что и ось L'.

Эта теорема доказывается так же, как и предыдущая. Когда многогранник поворачивается на $\frac{360°}{q}$ вокруг L^q, ось L' не перестает быть осью симметрии движущегося многогранника.

Следствие. Всякая ось симметрии порядка q вызывает необходимость сосуществования всех осей или плоскостей симметрии, которые гомологичны заданной оси или плоскости по отношению к оси порядка q. Полученные таким образом гомологичные оси или плоскости всегда одного рода и прямо сходны между собой.

Теорема XI. Если существует общее число q плоскостей симметрии, пересекающихся по одной прямой, то эта прямая есть ось симметрии порядка q или порядка, кратного q.

Двугранные углы между этими плоскостями должны быть равными, иначе эти плоскости самовоспроизведутся одни с помощью других (теорема VII), и их общее число будет больше q. Пусть, стало быть, CPA и CpA (рис. 5) — две соседние плоскости симметрии; очевидно,

$$PCp = \frac{180^\circ}{q}.$$

Так как точка σ гомологична S по отношению к плоскости PCA и S' гомологична σ' по отношению к плоскости pCA, то вращение, приводящее S в S' при повороте многогранника вокруг CA, будет в силу доказательства теоремы V равно

$$PCp' = 2PCp = \frac{360^\circ}{q}.$$

Стало быть, порядок симметрии оси CA будет равен q или числу, ему кратному.

Теорема XII. Если существуют две двойные оси симметрии, то нормаль к их плоскости, проведенная в точке их пересечения, есть ось симметрии многогранника.

Пусть CP, Cp (рис. 3) — две двойные оси и S — вершина многогранника; будем предполагать, что S расположена на высоте Δ над плоскостью PCp рисунка и что она ортогонально проектируется в S, тогда точкой, гомологичной S по отношению к оси CP, будет точка s, расположенная на расстоянии Δ под плоскостью чертежа; проекции S и s связаны соотношениями: угол SCs равен двум углам SCP, $Cs = CS$. Аналогично получаем S', гомологичную s по отношению к оси Cp, задавая угол $S'Cs'$, равный двум углам sCP', $CS' = Cs$; точка S' будет на высоте Δ над плоскостью рисунка. Следовательно, $S'CS = 2PCp$, $CS' = CS$. Повторив ту же операцию с S', получим S'', затем S'''; все эти точки образуют вершины правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса CS, и будут гомологичными S по отношению к нормали к плоскости рисунка. Следовательно, эта нормаль будет осью симметрии, порядок q которой зависит от значения угла PCp.

Теорема XIII. Если существует общее число q двойных осей, лежащих в одной плоскости, то нормаль к этой плоскости есть ось симметрии, порядок которой равен q или числу, ему кратному.

Углы между этими осями должны быть равными; в противном случае эти оси самовоспроизведутся в той же плоскости (теорема X, следствие), и их общее число будет больше q.

Пусть CP, Cp — две соседние двойные оси (рис. 5) и CA — нормаль к их плоскости; очевидно, $PCp = \frac{180^\circ}{q}$. Однако, если s гомологична S по отношению к оси CP и S' гомологична s по отношению к оси Cp, то поворот, приводящий S в S' при вращении многогранника вокруг CA, будет, следуя доказательству предыдущей теоремы, равен углу

$PCP' = 2\ PCp = \frac{360^\circ}{q}$. Следовательно, прямая CA будет осью симметрии порядка q или числа, ему кратного.

Теорема XIV. Если существуют три взаимно перпендикулярные четверные оси, то одновременно существуют четыре тройные оси, лежащие вне плоскостей, попарно соединяющих четверные оси.

Пусть OA, OB, OC (рис. 6) — три четверные оси, пересекающиеся в центре O многогранника. Повернем многогранник на четверть оборота вокруг OA так, что B займет место C. Места, принадлежавшие вершинам, останутся там же, и ось OB займет место OC. Повернем многогранник на вторую четверть полного поворота вокруг вертикали OC от A к B. Места, принадлежащие вершинам, останутся прежними; ось OB будет оставаться в OC, ось OA перейдет в OB. Итогом этого двойного вращения будет совмещение системы осей OA, OB, жестко связанных с многогранником и подвижных вместе с ним, с системой закрепленных прямых OB, OC. Однако ясно, что эквивалентное преобразование можно получить единственным вращением на 120° вокруг прямой OD, соединяющей центр O с центром D сферического треугольника с тремя прямыми углами ABC. Отсюда видно, что линия OD есть тройная ось многогранника. Так как существует восемь таких сферических треугольников с попарно противолежащими центрами, то тройных осей, лежащих вне плоскостей AOB, AOC, BOC, будет четыре.

Следствие. Многогранник с тремя взаимно перпендикулярными четверными осями не обладает главной осью. В самом деле, если во всяком многограннике с главной осью взять три некоторые оси L, L', L'', не расположенные в одной плоскости, то, по меньшей мере, два из трех углов между ними должны, по определению главной оси, равняться 90°. Однако это условие не удовлетворяется для системы трех осей OA, OB, OD.

Теорема XV. Если в некотором многограннике, обладающем главной осью Λ^q, существует вторая ось симметрии, то это будет двойная ось, расположенная в плоскости, нормальной Λ^q.

Пусть $C\Lambda$ (рис. 7) — ось Λ^q и CL — вторая ось с неизвестным порядком симметрии. Ясно, что эта ось будет расположена в плоскости, нормальной к Λ^q и, более того, $x=2$.

В самом деле, в силу определения главной оси (определение VIII), оси, гомологичные Λ^q по отношению к L^x (теорема X, следствие), должны быть нормальны Λ^q или совпадать с ней. Итак, допустимо, чтобы $x=2$, $x=4$; соответственно, в первом случае имеем полуповорот, во втором случае — четверть полного поворота вокруг L^x.

Если $x=4$, то ось CL будет четверной и ось $C\Lambda$ самовоспроизведется в CL', которая будет осью того же рода, что и исходная (теорема X). Ось CL' проходит через C и расположена в плоскости, нормальной к $C\Lambda$. Стало быть, CL' тоже ось порядка q. Так как оси, гомологичные CL по отношению к CL', не выходят за плоскость LCL', как и требует определение главной оси, $q=4$ или $q=2$.

Случай, когда $q=4$, соответствует случаю с тремя четверными взаимно перпендикулярными осями и должен быть отброшен, ибо тогда нет главной оси (теорема XIV, следствие).

В случае, когда $q=2$, ось CL будет истинно главной осью. В самом деле, легко видеть, что не может существовать плоскости симметрии, проходящей через $C\Lambda$ и косо расположенной по отношению к CL, ибо первая, гомологичная по отношению к четверной оси CL, не будет ни нормальна, ни параллельна $C\Lambda$, а это противоречит предположению, что $C\Lambda$ — главная ось. Стало быть, ничто не препятствует рассматривать CL как главную ось, что и должно быть, потому что порядок ее симметрии выше, чем порядок симметрии оси $C\Lambda$. Следовательно, если $C\Lambda$ действительно главная ось, то порядок $x=4$ исключается. Остается только предположение, что $x=2$. Следовательно, вторая ось симметрии будет просто двойной осью.

Теорема XVI. Если в многограннике с главной осью существует q двойных осей, расположенных в плоскости, нормальной главной оси, то эти двойные оси одинаково наклонены друг к другу и попарно разных родов.

Пусть CP, Cp (рис. 3) — две соседние двойные оси. Двойная ось Cp вынуждает ось CP самовоспроизвестись на противоположной стороне в виде CP' (теорема X, следствие). В свою очередь CP' вызывает появление оси Cp' и т. д. Отсюда ясно, что q углов PCp, pCP', $P'Cp'$, ... должны быть равны между собой и равны $\frac{180°}{q}$.

Оси CP и CP' одного рода и прямо сходны относительно промежуточной оси Cp. Аналогично этому Cp и Cp' одного рода и прямо сходны по отношению к оси CP', ... и т. д.

Теорема XVII. Многогранник с осью Λ^q, q плоскостями симметрии, проходящими через эту ось, и плоскостью симметрии Π, нормальной этой оси, обладает также q двойными осями, лежащими в пересечении q плоскостей симметрии с плоскостью Π.

Пересечение двух плоскостей симметрии всегда является осью симметрии (теорема V). Эта ось может быть только двойной (теорема XV).

Для доказательства этой теоремы можно также обратиться к рис. 5, где CPA есть одна из q плоскостей, проходящих через ось Λ^q, CPP' — плоскость Π. Пусть Σ — вершина, гомологичная S по отношению к плоскости Π, а s — гомологична Σ по отношению к плоскости CPA. Ясно, что S и s гомологичны одна другой по отношению к CP, которая является двойной осью многогранника.

Теорема XVIII. Многогранник с осью Λ^q, q двойными осями, нормальными к Λ^q, и плоскостью симметрии Π, нормальной к Λ^q, обладает также q плоскостями симметрии, проходящими через ось Λ^q и через каждую из двойных осей.

Пусть CP (рис. 5) — одна из двойных осей; пусть CPP' — плоскость Π, нормальная основной оси CA. Вершина S будет гомологична s по другую

сторону двойной оси CP; вершина s будет гомологична σ по другую сторону плоскости Π. Точки S и σ будут гомологичны между собой по отношению к плоскости CPA. Следовательно, эта плоскость будет одной из плоскостей симметрии многогранника.

Теорема XIX. Многогранник с главной осью Λ^q, q плоскостями симметрии, проходящими через эту ось, и центром симметрии имеет также q двойных осей, проведенных через центр каждой из плоскостей симметрии.

Это следствие теорем IV и XV.

Теорема XX. Многогранник с осью Λ^q, q двойными осями, нормальными Λ^q, и центром симметрии обладает также плоскостями симметрии, нормальными двойным осям.

Это следствие теоремы XXI, доказательство которой приведено ниже.

Случай многогранников с главной осью четного порядка.

Теорема XXI. Всякий многогранник с осью четного порядка и центром симметрии обладает плоскостью симметрии, проходящей через центр нормально этой оси.

Пусть CA (рис. 2) — ось симметрии порядка $2q$, C — центр симметрии и PQ — плоскость, нормальная CA. Вершина S имеет $2q$ — 1 ей гомологичных вершин по отношению к оси CA. Если опустить нормаль Sa на CA и продолжить ее на $aS'=aS$, то S' будет одной из гомологичных S вершин. Соединив S' с центром C и отложив $C\Sigma=CS'$, получим вершину Σ, гомологичную S' по отношению к центру C. Очевидно, S и Σ гомологичны по отношению к плоскости PQ. Стало быть, эта плоскость есть плоскость симметрии многогранника.

Теорема XXII. Всякий многогранник с осью четного порядка и плоскостью симметрии, нормальной этой оси, обладает центром симметрии, расположенным в точке пересечения оси и плоскости.

Пусть S' (рис. 2) гомологична вершине S по отношению к оси CA, а s гомологична S' по отношению к плоскости PQ, нормальной оси CA. Две вершины S и s будут гомологичны относительно точки пересечения оси и плоскости C. Следовательно, эта точка будет центром симметрии многогранника.

Теорема XXIII. Всякий многогранник с осью четного порядка и плоскостью симметрии, проходящей через эту ось, обладает второй плоскостью симметрии, проходящей через ось нормально предыдущей плоскости.

Пусть $C\Lambda$ (рис. 7) — ось четного порядка , а $LC\Lambda$ — заданная плоскость симметрии. Вершина S многогранника гомологична S', лежащей по другую сторону $C\Lambda$; s' гомологична S' по отношению к плоскости $LC\Lambda$. Следовательно, S и s' будут гомологичны по отношению к плоскости $\Lambda CL'$, проходящей через $C\Lambda$ нормально к заданной плоскости симметрии.

Теорема XXIV. Если во всяком многограннике с осью L^{2q} существуют двойные оси, нормальные L^{2q}, то их общее число равно $2q$. При этом q осей первого рода и q осей второго рода чередуются друг с другом.

Пусть CP (рис. 5) — двойная ось, нормальная оси CA порядка $2q$. Пусть проведенная в плоскости PCP' нормально CA прямая CP' образует с CP угол $PCP' = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}$.

Прямая CP' будет двойной осью того же рода, что и CP, по причине симметрии, свойственной оси CA (теорема X, следствие). Число таким образом полученных осей будет равно q: каждая из них может быть получена из CP при вращении плоскости ACP на угол, равный 0°, $\frac{180^\circ}{q}$, $2\frac{180^\circ}{q}$, ..., $(q-1)\frac{180^\circ}{q}$. Оси, соответствующие вращениям $q\frac{180^\circ}{q}$, $(q+1)\frac{180^\circ}{q}$, ..., $(2q-1)\frac{180^\circ}{q}$, совпадают с уже полученными.

Если теперь разделить PCP' на две равные части биссектрисой Cp, то Cp тоже будет двойной осью. Тогда s гомологична S по отношению к CP, а s' гомологична s по отношению к оси CA. При этом угол вращения, приводящий s в s', будет равен $\frac{360^\circ}{2q} = PCP'$. Вершины S, s' будут гомологичны по отношению к Cp, рассматриваемой как двойная ось. Следовательно, эти q биссектрис будут также двойными осями, но другого рода.

Стало быть, существует не более $2q$ двойных осей. Ибо если существует Q двойных осей, где Q — больше $2q$, то порядок симметрии оси, нормальной к их плоскости, будет равен Q или mQ (теорема XIII), что противоречит условию теоремы.

Следствие 1. Число двойных осей, нормальных главной оси Λ^{2q}, всегда будет равно 0 или $2q$.

Следствие 2. Двойные оси, нормальные Λ^{2q}, попарно перпендикулярны между собой.

Теорема XXV. Если в многограннике, обладающем осью L^{2q}, существуют плоскости симметрии, проходящие через эту ось, то общее число таких плоскостей равно $2q$, из коих q плоскостей одного рода и q плоскостей другого рода чередуются между собой.

Пусть ACP, ACP' (рис. 5) — две плоскости симметрии, угол между которыми $PCP' = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}$.

Система этих плоскостей состоит из q прямо сходных между собой плоскостей симметрии одного рода. Более того, промежуточные плоскости, делящие пополам двугранные углы (ACP, ACP'), — тоже плоскости симметрии. Итак, пусть ACp — одна из этих промежуточных плоскостей. Возьмем σ, гомологичную заданной вершине S по отношению к плоскости ACP. Пусть σ' гомологична σ по отношению к CA. Угол вращения, приводящий σ в σ', равен $\frac{360^\circ}{2q} = PCP'$. Ясно, что S и σ' симметрично расположены по отношению к плоскости ACp. Следовательно, эта пло-

скость есть плоскость симметрии. Существует всего q плоскостей симметрии, прямо сходных с ACp, но иного рода, чем ACP.

Следовательно, существует $2q$ плоскостей симметрии, проходящих через L^{2q}. Число их не может превышать $2q$, ибо если оно равно $Q > 2q$, то порядок симметрии оси, расположенной в линии их пересечения, будет равен Q или mQ (теорема XI), что невозможно.

Следствие 1. Число плоскостей симметрии, проходящих через главную ось Λ^{2q}, всегда равно 0 или $2q$ и не может быть больше этого числа.

Следствие 2. Эти плоскости симметрии попарно перпендикулярны между собой.

Теорема XXVI. Многогранник с главной осью Λ^{2q}, не обладающий ни плоскостями симметрии, проходящими вдоль этой оси, ни двойными осями, имеет два различных вида симметрии в зависимости от того, является ли плоскость, нормальная главной оси, плоскостью симметрии или нет.

Число осей симметрии определено в формулировке теоремы, то же самое касается плоскостей симметрии, как только становится известным, является ли плоскость, нормальная главной оси, плоскостью симметрии или нет. Что касается центра симметрии, то наличие его зависит от существования плоскости симметрии, нормальной к основной оси (теоремы XXI и XXII). Символы этих двух видов симметрии будут иметь вид:

$$[\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ \mathrm{o}C,\ \mathrm{o}P],\ [\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ C,\ \Pi].$$

Теорема XXVII. Многогранники с главной осью Λ^{2q}, обладающие по отдельности или $2q$ плоскостями симметрии, или $2q$ двойными осями, совместимыми с этой главной осью, не могут иметь ни плоскостей симметрии, нормальных к главной оси, ни центра симметрии.

Это очевидное следствие теорем XVII—XX. Группа многогранников, отвечающих настоящей теореме, разделяется на два класса с различной симметрией в зависимости от того, отсутствуют или нет плоскости симметрии или двойные оси. Двойные оси будут двух различных родов (теорема XXII). Обозначим через L^2 двойные оси первого рода, а через L'^2 — второго рода. Аналогичные обозначения можно ввести для плоскостей симметрии. Плоскости симметрии первого рода обозначим через P, а второго — через P'. Тогда получим для двух классов многогранников следующие выражения:

$$[\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ \mathrm{o}C,\ \mathrm{o}P],\ [\Lambda^{2q},\ \mathrm{o}L^2,\ \mathrm{o}C,\ qP,\ qP'].$$

Теорема XXVIII. В многогранниках с главной осью Λ^{2q}, $2q$ двойными осями и $2q$ плоскостями симметрии, проходящими вдоль главной оси, двойные оси могут быть расположены на плоскостях симметрии или чередоваться с ними, т. е. совпадать с биссектрисами двугранных углов. Это дает для данного частного случая два различных вида симметрии.

Для всякого иного относительного положения двойные оси, воспроизводя при вращении на 180° $2q$ плоскостей симметрии (теорема X, след-

ствие), удваивают число последних. Аналогично двойные оси, повторяясь в гомологичных положениях по другую сторону плоскостей (теорема VIII, следствие), удваиваются в числе, что противоречит следствиям теорем XXIV и XXV.

Теорема XXIX. Если в многограннике с главной осью Λ^{2q} плоскости симметрии содержат двойные оси, то существует плоскость симметрии, нормальная основной оси, и центр симметрии.

Пусть CA (рис. 5) — главная ось, CP — одна из двойных осей и $ACPQ$ — плоскость симметрии, содержащая эту ось. Вершина S будет иметь гомологичную себе вершину s по отношению к двойной оси CP. Вершина s будет иметь себе гомологичную Σ по отношению к плоскости $ACPQ$. Относительное расположение S и Σ указывает, что плоскость PCP', нормальная к CA и к плоскости CAP, есть плоскость симметрии многогранника, по отношению к которой S и Σ — две гомологичные вершины. Следовательно, существует плоскость симметрии, нормальная главной оси Λ^{2q}, которая в свою очередь является причиной появления центра симметрии (теорема XXII).

Теорема XXX. Если в многограннике с главной осью Λ^{2q} плоскости симметрии чередуются с двойными осями, то эти оси все одного рода, но обратно сходны каждая со своей соседней. В результате не существует ни плоскости симметрии, нормальной этой оси, ни центра симметрии.

Если существует плоскость симметрии, нормальная этой оси, то ее пересечения с плоскостями симметрии будут двойными осями (теорема XVII), что противоречит условию нашей теоремы. Следовательно, не существует ни плоскости симметрии, нормальной оси, ни центра симметрии (теорема XXI).

Соседние двойные оси L_0l_0, L_1l_1 (рис. 8) обратно сходны и гомологичны по отношению к промежуточной плоскости симметрии, проходящей через главную ось и через P_0Cp_0. Обратное равенство в общем случае не исключает прямого равенства. В настоящем случае легко убедиться, что L_0l_0 и L_1l_1 никогда не могут быть прямо сходными, ибо вращение, приводящее их в совпадение и характеризующее прямое равенство, не может, очевидно, иметь места, кроме как вокруг главной оси, вокруг биссектрисы p_0CP_0 или, наконец, вокруг второй биссектрисы p_3CP_3, нормальной к предыдущей. Так как существует $2q$ двойных осей, то

$$L_0CL_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{360^\circ}{4q}, \quad P_0CP_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{90^\circ}{q}.$$

Если CL_0, CL_1 прямо сходны по отношению к главной оси, то поворот на $\frac{360^\circ}{4q}$ восстанавливает места вершин, и порядок симметрии главной оси будет равен $4q$, что невозможно. Аналогично этому CL_0, CL_1 не могут быть прямо сходными по отношению к CP_0, потому что CP_0 не есть двойная ось. Нормаль к CP_0 или CP_3 тем более не является двойной осью, потому что $90^\circ = q \times P_0CP_1$. Таким образом, эта нормаль есть прямая типа CP_0,

CP_1, CP_2. Стало быть, соседние двойные оси обратно сходны без всякой возможности совпадения при наложении.

Рис. 8 дает представление о расположении гомологичных вершин для случая $2q=6$. Плоскость симметрии,* нормальная к главной оси, взята за плоскость рисунка. Черные кружки показывают вершины, расположенные ниже этой плоскости; кружки с белым центром показывают вершины, расположенные над плоскостью рисунка.

Прежде чем выписать символы двух видов исследуемой симметрии, следует заметить, что в случае использования теоремы XXIV плоскости симметрии нормальны двойным осям, а в случае, если плоскости и оси чередуются, они не могут быть им перпендикулярны. Таким образом, мы будем иметь формулы соответственно для случая совпадения и для случая чередования:

$$[\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2][\Lambda^{2q},\ 2qL^2,\ oC,\ 2qP].$$

Из теорем XXVI, XXVIII становится очевидным, что многогранники с главной осью четного порядка могут иметь всего шесть видов симметрии (см. сводную таблицу, стр. 37). В этой таблице q можно придавать все возможные значения от $q=1$ до $q=\infty$.

Случай многогранников с главной осью нечетного порядка.

Теорема XXXI. Многогранник с главной осью нечетного порядка не может одновременно иметь плоскость симметрии, нормальную этой оси и центр симметрии.

Это следствие теоремы IV.

Теорема XXXII. Если в многограннике с главной осью Λ^{2q+1} существуют другие оси, то они двойные, их общее число равно $2q+1$ и все они одного рода.

Любая из новых осей, отличная от главной, обязательно двойная, расположена в плоскости, нормальной Λ^{2q+1} (теорема XV), будет повторяться $2q$ раз в силу следствия теоремы X. Эти $2q+1$ осей будут различно расположенными, и, кроме того, они не совпадают друг с другом (как это происходит для случая главных осей четного порядка). В самом деле, если их перенумеровать 0, 1, 2, 3, ... и т. д. в порядке возрастания на $\frac{360°}{2q+1}$, то углы их с осью O будут

$$0°,\ \frac{360°}{2q+1},\ \ldots,\ \frac{q360°}{2q+1},\ \frac{(q+1)\,360°}{2q+1},\ \ldots,\ \frac{2q360°}{2q+1}.$$

Эти углы соответствуют различным осям, потому что два из этих углов никак не могут отличаться на 180°.

---

* В этой теореме рассматривается случай, соответствующий инверсионно-планальным видам симметрии с четной инверсионной (или зеркально-поворотной) осью симметрии. Плоскость, нормальная к главной оси, не является здесь истинной плоскостью симметрии, а представляет собой вспомогательную зеркальную плоскость (*прим. ред.*).

В плоскости, нормальной главной оси, невозможно существование других двойных осей, кроме тех, присутствие которых мы только что установили. Пусть Q — их общее число; если $Q > 2q+1$, то порядок главной оси будет равен Q или mQ (теорема XIII), что противоречит предположению о главной оси порядка $2q+1$.

Следствие. Число двойных осей, нормальных Λ^{2q+1}, будет равно 0 или $2q+1$.

Теорема XXXIII. Если в многограннике с главной осью Λ^{2q+1} существуют плоскости симметрии, проходящие вдоль главной оси, то их общее число равно $2q+1$ и все они одного рода. Можно показать, как и в предыдущей теореме, что:

1) $2q+1$ плоскости, получающиеся в результате последовательных поворотов вокруг главной оси на углы, равные $\frac{360^\circ}{2q+1}$, будут различно расположенными, одного рода и прямо сходными между собой;

2) их общее число не может превышать $2q+1$ в силу теоремы XI.

Следствие. Число плоскостей симметрии, проходящих вдоль главной оси Λ^{2q+1}, всегда равно 0 или $2q+1$.

Теорема XXXIV. Многогранник с главной осью Λ^{2q+1}, не обладающий ни плоскостями симметрии, проходящими вдоль этой оси, ни двойными осями, может принадлежать к трем различным видам симметрии в зависимости от того, имеет он плоскость симметрии, нормальную этой оси, или в последнем случае имеет или не имеет центр симметрии.

Если многогранник обладает плоскостью симметрии, нормальной главной оси, то он не может иметь центра симметрии (теорема XXXI), поэтому ось будет главной и симметрия многогранника вполне определена.

Если плоскость, нормальная главной оси, не является плоскостью симметрии, то может существовать центр симметрии. Следовательно, согласно введенным обозначениям, мы получим три различных символа:

$$[\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ oP],\ [\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ C,\ oP],\ [\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ \Pi].$$

Теорема XXXV. Многогранник с главной осью, имеющий по отдельности или $2q+1$ плоскостей симметрии, или $2q+1$ двойных осей, сосуществующих с главной осью, не может обладать ни плоскостью симметрии, нормальной к Λ^{2q+1}, ни центром симметрии.

Это очевидное следствие теорем XVII—XX. Сохраняя принятые обозначения, найдем, что два класса многогранников, которым соответствует настоящая теорема, представляются в виде следующих символов:

$$[\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ oC,\ oP],\ [\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ (2q+1)P].$$

Теорема XXXVI. У многогранника с главной осью Λ^{2q+1}, $2q+1$ двойными осями и $2q+1$ плоскостями симметрии, проходящими вдоль главной оси, двойные оси расположены на плоскостях симметрии или делят пополам их двугранные углы.

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема XXVIII.

Теорема XXXVII. Когда в многограннике с главной осью Λ^{2q+1} плоскости симметрии содержат двойные оси, то существует плоскость симметрии, нормальная главной оси, но не существует центра симметрии.

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы XXIX. Но следствие относительно существования центра симметрии не имеет места в силу теоремы XXXI.

Теорема XXXVIII. Когда в многограннике с главной осью Λ^{2q+1} плоскости симметрии одного рода чередуются с двойными осями одного рода, совпадающими с нормалями к плоскостям симметрии, то существует центр симметрии, но не плоскость симметрии, нормальная главной оси.

Двойные оси CL_0, CL_1, CL_2 (рис. 9) делят на $2q+1$ равных частей полуокружность, описанную вокруг C как центра; так как это число нечетное, то одна из биссектрис углов L_0CL_1, L_1CL_2 и т. д. будет нормалью к CL_0. Стало быть, всегда существует плоскость симметрии, нормальная к оси CL_0. Эта плоскость, след которой на плоскости рис. 9 P_1Cp_1, предполагается нормальной к двойной оси. Сосуществование плоскости симметрии и двойной оси, которая ей нормальна, влечет за собой существование центра симметрии (теорема XXII).

При этом все двойные оси прямо сходны между собой по отношению к главной оси и, следовательно, одного рода. Кружки с белым центром и с черным центром на рис. 9 показывают расположение гомологичных вершин. Черные кружки изображают вершины ниже плоскости рисунка, кружочки с белым центром — выше плоскости рисунка.

Символы многогранников, соответствующих теоремам XXXVII, XXXVIII, будут иметь следующий вид:

$$[\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ C,\ (2q+1)P^2],\ [\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ oC,\ \Pi,\ (2q+1)P].$$

Ясно, в силу теорем XXXIV—XXXVIII, что многогранники с главной осью нечетного порядка могут иметь только семь видов симметрии, указанных в таблице, заключающей эту работу. В этой таблице q можно придавать любые значения — от $q=1$ до $q=\infty$.

§ 4. Симметричные сфероэдрические многогранники

Теорема XXXIX. Всякий сфероэдрический многогранник обладает по меньшей мере двумя осями L^q, $L^{q'}$ порядка выше 2.

Сфероэдрический многогранник не может обладать только одной осью симметрии, ибо во избежание воспроизведения этой оси плоскостями симметрии многогранника (теорема VIII, следствие) надо было бы, чтобы эти плоскости содержали единственную ось симметрии или совпадали с плоскостью, ей нормальной. Тогда эта единственная ось может быть всегда принята за главную ось и многогранник не будет сфероэдрическим.

Следовательно, существует две или несколько осей симметрии в сфероэдрическом многограннике. Пусть тогда L^q, $L^{q'}$ — две оси, порядок которых q, q' больше порядка других осей. Я утверждаю, что $q > 2$, $q' > 2$.

Сначала предположим, что $q=2$, $q'=2$. Нормаль к плоскости осей L^2, L'^2 тоже будет осью симметрии Lq'' (теорема XI). Так как не может быть $q'' > q$, $q'' > q'$, то будем иметь $q''=2$. При этом L^2 и L'^2 взаимно перпендикулярны, ибо в противном случае существовала бы третья двойная ось в плоскости осей L^2, L'^2. Порядок q'' этой оси был бы больше двух (теорема XIII), чего не может быть. Стало быть, имеем три взаимно перпендикулярные двойные оси, одну из которых можно рассматривать как основную.

В самом деле, тогда не может быть в многограннике никаких других двойных осей, кроме L^2, L'^2, L''^2. Всякая ось, косо расположенная к L^2, будет сочетаться с L^2 и порождать другие оси в их общей плоскости (теорема X, следствие). При этом появится ось симметрии порядка выше двух (теорема XIII).

Аналогично сказанному всякая плоскость симметрии должна проходить вдоль одной из трех осей, таких как L^2. Иначе она породит три другие двойные оси, гомологичные по отношению к этой плоскости, и общее число двойных осей станет равным шести, невозможность чего мы только что доказали. Пусть, стало быть, P — плоскость симметрии, проходящая через L^2. Если существует другая плоскость симметрии P', то она должна быть перпендикулярна P. Иначе их пересечение будет осью порядка выше двух (теорема XI). Посмотрим, существует ли такое расположение этих плоскостей, при котором многогранник не имел бы главной оси.

Если плоскость P не проходит ни вдоль L'^2, ни вдоль L''^2, то P' должна проходить вдоль L^2, в противном случае ее пересечение с P образует четвертую двойную ось, что невозможно. То же справедливо и для всех остальных плоскостей P'', P''', которые должны проходить вдоль L^2. Стало быть, в этом случае ось L^2 удовлетворяет условиям, сформулированным для главных осей, и многогранник перестает быть сфероэдрическим.

Если, напротив, плоскость P содержит не только L^2, но еще одну из двух двойных осей L'^2, L''^2 (например, L'^2), то плоскость P', которая должна всегда проходить через нормаль к плоскости P (через L''^2), должна будет содержать ось L^2 или ось L'^2 (например, L^2), чтобы ее пересечение с P не образовывало четвертой двойной оси. Тогда если существует третья плоскость P'', то она должна быть одновременно перпендикулярной P и P' (см. выше). Стало быть, она пройдет через L'^2 и L''^2 и, следовательно, не может существовать другой плоскости симметрии. В этом случае одна из осей L^2, L'^2, L''^2 может рассматриваться как главная и многогранник не будет сфероэдрическим.

Итак, одновременно $q \neq 2$, $q' \neq 2$.

Предположим теперь, что $q > 2$, $q'=2$. Две оси L^q, L'^2 перпендикулярны между собой. В противном случае ось L'^2 заставила бы ось L^q повториться, по крайней мере, еще один раз. При этом число q' окажется наименьшим среди порядков осей многогранника, что невозможно в силу сделанных предположений. Теми же рассуждениями устанавливается, что не может существовать никакая ось вне плоскости, нормальной L^q. Сле-

довательно, первое условие, согласно которому ось L^q является главной, выполнено.

Аналогично этому плоскости симметрии многогранника, которые не должны воспроизводить ось L^q, либо будут содержать L^q или будут ей перпендикулярны. Следовательно, L^q будет главной осью, а многогранник не будет сфероэдрическим. Следовательно, невозможен случай $q > 2$, $q' = 2$.

Итак, $q > 2$, $q' > 2$.

Теорема XL. Когда в многограннике существуют две оси порядка выше двух, то многогранник должен быть сфероэдрическим.

Если многогранник обладает главной осью, то другие оси могут быть только двойными (теорема XV), что противоречит определению. Следовательно, многогранник сфероэдрический.

Определение X. Теоремы XXXIX и X показывают, что можно дать определение сфероэдрического многогранника, отличное от того, которое дано на стр. 14.

Таким многогранником будет «симметричный многогранник с несколькими осями симметрии, из которых, по меньшей мере, две имеют порядок выше двух». Многогранники с главной осью могут тогда быть определены как «многогранники, обладающие одной или несколькими осями симметрии, из которых только одна порядка выше двух».

Теорема XLI. Во всяком сфероэдрическом многограннике, обладающем осью симметрии L^q порядка выше двух, общее число Q осей порядка q, принадлежащих этому многограннику, должно быть равно половине одного из значений, которое может принимать число вершин во вспомогательном правильном многограннике, удовлетворяющем двум следующим условиям:

1) центр его фигуры всегда центр симметрии;

2) каждый из его телесных углов образован q плоскими углами.

Ось L^q должна сочетаться с осью $L^{q'}$, где q больше двух (теорема XXIX). Поворачивая L^q вокруг $L^{q'}$ на угол $\frac{360°}{q'}$, определим положение второй оси порядка q, отличной от начальной оси L^q (теорема X, следствие).

Пусть, стало быть, OA, OB (рис. 10) — две оси порядка q пересекаются в O, которая является центром фигуры многогранника. Из O, как центра, опишем сферу единичного радиуса, пересекающую две оси OA, OB в A и B, и проведем дугу большого круга AB. Всегда можно предположить: дуга $AB \leqslant 90°$. В противном случае будем рассматривать угол, дополнительный к AOB. Можно всегда предположить, что OA и OB выбраны так, что их наклон друг к другу наименьший среди всех, которые образуют между собой оси порядка q. Установив это, повернем многогранник на $\frac{360°}{q}$ вокруг оси OB порядка q. Тогда A перейдет в C. Соединим BC дугой большого круга. Получим $ABC = \frac{360°}{q}$. Прямая OC тогда

тоже будет осью порядка q (теорема X, следствие). Проведем таким же образом дугу большого круга CD так, что $CD = CB = AB$, $BCD = \frac{360°}{q}$. Прямая OD будет еще одной осью порядка q.

Если повернуть многогранник второй раз на $\frac{360°}{q}$ вокруг OC от B в D, то итогом этого второго вращения будет совмещение точек B и D. Точка A совпадет с C. Два этих поворота эквивалентны единственному вращению вокруг точки M полюса малого круга, проведенного через точки A, B, C, D.* Двойное вращение вокруг OB и OC не изменяет мест, принадлежащих вершинам многогранника. Единственное вращение вокруг M, которое их меняет, тем более не изменяет этих мест. Стало быть, прямая OM будет осью симметрии многогранника. Ясно, что поворот многогранника вокруг OM на угол, равный двугранному углу AMC, не меняет места вершин. Следовательно, этот угол соизмерим с окружностью (теорема II). Тогда число вершин A, B, C, D, . . ., расположенных на окружности малого круга $ABCD$, ограничено. Эти вершины образуют правильный вписанный многогранник, число сторон которого можно обозначить через r. Всегда можно предположить, что A и B — две соседние вершины. Тогда $AMB = \frac{360°}{r}$. В этой формуле число r обязательно больше двух.

Так как AMB и ABC — кратные 360°, то правильный сферический многоугольник $ABCDE$. . ., повторяясь в $CBC'D''$. . ., в $A'ABC'D'$. . . и т. д., полностью покроет поверхность сферы. Совокупность полученных таким образом точек образует вершины правильного вписанного многогранника. Этот правильный многогранник будет одним из тех, в котором плоские углы сходятся в числе q, чтобы образовать соответствующий телесный угол.

Все пять правильных многогранников геометрии, исключая правильный тетраэдр, имеют центр симметрии в центре фигуры. В тетраэдре, вписанном в сферу, угловое расстояние AB между двумя вершинами превышает 90°. Этот случай не рассматривается, ибо он противоречит нашим способам построения.

В результате предыдущих построений получены следующие многогранники:

куб, соответствующий случаю $q=3$, $r=4$, тогда **

$$AB = 70°32', \quad AM = 54°44';$$

---

* Полюс M есть точка пересечения дуг большого круга BM, CM, делящих на две равные части сферические углы ABC, BCD.

** Дуги AB, AM задаются известными формулами: $\cos\frac{1}{2}AB = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{r}$, $\cos AM = \cot\frac{\pi}{q}\cot\frac{\pi}{r}$.

правильный октаэдр, соответствующий случаю $q=4$, $r=3$:

$$AB=90^\circ,\quad AM=54^\circ 44';$$

правильный додекаэдр, соответствующий случаю $q=3$, $r=5$:

$$AB=41^\circ 49',\quad AM=37^\circ 23';$$

правильный икосаэдр, соответствующий случаю $q=5$, $r=3$:

$$AB=63^\circ 26',\quad AM=37^\circ 23'.$$

Пусть теперь M — число вершин полученного таким образом правильного многогранника. Каждой вершине соответствует гомологичная ей и диаметрально противоположно расположенная вершина; ясно, что общее число Q осей порядка q, по крайней мере, равно 1/2 М. Более того, не может быть, чтобы Q было больше $1/2\ M$. Если $Q > 1/2\ M$, то одна из осей порядка q будет касаться сферы в точке X, расположенной внутри одного из сферических многоугольников $ABCDE$. Тогда одно из угловых расстояний между X и вершинами A, B, C, D будет меньше AM, следовательно, меньше AB (по сводной таблице относительных значений AB и AM), что противоречит предположению о минимальном наклоне двух осей OA, OB. Стало быть, Q не может быть больше $1/2\ M$. Следовательно, $Q=1/2\ M$.

Теорема XLII. Сфероэдрический многогранник может иметь, не считая двойных осей, только тройные, четверные, пятерные оси.

Это следует из предыдущей теоремы; L^q — одна из осей многогранника, q может быть только число плоских углов, образующих телесный угол правильного многогранника. Следовательно, $q=3$, или $q=4$, или $q=5$.

Теорема XLIII. Существуют две различные группы сфероэдрических многогранников, обладающих или четырьмя, или десятью тройными осями.

Изучим последовательно четыре случая, к которым приводит Q-кратное самоповторение осей L^q. Пусть M — число вершин правильного вписанного многогранника, к которому приводит тот или иной вид самоповторения.

В кубе (теорема XLI) $q=3$, $M=8$, $Q=1/2\ M=4$.

В октаэдре: $q=4$, $M=6$, $Q=1/2\ M=3$. Три четверные оси взаимно перпендикулярны. Следовательно, существуют четыре тройные оси (теорема XIV) и их не может быть больше. Ведь новые тройные оси вынудят повторяться четверные оси, так что Q станет больше трех, что невозможно.

В додекаэдре $q=3$, $M=20$, $Q=1/2\ M=10$.

В икосаэдре $q=5$, $M=12$, $Q=6$.

Пусть тогда M, M_0, M_1 (рис. 12) — три соседние вершины вписанного икосаэдра. Нормаль, опущенная из центра сферы на сторону MM_0M_1, будет, очевидно, тройной осью. Так как икосаэдр имеет двадцать попарно

параллельных граней, то он будет иметь десять тройных осей. Он не может их иметь в большем числе, так как для $q=3$ нет других значений, кроме $Q=4$, $Q=10$ (теорема XLI).

Следствие. Мы можем разделить сфероэдрические многогранники на две группы: четыреждытройные, имеющие четыре тройные оси, расположенные наподобие больших диагоналей куба, и десятитройные, обладающие десятью тройными осями, расположенными наподобие десяти больших диагоналей правильного додекаэдра.

Четыреждытройные многогранники

Теорема XLIV. Если построить куб, диагоналями которого являются четыре тройные оси заданного четыреждытройного многогранника, то три нормали, опущенные из центра фигуры на его грани, будут тремя осями одного рода для многогранника, и симметрия их будет двойной или четверной.

Принимая за центр многогранника точку пересечения четырех тройных осей, опишем вокруг нее сферу единичного радиуса. Точки выхода тройных осей обозначим A, A_0, A_1, A_2 (рис. 11).

Поверхности этой сферы я стереографически спроектировал на плоскость большого круга с центром в A; читателю предлагается следить за доказательством, представляя себе все это происходящим на сфере, центр которой O не отмечен на рисунке. Верхними вершинами вписанного куба являются A, A_0, A_1, A_2. Точки B_0, B_1, B_2 — вершины, диаметрально противоположные A_0, A_1, A_2. $AA_0B_1B_2$, $AA_0B_2A_1$, $AA_1B_0A_2$ — три сферических квадрата, центры M_0, M_1, M_2 которых являются окончаниями трех нормалей, опущенных из центра на стороны вписанного куба.

Двойной поворот на 120° сначала вокруг A_2 как центра от A к B_0 и потом вокруг B_0 как центра от A_2 к A_1 приводит A в B_0 и A_2 в A_1 без изменения места вершин. Этот двойной поворот эквивалентен повороту на 180° вокруг центра M_0. Следовательно, OM_0 есть ось, симметрия которой имеет порядок два или порядок, кратный двум. При этом симметрия OM_0 не может иметь порядок, превышающий четыре: иначе число тройных осей, расположенных вокруг M_0, превысит четыре, что противоречит начальным условиям. Следовательно, три взаимно перпендикулярные оси OM_0, OM_1, OM_2 — двойные или четверные оси симметрии.

Теорема XLV. Четыреждытройной многогранник, обладающий взаимно перпендикулярными двойными осями, не может обладать никакими другими двойными осями.

Если существует другая двойная ось, то она может касаться поверхности сферы (рис. 11) только в трех точках, которые находятся в серединах дуг AA_0, AA_1, AA_2 или в серединах гомологичных им дуг A_0B_1, A_0B_2, A_1B_2, A_1B_0, A_2B_0, A_2B_1. Во всех других положениях эта ось заставит повториться тройные оси, что приведет к удвоению их числа. Предположим, что G_0, середина AA_0, — выход новой двойной оси. Тогда двой-

ной поворот многогранника, сначала на 180° вокруг центра G_0, затем на 120° вокруг центра A_0 в направлении от A к B_1, приведет к следующему: A перейдет в A_0, а затем останется в A_0, A_0 — в A и в B_1, B_1 — в A_1 и далее в A_2, A_2 — в B_2, затем в A.

Это двойное движение, которое не меняет мест вершин многогранника, эквивалентно простому повороту на 90° вокруг M_1 от A к A_0. Следовательно, центр M_1 будет выходом четверной оси, что противоречит начальным условиям. Следовательно, в этом многограннике не существует никаких других двойных осей.

Примечание. Пусть S (рис. 11) — вершина заданного многогранника. Можно предположить, что она лежит на поверхности единичной сферы с центром в точке O фигуры многогранника. Две гомологичные A вершины по отношению к тройному полюсу вершины есть S' и S''. Система $SS'S''$ воспроизводится в $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$ в силу двойственности полюсов M_0, M_1, M_2. Полная система вершин, гомологичных одной и той же вершине, в настоящем случае будет вписанным в сферу многогранником.

Это свойство, которое применимо к любым сфероэдрическим многогранникам, служит оправданием данного им названия. В аналогичном смысле это название фигурирует в кристаллографической терминологии знаменитого профессора Вейса.

Следствие. Расположение двенадцати вершин этого многогранника показывает, что он не обладает ни плоскостями, ни центром симметрии, по крайней мере, в общем случае, когда вершина S не обладает никакой особенностью расположения внутри сферического треугольника A_0A_2A (см. доказательство двух следующих теорем).

Теорема XLVI. Четыреждытройные многогранники с взаимно перпендикулярными двойными осями могут обладать или шестью плоскостями симметрии, совпадающими с шестью плоскостями, попарно соединяющими тройные оси, или тремя плоскостями симметрии, совпадающими с тремя плоскостями, попарно соединяющими двойные оси. Всякая другая плоскость симметрии для них невозможна.

Любое отличное от указанного расположение плоскости симметрии вынуждает четыре тройные оси повториться и поэтому должно быть отброшено.

Если A_1AM_1 (рис. 11) представляет одну из плоскостей симметрии, то тройственность полюса A_1 требует, чтобы плоскостями симметрии были также A_2AM_2, A_0AM_0. Тройственность полюса A_1 вынуждает распространить это требование на плоскости $B_2A_1M_0$, $B_0A_1M_2$. То же относится и к $A_0M_1A_2$ в силу двойственности оси OM_1 (теорема XXIII).

В этом случае каждый треугольник $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$ заменяется шестиугольником. Ограничимся изображением этого шестиугольника, который окружает вершину B_0. Двадцать четыре вершины многогранника могут быть сведены к двенадцати, если вершину S, которая предопределяет положение всех остальных, опустить на одну из трех

дуг большого круга A_0AM_0, A_1AM_1, A_2AM_2. Эти вершины могут свестись к четырем, если S совпадает с A, и т. д.

Предположим теперь, что $M_2G_0M_1$ представляет плоскость симметрии, тогда $M_1G_2M_0$, $M_0G_1M_2$ тоже будут плоскостями симметрии вследствие тройственности полюса A. В этом случае треугольник $SS'S''$ повторяется вокруг полюсов A_0, A_1, A_2. Ограничимся рассмотрением повторения треугольника вокруг вершины A_1. Тогда треугольник $\sigma\sigma'\sigma''$ гомологичен треугольнику $SS'S''$ по отношению к плоскости симметрии $M_2G_1M_0$.

Притом эти две системы плоскостей симметрии не могут существовать одновременно. Тогда четыре плоскости симметрии пересекутся в полюсе M_0 и ось OM_0 будет четверной осью (теорема XI), что противоречит начальным условиям.

Теорема XLVII. Четыреждытройные многогранники с взаимно перпендикулярными двойными осями имеют центр симметрии только тогда, когда они обладают тремя плоскостями симметрии, попарно соединяющими двойные оси. Наличие этих плоскостей влечет за собой существование центра симметрии.

Это следствие теорем XXI и XXII.

Теорема XLVIII. Четыреждытройные многогранники с взаимно перпендикулярными двойными осями могут принадлежать только трем различным видам симметрии в зависимости от того, отсутствуют ли вообще в них плоскости симметрии или же присутствуют шесть плоскостей симметрии, проходящих через тройные оси, или три плоскости симметрии, проходящие через двойные оси.

Это вытекает из следствия теоремы XLV, так же как и теоремы XLVI. Если, кроме того, учитывать теорему XLVII (см. также стр. 31), то получим три символа

$$[4L^3,\ 3L^2,\ \text{o}C,\ \text{o}P],\ [4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2],\ [4L^3,\ 3L^2,\ \text{o}C,\ 6P].$$

Теорема XLIX. Всякий четыреждытройной многогранник с четверными осями обладает шестью двойными осями, попарно соединяющими противоположные ребра куба, который имеет четыре тройные оси многогранника в качестве диагоналей.

Если соединить центр O сферы (рис. 11) с точкой G_0, серединой AA_0, то эта прямая будет двойной осью многогранника. Повернем многогранник на 90° вокруг OM_1 от A к A_0, а потом повернем на 120° вокруг OA_0 от B_1 к A. Это двойное движение, не меняющее мест вершин, приведет A в A_0, затем в A_0, A_0 в B_1, затем в A, B_1 в A_2, затем в A_1, A_2 в A, затем в B_2. Результат этих двух поворотов будет такой же, как при повороте многогранника на 180° вокруг G_0. Следовательно, OG_0 есть ось симметрии четного порядка, который, очевидно, может быть равен только двум. То же будет для пяти других прямых, гомологичных OG_0. Три из них расположены в плоскости большого круга проекции сферы. Доказывается, так же как это было сделано в доказательстве теоремы XLV, что всякой другой прямой несвойственно быть двойной осью системы.

Теорема L. Если четырехдытройные многогранники с четверными осями обладают плоскостями симметрии, то шесть из них обязательно проходят через тройные оси и три — через четверные оси; они имеют также центр симметрии.

Обозначим P^4 плоскости, проходящие через четверные оси, P^2 — плоскости, проходящие через тройные оси. Установлено, что это единственно возможные плоскости симметрии (доказательство теоремы XLVI).

Допустим существование плоскостей P^4. Плоскости $M_0G_1M_2$ и $M_0G_2M_1$ (рис. 11) будут двумя плоскостями симметрии, пересекающимися по четверной оси. Следовательно, AM_0B_0, $A_1M_0A_2$ тоже будут плоскостями симметрии (теорема XXV). Система P^2, стало быть, объединяется с системой P^4. Аналогично доказывается, что система P^4 всегда объединяется с системой плоскостей P^2.

Каждая из трех плоскостей системы P^4 нормальна одной из трех четверных осей. Каждая из шести плоскостей системы P^2 нормальна одной из шести двойных осей. Действительно, если в кубе с четырьмя вертикальными ребрами соединить центры двух противоположных ребер прямой, то каждая прямая будет нормальна к плоскости, проходящей через два других ребра. Наличие плоскостей симметрии влечет за собой существование центра симметрии (теорема XXII).

Теорема LI. Для четырехдытройных многогранников с четверными осями возможно только два вида симметрии в зависимости от того, имеют они плоскости симметрии или нет.

Это следствие предыдущей теоремы.

Если многогранник не имеет плоскостей симметрии, то он лишен центра симметрии (теорема XXI). Полная система вершин, гомологичных S (рис. 11), образует вписанный многогранник с 24 вершинами, группирующимися по три вокруг каждого из восьми полюсов A, A_0, A_1, A_2, Bo, ... Ограничимся изображением на рисунке треугольника $\sigma_2\sigma_2'\sigma_2''$, окружающего полюс A_2.

Если многогранник имеет девять плоскостей симметрии, то восемь треугольников $SS'S''$, $S_1S_1'S_1''$, ... заменяются восемью шестиугольниками, и гомологичная система содержит 48 вершин. Символы двух этих видов симметрии будут иметь вид:

$$[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP_4],\quad [3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2].$$

Десятитройные многогранники

Теорема LII. Если построить правильный додекаэдр, имеющий диагоналями десять тройных осей заданного десятитройного многогранника, то шесть нормалей, опущенных из центра фигуры на стороны этого додекаэдра, будут пятерными осями симметрии для многогранника.

Принимая за центр точку пересечения десяти тройных осей, опишем единичным радиусом сферу, которая пересечет в точках A_0, A_1, A_2, A_3,

A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 (рис. 12) верхнюю половину десяти тройных осей. Поверхность этой сферы спроектирована на плоскость большого круга, параллельного грани $A_0A_1A_2A_3A_4$ правильного вписанного додекаэдра, вершинами которого служат A_0A_1. . ., B_0B_1. . . . Читатель может представить точки и линии рисунка на поверхности сферы, центр O которой на рисунке не указан. Попарно соединив их, получим правильные сферические пятиугольники, двенадцать центров M которых являются выходами радиусов, проведенных из центра сферы нормально двенадцати граням додекаэдра.

Два поворота на 120° (один вокруг OA_0 от A_4 к B_0 и другой вокруг OB_0 от A_0 к C_2) приведут A_4 в B_0 и A_0 в C_2. Эти два вращения, не изменяющие места вершин многогранника, эквивалентны одному повороту на 144° вокруг OM_2 от A_0 к B_0. Три таких поворота эквивалентны вращению на 72°. Следовательно, ось OM_2 есть пятерная ось; то же справедливо для OM, OM_0, OM_1 и т. д. Точки M_0, M_1. . . будут вершинами правильного вписанного в сферу икосаэдра.

Теорема LIII. Десятитройные многогранники всегда обладают пятнадцатью двойными осями.

Повернем заданный многогранник на 72° вокруг OM (рис. 12) от A_0 к A_1, затем на 120° вокруг OA_1 от A_2 к A_0. В итоге полюс A_0 перейдет в A_1, затем A_1 — в A_0. Конечный результат таков, как при повороте многогранника на 180° вокруг радиуса OG, проведенного через середину дуги A_0A_1. Однако места вершин не изменяются, следовательно, G есть выход оси четного порядка, которая, очевидно, имеет второй порядок. Правильный додекаэдр имеет тридцать попарно противолежащих ребер. Следовательно, число двойных осей будет равно пятнадцати.

Никакие другие диаметры сферы не могут быть двойными осями, ибо в силу своего положения они вынуждают повторяться тройные оси, которых станет больше десяти, что невозможно (теорема XLIII).

Можно также получить пятнадцать двойных осей, соединяя попарно противолежащие ребра вписанного икосаэдра M.

Теорема LIV. Десятитройные многогранники могут иметь в качестве плоскостей симметрии пятнадцать плоскостей, проходящих через шесть пятерных осей, соединенных попарно. В противоположном случае эти многогранники не имеют ни одной плоскости симметрии.

Рассмотрим, в частности, плоскость, проходящую через центр сферы и вершины M и M_3 (рис. 12). Эта плоскость будет плоскостью симметрии для системы точек (A_0A_1), (A_4A_2), (M_2M_4), (M_1M_0) и т. д. Стало быть, она удваивает число осей. Следовательно, ничто не противоречит ее существованию.

При этом плоскость MM_3 перпендикулярна прямой KK', которая является двойной осью системы. Гомологичными этой плоскости будут в целом пятнадцать плоскостей: MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4, M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1, M_0M, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Это, очевидно, единственные плоскости симметрии, которыми может обладать многогран-

ник. Для всех других положений плоскостей число тройных осей превысит десять, что невозможно (теорема XLIII).

Рис. 12 представляет расположение шестидесяти вершин, гомологичных S, вокруг полюсов A_0, A_1 и т. д. в случае, когда многогранник не обладает никакими плоскостями симметрии.

Если пятнадцать плоскостей симметрии, указанных выше, существуют в этом многограннике, то треугольник $SS'S''$ заменяется шестиугольником. Чтобы не усложнять рисунок, ограничимся изображением одного шестиугольника у полюса B_0. Система вершин, гомологичных S, содержит тогда сто двадцать вершин. Для некоторых частных положений это число может быть сведено к шестидесяти, двадцати или двенадцати вершинам. Этот последний случай реализуется, когда S расположена на выходе пятерной оси системы.

Теорема LV. Когда десятитройной многогранник обладает пятнадцатью плоскостями симметрии, указанными в определении предыдущей теоремы, то эти плоскости нормальны пятнадцати двойным осям и многогранник обладает центром симметрии. В противном случае он его лишен.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что двойная ось KOK' (рис. 12) нормальна плоскости M_3GMA_3. Однако эта плоскость есть одна из пятнадцати плоскостей симметрии многогранника. Стало быть, каждая из этих плоскостей симметрии нормальна одной из пятнадцати двойных осей. Следовательно, многогранник обладает центром симметрии (теорема XXII). Если многогранник лишен плоскостей симметрии, то он не может иметь центра симметрии в силу присутствия двойных осей (теорема XXI).

Теорема LVI. Десятитройные многогранники имеют два различных вида симметрии в зависимости от присутствия или отсутствия центра симметрии.

Это следствие теорем LIV и LV.

Символы этих двух видов:

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ oC,\ oP],\quad [6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2].$$

Теорема LVII. Оси, характеризующие симметрию четыреждытройных многогранников с двойными взаимно перпендикулярными осями, входят также в симметрию десятитройных многогранников.

Произвольно выберем вершину тройной оси, такую как A_2 (рис. 12). Середина G одного из двух ребер A_1A_0, A_3A_4, прилегающих к ребру A_0A_4, противолежащему вершине A_2 в пятиугольнике $A_0A_1A_2A_3A_4$, будет выходом двойной оси (теорема LIII). Она будет также в точках H, K, которые гомологичны G по отношению к тройной оси OA_2. В сферическом треугольнике HGK три угла H, G, K прямые. Следовательно, три ребра HG, KG, HK равны по 90°.

Три оси OG, OH, OK являются, стало быть, тремя взаимно перпендикулярными двойными осями, и сферический треугольник GHK обладает тремя прямыми углами. Вершина A_2 — центр этого треугольника. Ана-

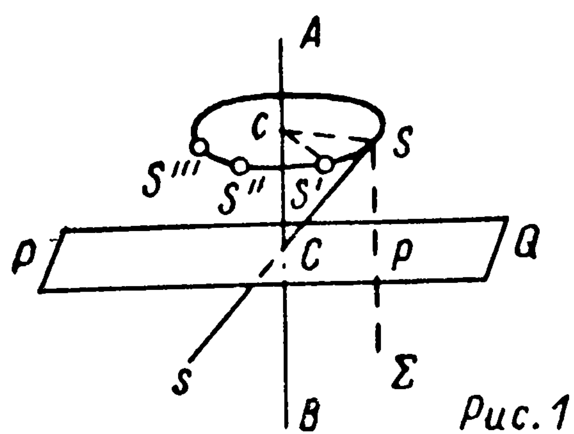


Рис.1

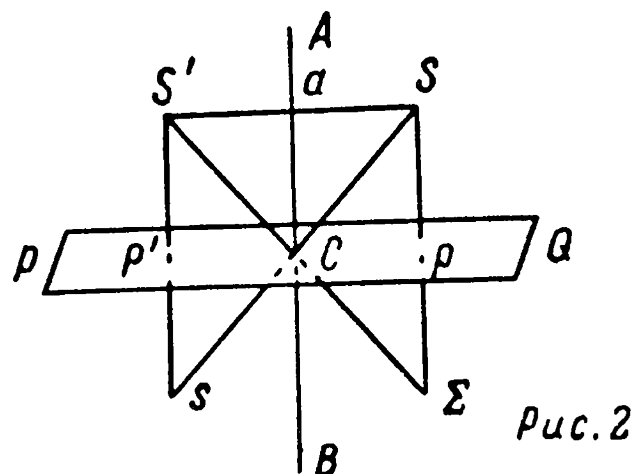


Рис.2

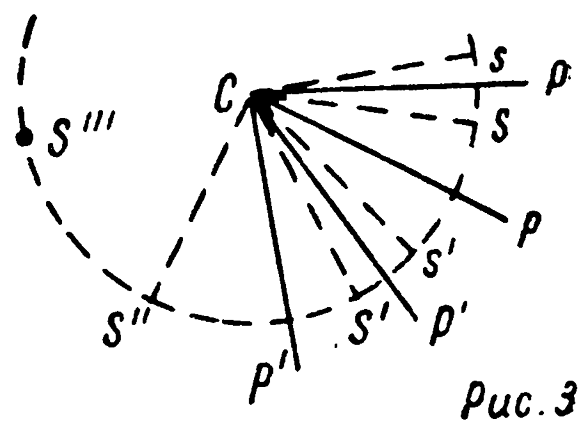


Рис.3

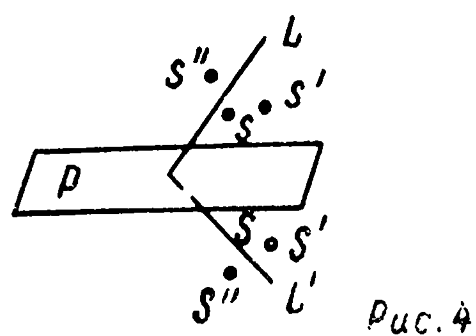


Рис.4

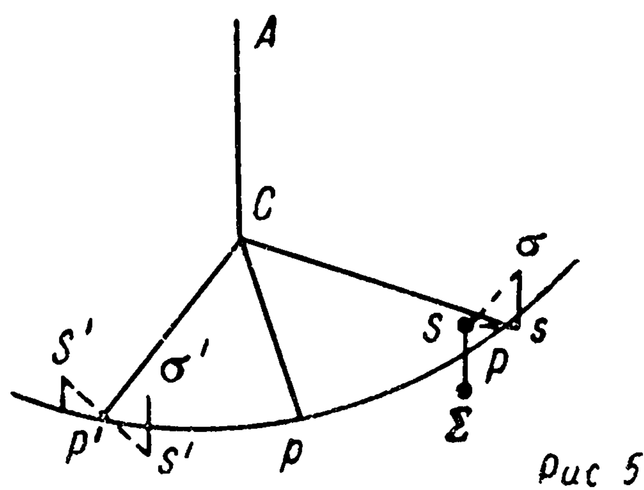


Рис 5

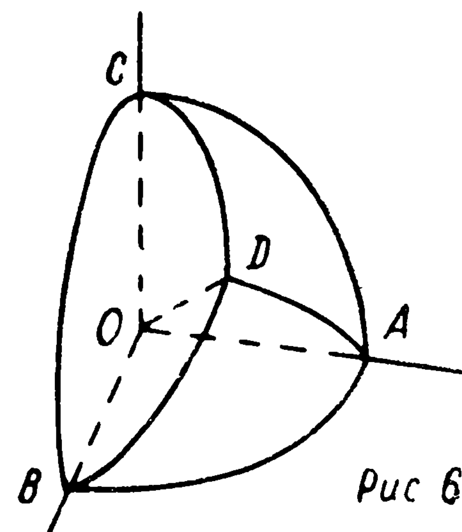


Рис 6

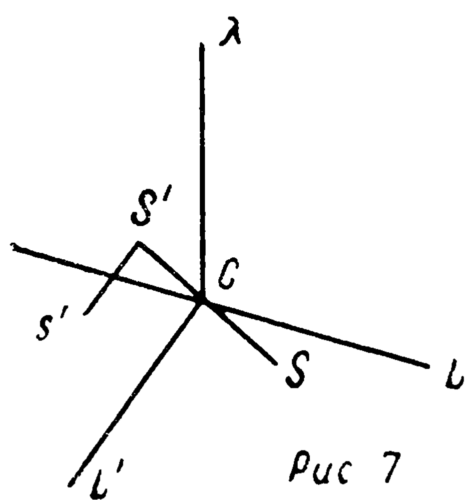


Рис 7

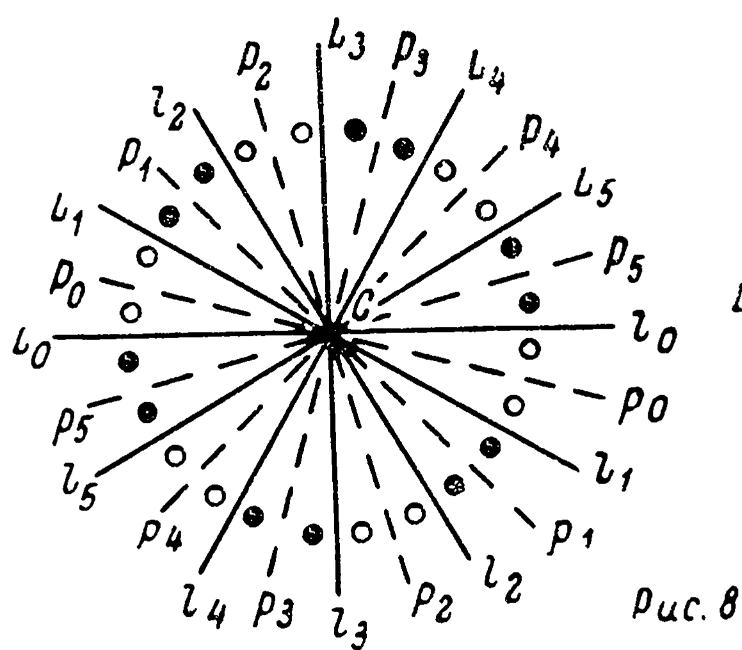


Рис.8

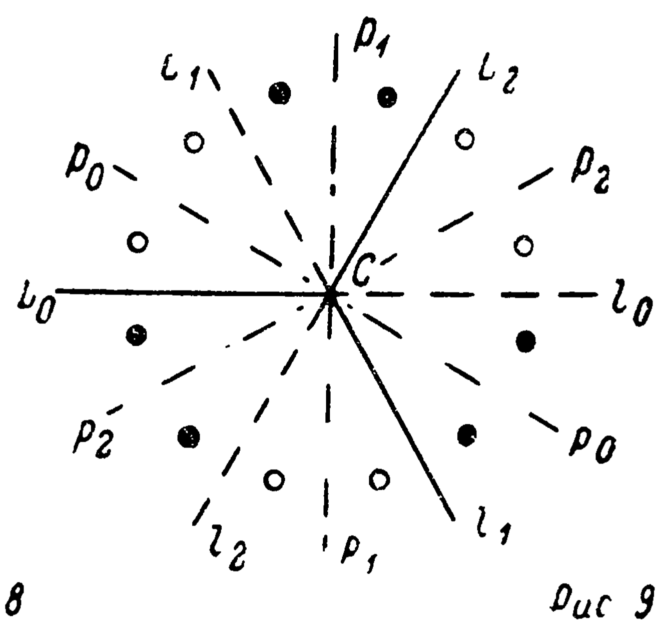


Рис 9

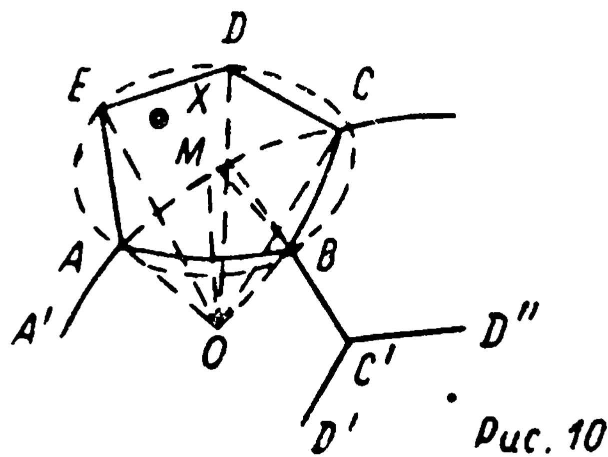


Рис.10

логично этому A_4 будет центром такого же треугольника GHK', B_0 — треугольника $GK'H'$, H^1 будет верхним концом оси OH и B_1 — центром KGH'.

Следовательно, четыре тройные оси OA_1, OA_4, OB_0, OB сочетаются с тремя взаимно перпендикулярными двойными осями в положении, ха-

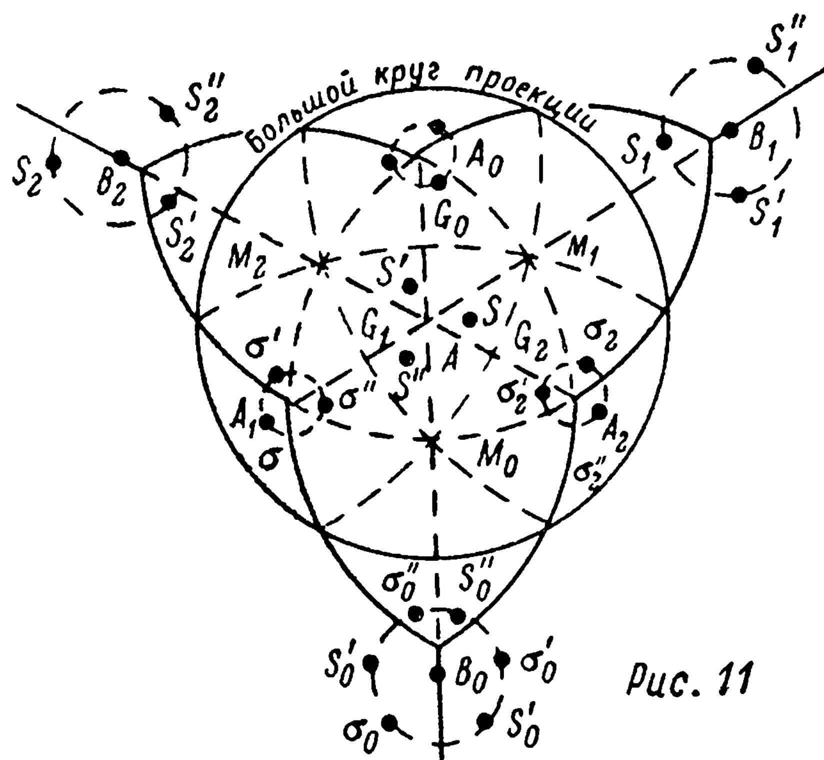


Рис. 11

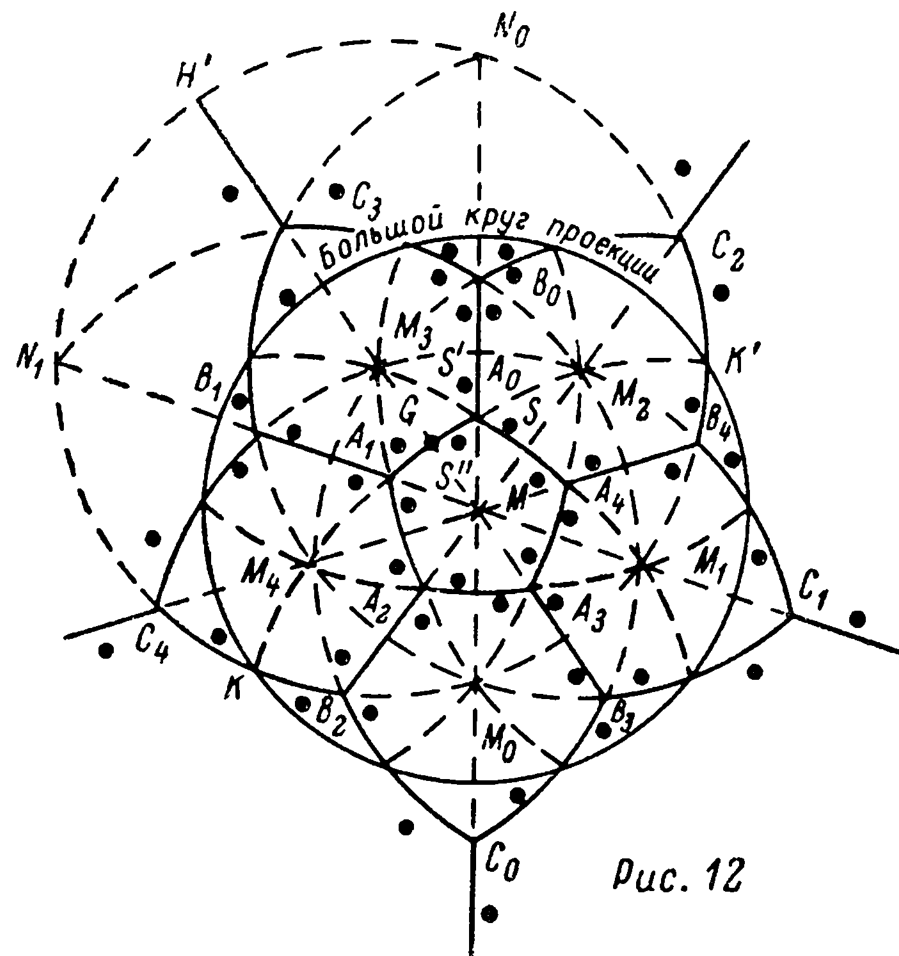


Рис. 12

рактеризующем четырехдытройные многогранники с двойными взаимно перпендикулярными осями.

Примечание. Сочетание OA_2, OA_4, OB_0, OB_1 можно заменить одной из следующих четырех комбинаций:

$$[oA_0,\ oA_3,\ oB_1,\ oB_2],\quad [oA_0,\ oA_2,\ oB_3,\ oB_4],\quad [oA_1,\ oA_3,\ oB_0,\ oB_4],$$
$$[oA_1,\ oA_4,\ oB_2,\ oB_3].$$

Теорема LVIII. Многогранники $[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ oC,\ oP]$ обладают всеми элементами симметрии многогранников $[4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP]$. Многогранники $[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2]$ обладают всеми элементами симметрии многогранников $[4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2]$.

Часть этого утверждения относительно осей симметрии уже доказана в предыдущей теореме. Легко заключаем, что многогранники $[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ oC,\ oP]$ обладают всеми элементами симметрии многогранников $[4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP]$.

Если, кроме того, десятитройные многогранники содержат пятнадцать плоскостей симметрии, то плоскости KG, GH, HK (рис. 12) будут принимать здесь участие и явятся плоскостями $3P^2$ многогранников $[4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2]$. Центр симметрии C существует и там, и в другом виде симметрии.

Ясно, что симметрия, характеризующаяся символом $[4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2]$, будет содержаться в $[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2]$.

Замечание. Теоремы LVII и LVIII имеют косвенный интерес для общей теории симметричных многогранников. Здесь они присутствуют ввиду возможного их применения в кристаллографии при изучении тел кубической системы.

Классификация многогранников

Многогранники	Символ симметрии многогранника	Класс	Минимальное число вершин 1-го рода	2-го рода	3-го рода	4-го рода
Асимметричный	$oL,\ oC,\ oP$	1	1	1	1	1
Симметричные, без осей	$oL,\ C,\ oP$	2	2	2	2	
	$oL,\ oC,\ P$	3	1	1	1	
Симметричные, с главной осью, четного порядка	$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ oC,\ oP$	4	$2q$	$2q$		
	$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ C,\ \Pi$	5	$2q$	$2q$		
	$\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2\ oC,\ oP$	6	$4q$			
	$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ oC,\ qP,\ qP'$	7	$2q$	1		
	$\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2$	8	$2q$	0 или $2q$*		
	$\Lambda^{2q},\ 2qL^2,\ oC,\ 2qP$	9	$4q$			
Симметричные, с главной осью, нечетного порядка	$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ oP$	10	$2q+1$	$2q+1$		
	$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ C,\ oP$	11	$4q+2$	$4q+2$		
	$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ \Pi$	12	$2q+1$	$2q+1$		
	$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)\,L^2,\ oC,\ oP$	13	$4q+2$			
	$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ (2q+1)\,P$	14	$2q+1$			
	$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)\,L^2,\ C,\ (2q+1)\,P^2$	15	$4q+2$			
	$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ oC,\ \Pi,\ (2q+1)P$	16	$2q+1$			
Симметричные, сфероэдрические, четыреждытройные	$4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP$	17	12			
	$4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P$	18	12			
	$4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ 6P^2$	19	4			
	$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP$	20	24			
	$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2$	21	6			
Симметричные, сфероэдрические, десятитройные	$6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ oC,\ oP$	22	60			
	$6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P$	23	12			

Примечание. Наименьшее число вершин 2-го рода равно $2q$, если $q=1$, и 0, если $q>1$.

Эта таблица подразделяет многогранники на двадцать три класса согласно принципам, изложенным в этой работе. Интерпретация символов изложена на стр. 13. Заметим, что классы от 4 по 16-й включительно подразделяются на классы разного порядка в зависимости от номера порядка симметрии главной оси.

Мы хотим, например, узнать по таблице элементы симметрии многогранника 7-го класса 4-го порядка. Его символ будет $[\Lambda^4,\ oC,\ 2P,\ 2P']$. Отсюда ясно, что этот многогранник обладает четверной осью, четырьмя

плоскостями симметрии, проходящими вдоль этой оси и пересекающимися под углами в 45°, двумя взаимно перпендикулярными плоскостями 1-го рода и также двумя плоскостями 2-го рода.

Четыре последние колонки дают наименьшее число вершин каждого многогранника. Все вершины одного рода образуют гомологичную систему вершин. Таких систем существует столько же, сколько имеется различных родов вершин в многограннике.

Наиболее простыми будут:

в 1-м классе — неправильный тетраэдр;

во 2-м — неправильный октаэдр с основанием в виде параллелограмма;

в 3-м — равнобедренный треугольник;

в 19-м — правильный тетраэдр;

в 21-м — правильный октаэдр;

в 23-м — правильный икосаэдр и т. д.



МЕМУАР О СИСТЕМАХ ТОЧЕК, ПРАВИЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ ИЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Предварительные определения

Чтобы получить систему точек, правильно распределенных в пространстве, возьмем две произвольные точки и соединим их неограниченно продолженной в обе стороны прямой линией. Нанесем на эту прямую бесконечное количество точек, разделенных постоянными интервалами, равными расстоянию между двумя начальными точками. Прямолинейная система равноотстоящих точек в этой работе будет называться р я д о м. Основной интервал, разделяющий две соседние точки, будет называться п а р а м е т р о м ряда.

Возьмем второй ряд с тем же параметром и расположим его параллельно предыдущему в некотором произвольно выбранном положении. Проведем через них геометрическую плоскость, которая, естественно, будет неограничена. Нанесем на эту плоскость последовательно одинаковые, равноотстоящие параллельные ряды. Чтобы однозначно установить положение этих рядов, передвинем каждый из них, как единое целое, в направлении их длины до тех пор, пока точки, служащие начальными для каждого ряда, не окажутся на одной прямой, более или менее наклоненной к общему направлению рядов. Основополагающим названием с е т к а обозначим совокупность точек, распределенных таким образом в плоскости.

Возьмем вторую сетку такой же формы и величины, как предыдущая, и разместим ее на плоскости, параллельной плоскости первой сетки и отделенной от нее произвольным интервалом. Позаботимся, чтобы все гомологические линии были одинаково направлены в обеих сетках, что можно сделать общим перемещением всех частей начальной сетки параллельно ей самой. Расположим бесконечное количество одинаково повернутых тождественных сеток на бесконечном количестве равноудаленных плоскостей, параллельных двум первым. Сдвинем каждую сетку в ее плоскости до тех пор, пока все начальные точки для каждой сетки не окажутся на одной прямой, не лежащей в плоскости начальной сетки. Таким образом полученная система точек в нашей работе будет называться с о в о к у п н о с т ь ю. Она неограничена по всем трем измерениям.

На рис. 1 представлен результат только что произведенных действий: $OAA'A''\ldots$ — первый ряд; последовательность точек A, A', A'', ... должна быть мысленно продолжена влево от O; $BPP'\ldots$ образуют второй ряд. Точки B', B'', ... служат начальными для других одинаковых и параллельных рядов. Начальные точки O, B, B', B'', ... рядов находятся на одной прямой. Все ряды равноудалены. Очевидно, что

$$OB = BB' = B'B'',$$

так что $OBB'B''\ldots$ тоже ряд системы, отличающийся от $OAA'A'\ldots$ направлением и в общем случае величиной своего параметра, который, очевидно, равен OB. Вторая сетка, подобная $OAA'A''\ldots BPP'\ldots B'B''\ldots$, имеет началом точку D и лежит, начиная с D, в плоскости, параллельной плоскости OAB. Ее первый ряд — $DQQ'Q''\ldots$, другие ряды начинаются в точках R, R', $R''\ldots$. Эти точки новой плоскости подобны точкам B, B', B'', ... Другие сетки системы начинаются в точках D', $D''\ldots$. Все они находятся на одной прямой вследствие равноудаленности параллельных плоскостей, каждая из которых содержит сетку. Имеем

$$OD = DD' = D'D''\ldots,$$

так что $ODD'D''\ldots$ тоже ряд, отличающийся от $OAA'A''\ldots$, $OBB'B''\ldots$ направлением и величиной параметра.

Полученная совокупность представляет правильное распределение точек, характеризующееся следующими свойствами, достаточно очевидными, чтобы не нуждаться в доказательстве.

Ни одна из точек, составляющих совокупность, не отличается от других точек каким-нибудь свойством, связанным с ее положением. Конфигурация, образованная совокупностью, предполагается бесконечной и не зависящей от выбора произвольно взятой точки. Если, например, эта точка взята в качестве начала произвольной прямоугольной или косоугольной системы координат, то можно найти вокруг каждой точки, взятой последовательно за начало координат, одинаково расположенные точки с одинаковыми координатами, если только новые оси сохраняют направления старых.

Прежде чем идти дальше, остановимся на особом обозначении точек, образующих сетку или совокупность. Их следует отличать от чисто математических точек, которые существуют в любом месте пространства. Соответственно будем называть их *узлами*. Можно приписать этим узлам очень маленькие размеры, соизмеримые с молекулами, и присвоить название узел центрам фигур этих молекул, многогранная форма которых будет, впрочем, оставаться неопределенной.

Предполагаем, что узлы жестко связаны между собой, так что совокупность будет иметь в целом неизменную форму. Все взаимные расстояния остаются неизменными. Однако совокупность может двигаться как твердое тело в пространстве или параллельно самой себе, или, вращаясь во-

круг заданной оси, каждый раз, когда будет необходимо сообщить ей поступательное или вращательное движение.

Если перенести всю систему параллельно самой себе, то (рис. 1) узел A, например, займет место, которое ранее занимал узел B. Любой из узлов будет в новом положении совокупности занимать место в пространстве, покинутое другим узлом в процессе движения. Тогда можно сказать, что место узлов не изменено общим движением, переданным совокупности, или, проще, — имеет место самовосстановление положений узлов.

Поскольку прямые OAA', BPP',. . . и плоскости, объединяющие их, остаются пересеченными в пространстве, то совокупность рис. 1 сохраняет след действий, которые служили ее построению. Но мы можем мысленно уничтожить все прямые и плоскости и искать решение обратной задачи. Этой задачей мы сейчас займемся.

Задача I. Найти ряды, плоскости и сетки, порождающие заданную совокупность.

Для начала возьмем две точки или два узла, такие как O и A (рис. 1), принадлежащие заданной совокупности, и соединим их прямой OA. Если между O и A этой прямой существуют другие узлы a, b, c. . ., принадлежащие системе, то мы будем особо рассматривать наиболее близкий к O узел a, и Oa будет тогда наименьшим точным делителем AO. Стало быть, всегда можно предположить, что между выбранными узлами O и A не существует никаких других промежуточных узлов.

Продолжим OA в обе стороны и примем

$$AA' = OA, \quad A'A'' = AA', \ \ldots .$$

Все точки A', A''. . . будут принадлежать совокупности в силу общего закона, характеризующего правильные распределения. Так определен один из рядов системы. Важно все-таки заметить, что полученный ряд не является обязательно одним из тех, с помощью которых ранее была построена совокупность.

Вне ряда $OAA'A''$. . . возьмем наудачу узел B и проведем OB. Если между O и B существуют другие узлы, то из них мы сохраним только узел, ближайший к O. Следовательно, всегда можно предположить, что между O и B не существует никакой другой точки, принадлежащей совокупности.

Установив это, построим на OA и OB параллелограмм $OAPB$. Узел P будет принадлежать сетке плоскости OAB. Однако внутри этого параллелограмма в общем случае может существовать конечное число узлов m, n,. . . , принадлежащих сетке плоскости. В этом случае надо перенести точку B в тот узел, расстояние до которого от O было бы наименьшим. Назовем его m. Проведем из m отрезок mm', равный и параллельный OB, и замкнем контур параллелограмма $OA\ m'm$. За исключением четырех узлов O, A, m, m' параллелограмм $OAm'm$ не содержит ни внутри, ни на своих сторонах никакой точки общей совокупности.

Чтобы излишне не усложнять рис. 1, снова возьмем параллелограмм $OAPB$ и ограничимся рассмотрением случая, когда точка B удовлетворяет следующим условиям:

1) между O и B не существует никакой точки совокупности;

2) их не существует внутри параллелограмма, построенного на OA и OB.

Мы только что увидели, что существует, по меньшей мере, один узел, удовлетворяющий этим условиям.

Тогда, зная параметры двух рядов OA и OB, мы можем не только найти все узлы, принадлежащие этим рядам, но по пересечениям двух систем параллельных прямых, проведенных из A, A', A''. . . и B, B', B''. . ., мы можем полностью восстановить сетку плоскости OAB. Заметим, что полученная сетка не обязательно та, с помощью которой ранее была образована совокупность.

После получения сначала ряда, потом сетки не будет слишком затруднительным построение системы в целом.

Выберем вне плоскости OAB узел D, подчиняющийся условию, согласно которому не существует промежуточного узла ни между O и D на линии соединения, ни на поверхности параллелограмма $AODQ$, ни на поверхности параллелограмма $BODR$, ни внутри параллелепипеда $OAPSQDRB$, построенного на параметрах OA, OB, OD как на ребрах. Можно убедиться, как мы это делали в случае плоскости для точки B, что эти условия могут быть реализованы.

Существует простой метод прямого получения точки D. Геометрическая плоскость, совпадающая с плоскостью OAB, приводится в движение параллельно самой себе до тех пор, пока в процессе движения она не прикоснется к первому узлу совокупности, принимаемому за искомую точку. Расстояние OD принимается за параметр третьего ряда $ODD'D''$, ...

Решение, которое только что дано для задачи I, доказывает, что ее можно решить очень большим числом способов и нетрудно видеть, что число этих решений бесконечно. В самом деле, в системе параллельных плоскостей $DQSR$ наиболее близка к OAB. Если мы будем рассматривать некоторый узел, например S, принадлежащий сетке, совпадающей с этой плоскостью, то очевидно, что можно заменить ряд OD новым рядом OS. Мы получим все точки заданной совокупности с помощью пересечений системы параллельных OAB плоскостей с системой параллельных OS прямых, проведенных из каждой точки сетки OAA'. . . BB'. . . .

Аналогично рассмотренному, принимая OS и OA или OS и OB за исходные ряды, можно восстановить совокупность. Плоскость OAS или, соответственно, OBS принимаем за промежуточную сетку, что будет давать нам новые решения задачи. Так как число узлов сетки бесконечно, то число решений этой задачи тоже бесконечно.

Если ряды OA и OB сетки такие, что никакой узел не попадает внутрь параллелограмма, построенного на параметрах OA и OB этих рядов, то

это сопряженные ряды. Если они взяты на оси координат, то это будут сопряженные оси.

Система рядов, параллельных двум сопряженным рядам $OAA'\ldots$ и $OBB'\ldots$, делит сетку на клетки в виде равных между собой параллелограммов. Назовем такие параллелограммы ($OAPB$, рис. 1), ($OAmB$, рис. 2) порождающими, или параллелограммными клетками сетки.

Неограниченное пространство, содержащееся между ближайшими рядами $OAA'A''\ldots$ и BPP' (рис. 1), будет называться полосой. Полоса характеризуется той особенностью, что узлы могут существовать только на прямых, ее ограничивающих, а не внутри самой полосы.

Два параллельных ряда, содержащих между собой полосу, называются смежными. Каждому ряду соответствует два смежных ряда, расположенных по разные стороны от него.

Плоскость, в которой лежит полоса, два параллельных ряда или в общем случае плоскость, содержащая три узла, не лежащих на одной прямой, будет называться ретикулярной. Она несет на своей поверхности всю сетку с узлами.

Если в пространстве параметры трех рядов OA, OB, OC могут служить ребрами параллелепипеда, не содержащего узлов ни на боковых сторонах, ни внутри, то эти три ряда будут называться сопряженными. Если же они взяты за оси координат, то последние будут называться сопряженными осями. Три плоскости, попарно объединяющие эти ряды, будут называться сопряженными ретикулярными плоскостями, или сопряженными плоскостями. Ряд будет сопряжен с ретикулярной плоскостью, если взятые на этой плоскости два взаимно сопряженных ряда будут сопряжены с заданным рядом.

Неограниченное пространство, содержащееся между двумя наиболее близкими параллельными ретикулярными плоскостями, будет называться слоем. Внутри слоя не может содержаться никаких узлов. Две параллельные ретикулярные плоскости, ограничивающие слой, называются смежными. Каждой ретикулярной плоскости соответствуют две смежные параллельные ей плоскости, лежащие по разные стороны от нее.

Три системы ретикулярных плоскостей, параллельные трем сопряженным плоскостям AOB, AOD, BOD (рис. 1), делят пространство на равные и совместимые параллелепипедоидальные ячейки. Таким образом, построенный на трех параметрах параллелепипед будем называть порождающим параллелепипедом, или ядром совокупности.

Укладка таких параллелепипедов по целым граням воспроизведет все узлы совокупности.

Установленная терминология позволяет сформулировать основные свойства, которыми обладает некоторая совокупность.

Узлы совокупности расположены на системе параллельных равноотстоящих плоскостей и образуют на каждой из них сетку, конфигурация которой одинакова для всех плоскостей.

В каждой из этих сеток узлы образуют систему параллельных, равноотстоящих и совместимых рядов.

В каждом ряду соседние узлы удалены друг от друга на одинаковые расстояния.

Можно всегда воспроизвести заданные узлы сетки взаимным пересечением двух различных систем параллельных равноотстоящих прямых, делящих плоскость на параллелограммные клетки, не оставляющие между собой никакого пустого пространства.

Всегда можно воспроизвести узлы совокупности взаимным пересечением трех различных систем параллельных плоскостей, равноотстоящих в каждой системе. Пространство делится тогда на параллелепипедоидальные, совместимые, равные между собой ячейки, не оставляющие между собой никакого пустого пространства.

Рассчленение плоскости или пространства на равные параллелограммы или параллелепипеды, вершины которых совпадают с узлами совокупности, может быть произведено бесконечным числом различных способов.

§ II. О сетках вообще

Обозначения, определения. Рассмотрим сетку (рис. 2). Узел O будет взят за начало координат.

Пусть $OAA'\ldots$, $OBB'\ldots$ — два ряда, служащие построению сетки. Обозначим через a и b два их параметра, так что

$$OA = a, \quad OB = b. \tag{1}$$

Пусть ξ и η — линейные координаты точек плоскости, отнесенные к косым осям OA, OB. Для произвольного узла P отношения $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$ будут положительными или отрицательными целыми числами, которые мы будем называть его ц е л о ч и с л е н н ы м и к о о р д и н а т а м и. Они будут обозначаться буквами m и n, если P — определенный узел сетки, и x и y, если — неопределенный. Следуя принятым обозначениям, будем иметь

$$\frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n, \tag{2}$$

$$\frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y. \tag{3}$$

Общее уравнение сетки, рассматриваемой как плоская кривая с разделенными ветвями, исчезающими в каждом узле сетки, аналитически запишется в следующем виде:

$$\sin^2 \frac{\xi}{a}\pi + \sin^2 \frac{\eta}{b}\pi = 0,$$

где $\pi=3.14159\ldots$ Это уравнение справедливо для любого узла и теряет свою силу для остальных точек плоскости.

Задача II. Найти уравнение ряда, проходящего через начало координат и узел P (рис. 2).

Пусть m и n — целочисленные координаты P. Уравнение OP в линейных координатах будет иметь вид:

$$\frac{\xi}{ma}=\frac{\eta}{nb}.$$

Пусть x, y — целочисленные координаты некоторого узла, принадлежащего ряду OP. Тогда

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n} \tag{4}$$

— уравнение ряда OP в целочисленных координатах.

Если m и n имеют наибольший общий делитель D, то точка $\frac{m}{D}$, $\frac{n}{D}$ будет принадлежать ряду OP и будет наиболее близкой к узлу O из всех узлов этого ряда. Если m и n взаимно простые, то OP — параметр ряда. Можно представить уравнение (4) в виде

$$nx-my=0. \tag{5}$$

Если предположить, что

$$\frac{n}{D}=g, \quad \frac{m}{D}=-h, \tag{6}$$

где g и h — положительные или отрицательные взаимно простые целые числа, то уравнение приобретет следующий вид:

$$gx+hy=0. \tag{7}$$

Теорема I. Если m, M (рис. 3) — два узла сетки и если из третьего узла O проведен отрезок On, равный и параллельный mM, то конец этого отрезка будет четвертым узлом сетки.

Перенесем начало координат последовательно в m и в O, не меняя направления осей. Обозначим через ξ и η координаты M по отношению к осям, исходящим из точки m. Из общих свойств сеток и совокупностей (стр. 42) следует, что в этой системе координат будет существовать узел с теми же координатами, что и в системе с осями, исходящими из точки O. Пусть n — этот узел. Таким образом, отрезок On равен и параллелен mM.

Следствие. Если продолжить Mn на длину $m\mu=mM$ (рис. 3), то μ будет одним из узлов сетки. Следовательно, узел m есть геометрический центр сетки, что справедливо для всех других узлов.

Задача III. Найти общее уравнение ряда, параллельного ряду OP (рис. 2).

Из узла с целочисленными координатами m', n' проведем линию, параллельную OP. Ее уравнение в линейных координатах запишется в следующем виде:

$$\frac{\xi - m'a}{ma} = \frac{\eta - n'b}{nb}.$$

Если сократить на a левую часть равенства и на b правую, то будем иметь

$$\frac{x - m'}{m} = \frac{y - n'}{n}$$

или, учитывая уравнение (6),

$$g(x - m') + h(y - n') = 0.$$

Можно было вывести это уравнение непосредственно из уравнения (7) заменой y и x на $y—n'$ и $x—m'$. Таким образом,

$$gx + hy = gm' + hn',$$

или

$$gx + hy = C. \qquad (8)$$

Обозначим левый член через C (обязательно целое число). Это наиболее общее уравнение, описывающее любую систему рядов, параллельных OP.

Обозначение. Определение. Впредь мы будем пользоваться символом (gh) для обозначения всякой системы рядов, параллельных (7). Положительные или отрицательные целые числа g, h будут называться характеристикой этой системы рядов относительно осей x и y.

Задача IV. Найти параметр ряда с символом (gh).

Пусть δ — угол AOB (рис. 2), A — параметр ряда OP, проходящего через начало координат и узел с координатами $\frac{m}{D}$, $\frac{n}{D}$. В силу известной формулы получаем

$$A^2 = \left(\frac{m}{D}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n}{D}\right)^2 b^2 + 2\left(\frac{m}{D}\right)\left(\frac{n}{D}\right) ab \cos\delta.$$

Если подставить характеристики g, n, то

$$A^2 = h^2a^2 + g^2b^2 - 2ghab\cos\delta. \qquad (9)$$

Задача V. Найти число узлов, содержащихся в параллелограмме, построенном на параметрах OA, OP или OB, OP (рис. 2).

Предположим, что целочисленные координаты m и n точки P — положительны. Число рядов $Bm\ldots$, $B'rn\ldots$, $B''p\ldots$, параллельных оси x и пересекающих параллелограмм $OAPQ$, равно $n—1$. Отрезок, заключенный между OP и AQ и равный параметру OA, должен содержать узел, расположенный внутри параллелограмма $AOPQ$, потому что он не может попасть ни на OP, ни на AQ. Следовательно, число узлов, со-

держащихся в этом параллелограмме, будет равно $n-1$. Аналогично этому доказывается, что для параллелограмма $OBRP$ число внутренних узлов равно $m-1$. Если m и n — отрицательны, то их можно сделать положительными подходящей перестановкой положительных и отрицательных полуосей.

Задача VI. Найти уравнение рядов, смежных OP.

Общее уравнение рядов, параллельных OP, имеет вид:

$$gx + hy = gm' + hn',$$

где g и h — заданные взаимно простые числа; m', n' — произвольно выбранные числа.

Из теории непрерывных дробей известно, что m', n' всегда можно подобрать так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$gm' + hn' = +1$$

или

$$gm' + hn' = -1.$$

Уравнение (8) перейдет тогда в уравнение

$$gx + hy = \pm 1, \tag{10}$$

определяющее два ряда $pp' \ldots$, $rr' \ldots$, смежные OP. Очевидно, что в сетке не существует других рядов, более близких к началу координат O.

Второе решение. Пусть m, n, p, q (рис. 2) — узлы, расположенные внутри параллелограмма $OAQP$. Любые два из них не могут быть на одинаковом расстоянии от OP, ибо если, например, m и β находятся на одинаковом от OP расстоянии, то mp был бы параллелен OP и ряд, параллельный OP, имел бы параметр, меньший, чем OP, что невозможно. Следовательно, если провести линии pp', mm', qq', nn', то они образуют начало последовательности рядов, параллельных OP. Итак, эти линии являются равноотстоящими. Число узлов, содержащихся между OP и AQ, равно $n-1$ (задача V). Число полос, содержащихся между этими двумя прямыми, равно n. Следовательно, OA будет разделен на n равных отрезков и

$$Op' = \frac{OA}{n} = \frac{a}{n}. \tag{11}$$

Если продолжить ряд pp' до встречи с отрицательной полуосью y в точке p'', то можно с помощью построенного на OP и OR параллелограмма доказать тем же методом, что

$$Op'' = -\frac{b}{m}. \tag{12}$$

Однако уравнение pp' в линейных координатах имеет вид:

$$\frac{\xi}{Op'} + \frac{\eta}{Op''} = 1.$$

Если заменить ξ, η их значениями из уравнения (2), а Op' и Op'' — их значениями из уравнений (11) и (12), то получим

$$nx - my = +1.$$

По другую сторону от OP в параллелограмме $OBRP$ существует смежный ряд rr', образующий с OP полосу той же ширины, что и полоса между pp' и OP. Его уравнение, очевидно, имеет вид:

$$nx - my = -1.$$

Следовательно, оба смежных ряда могут быть записаны одним уравнением:

$$nx - my = \pm 1.$$

Если заменить m и n характеристиками g, h ряда OP, учитывая, что m и n — взаимно простые, так как OP есть параметр, то это приводит к следующему уравнению:

$$gx + hy = \pm 1.$$

Задача VII. Найти число полос системы, которые содержатся между узлами с координатами M, N и M', N' в системе рядов с символическим обозначением (gh).

Представим себе, что ряд pp' (рис. 2), смежный OP, получает единицу в качестве порядкового номера, следующий за ним ряд получает номер два и т. д. Рядам, расположенным по другую сторону OP, присваиваются номера: -1, -2, -3, ... Ряд № 1 будет иметь уравнение $gx+hy=1$. Вдвое более удаленный от начала координат ряд № 2 имеет уравнение $gx+hy=2$. Ряд с порядковым номером C будет иметь уравнение $gx+hy=C$. Откуда видно, что в уравнении (8) правый член есть точный порядковый номер рассматриваемого ряда.

Пусть C и C' — порядковые номера рядов, проходящих, соответственно, через узлы (M, N), (M', N'). Будем иметь

$$C = gM + hN,$$
$$C' = gM' + hN',$$
$$C - C' = g(M - M') + h(N - N'). \qquad (13)$$

Следовательно, число полос, расположенных между двумя заданными узлами, будет равно

$$g(M - M') + h(N - N').$$

Следствие. В параллелограмме, построенном на параметрах OP и OP' (рис. 2), обозначим (m, n), (m', n') координаты узлов P и P'. Тогда число полос между противоположными сторонами будет равно $mn' - nm'$.

Задача VIII. Найти условие сопряженности двух рядов.

Пусть m, n — целочисленные координаты узла P (рис. 2); m', n' — такие же координаты другого узла p. Предполагаем m, n и m', n' взаимно простыми и ищем условие сопряженности рядов OP и Op.

Узел p должен принадлежать одному из двух рядов, смежных OP. В противном случае ряды, параллельные OP и Op, пересекутся в точках, которые не все будут узлами сетки, и ряды OP и Op не будут сопряжены. Следовательно, подстановка значения $x=m'$, $y=n'$ в уравнение (10) должна его удовлетворять, что дает нам следующее условие:

$$gm'+hn'=\pm 1. \tag{14}$$

Если g и h заменить их значениями из уравнения (6), учитывая, что $D=1$, то это условие перейдет в

$$nm'-mn'=\pm 1. \tag{15}$$

Напротив, если это условие удовлетворяется, то узел (m', n') будет принадлежать одному из рядов, смежных OP, и линия, соединяющая его с началом координат, будет образовывать ряд, сопряженный OP.

Если заменить m, n характеристиками g, h ряда OP, а m', n' характеристиками g', h' ряда Op, то будем иметь

$$hg'-gh'=\pm 1. \tag{16}$$

Это — условие сопряженности рядов, обозначенных символами (gh) и $(g'h')$ и воспроизводящих во взаимном пересечении узлы сетки.

Задача IX. Найти условие принадлежности трех узлов (m, n), (m', n') (m'', n'') смежным рядам.

Перенесем начало координат в узел (m'', n''). Целочисленные координаты двух других узлов тогда будут $(m-m'', n-n'')$, $(m'-m'', n'-n'')$. Чтобы ряды, исходящие из нового начала координат через два заданных узла, были сопряжены, необходимо выполнение следующего условия:

$$(n-n'')(m'-m'')-(m-m'')(n'-n'')=\pm 1.$$

После приведения это условие приобретает вид:

$$nm'-n'm+n''m-nm''+n'm''-m'n''=\pm 1.$$

Задача X. Сменить систему координат и найти новые координаты как функции старых и наоборот.

Пусть (m, n), (m', n') — целочисленные координаты двух узлов P и P' (рис. 3); m и n, а также m' и n' — взаимно простые. Пусть OP, OP' — новые координатные оси, а X и Y — целочисленные координаты узла M в новой системе.

Если провести Mm параллельно OP' до встречи с OPm и Mn параллельно OP до встречи с OP', то получим

$$Om=Mn=X\cdot OP,\quad On=Mm=Y\cdot OP'.$$

Целочисленные координаты точки m в старой системе AO, OB сопряженных осей будут mX, nY. Для точки n, соответственно, — $m'Y$, $n'Y$.

Чтобы получить координаты x, y точки M в старой системе координат, заметим, что при переходе от m к M целочисленные абсцисса и ордината

претерпевают такое же изменение, как при переходе от O к n, ибо On равен и параллелен Mm. Следовательно,

$$x = mX + m'Y, \quad y = nX + n'Y. \tag{17}$$

Решив эти уравнения относительно X и Y, получим

$$\begin{aligned} X &= \frac{n'}{n'm - m'n} x + \frac{m'}{m'n - n'm} y, \\ Y &= \frac{n}{nm' - n'm} x + \frac{m}{mn' - nm'} y. \end{aligned} \tag{18}$$

Если ряды OP, OP' сопряжены, то уравнения приобретают вид:

$$\pm X = n'x - m'y, \quad \pm Y = -nx + my. \tag{19}$$

Оси X и Y будем поворачивать вокруг O до тех пор, пока не совпадут положительные полуоси X и x. Если положительные полуоси Y и y расположатся по одну сторону по отношению к совпадающим осям, то перед левыми членами уравнения (19) должен стоять знак плюс. В противоположном случае должен стоять минус.

Следствие. Предположим, что только ось y заменяется сопряженным к x рядом OP, а ось x остается неподвижной. Пусть m_0 — целочисленная абсцисса точки P. При этом изменении осей

$$m = 1, \qquad n = 0,$$
$$m' = m_0, \quad n' = 1.$$

Отсюда выводим

$$x = X + m_0 Y, \quad y = Y$$

и, наоборот,

$$Y = y, \quad X = x - m_0 y.$$

Целочисленная координата, параллельная перемещенной оси, остается неизменной.

Задача XI. Найти символ (gh) заданного ряда в новой системе осей.

Пусть (m, n), (m', n') — всегда целочисленные координаты концов новых осей. Если в уравнение $gx+hy=C$ подставить значения x, y, взятые из уравнения (17), то будем иметь

$$(gm + hn) X + (gm' + hn') Y = C.$$

Отсюда видно, что если обозначить новый символ через (GH), то от (gh) к (GH) можно перейти посредством формул

$$G = gm + hn, \quad H = gm' + hn'. \tag{20}$$

Следствие. Если, оставляя неизменной ось x, ограничиться заменой положительной оси y рядом, идущим из начала координат в узел $(-1, -1)$,

т. е. рядом, который является продолжением в противоположную сторону диагонали параллелограмма, построенного на a и b, то будем иметь

$$m=1, \qquad n=0,$$
$$m'=-1, \quad n'=-1.$$

При этом символ (g, h) переходит в $(g, -g-h)$.

Если обозначить через i характеристику ряда (gh) относительно новой оси, то получим уравнение $i=-g-h$.

Пусть c — параметр новой оси. Отрезок этой оси, заключенный между началом координат и рядом $gx+hy=1$, который в новой системе записывается в виде $gx+iY=1$, будет, очевидно, равен $\frac{c}{i}$.

Отсюда видно, что когда параметры a, b, c трех сопряженных рядов образуют три силы, находящиеся в равновесии на плоскости сетки, то всякий ряд, смежный ряду, проходящему через начало координат, отсечет на параметрах этих рядов три отрезка $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{c}{i}$; g, h, i — будут положительными или отрицательными целыми числами, подчиненными соотношению

$$g+h+i=0. \tag{21}$$

В качестве символа ряда можно взять одно из обозначений (gh), (gi), (ih).

Обозначение из трех характеристик. Когда мы будем определять положение рядов сетки с помощью трех координатных осей, удовлетворяющих условиям, которые мы только что указали, символ (gh) можно будет заменить символом из трех характеристик (ghi). В этой системе характеристик формула (9) примет следующий вид. Пусть (рис. 5)

$$OA=a, \; Oc=b, \; OE=c, \; AOC=\delta.$$

Тогда будем иметь $c^2=a^2+b^2+2ab\cos\delta$. Подставив в уравнение (9) значение $2ab\cos\delta$, полученное из этой формулы, и заметив, что

$$h^2+gh=-hi, \quad g^2+gh=-gi,$$

для квадрата параметра ряда (ghi) получим

$$A^2=-hia^2-gib^2-ghc^2=-ghi\left(\frac{a^2}{g}+\frac{b^2}{h}+\frac{c^2}{i}\right). \tag{22}$$

Теорема II. Если ряд OP (рис. 3) содержится в угле AOB, образованном двумя сопряженными рядами OA и OB, то все ряды, сопряженные с OP, будут содержаться в том же угловом пространстве AOB.

Возьмем OA за положительную полуось x, OB — за положительную полуось y, и пусть m, n — положительные, больше нуля, координаты узла P.

Предположим теперь, что Op — ряд, сопряженный с OP, и пусть

$$m'=m_0, \quad n'=-n_0$$

— целочисленные координаты узла p, m_0 и n_0 — положительные целые числа. Общее условие, представленное уравнением (15), перейдет в следующее:

$$nm_0 + mn_0 = \pm 1.$$

Однако его невозможно удовлетворить значениями m, n, m_0, n_0, строго большими нуля. Следовательно, ряд Op не может быть сопряжен с OP и т. д.

В силу тех же рассуждений ряд, такой как Oq (тот же рис.), не может быть сопряжен с рядом OP и т. д.

Теорема III. Площадь порождающего параллелограмма сетки постоянна и не зависит от способа его построения.

Первое доказательство. Площадь порождающего параллелограмма сетки в дальнейшем будем обозначать через ω. Пусть $OAmB$ (рис. 2) — такой параллелограмм. Ряды OP и Op сопряжены. Построим на OP и Op параллелограмм $OPp\omega$, который будет клеткой нашей сетки, выведенной из системы рядов. Утверждаем, что

$$\text{площадь } OP\omega p = \text{площади } OAmB = \omega.$$

В самом деле, параллелограмм $OP\omega p$ имеет то же основание, что и $OAQP$, но их высота разная. И (уравнение 11)

$$OP\omega p : OAQP :: Op' : OA :: 1 : n,$$

где n — целочисленная ордината узла P.

Но, с другой стороны,

$$OAmB : OAQP :: OB : OB^{IV} :: 1 : n.$$

Следовательно,

$$\text{площадь } OP\omega p = \text{площади } OAmB = \omega.$$

Второе доказательство. Пусть (m, n), (m', n') — целочисленные координаты P, p. В аналитической геометрии доказывается, что треугольник, вершины которого лежат в точках с координатами (ξ, η), (ξ', η'), имеет площадь, значение которой вычисляется из выражения $1\ (\eta\xi' - \xi\eta')$ в прямоугольной системе координат. Если же угол между осями равен δ, то — из выражения — $\frac{1}{2}(h\xi' - \xi h') \sin \delta$.

Наконец, задавая угол $AOB = \delta$, будем иметь

$$\text{площадь треугольника } OpP = \frac{1}{2} \sin \delta\,(nbm'a - man'b) =$$
$$= \frac{1}{2} ab \sin \delta\,(nm' - mn').$$

Следовательно, в силу уравнения (15)

$$\text{площадь треугольника } OpP = \frac{1}{2} ab \sin \delta,$$

откуда

$$\text{площадь } OP\omega p = AB \sin \delta = \text{площади } OAmB = \omega$$

Третье доказательство. Мы условимся называть плотностью сетки число узлов на единицу площади. Значения этой единицы площади предполагаются необычайно большими относительно обоих параметров рассматриваемого ряда.

Исходя из этого, пусть (рис. 3)

$$OP = a', \ Op = b', \ pOP = \delta', \text{ площадь } OP\omega p = \omega'.$$

Будем иметь

$$\omega' = a'b' \sin \delta'.$$

Возьмем на продолженной от O прямой OP длину $\varkappa$, очень большую относительно a', а на продолженной от 0 прямой Op — длину ν, очень большую относительно b', так что площадь параллелограмма, построенного на $\varkappa$ и ν, будет равна единице площади, т. е. $\varkappa\nu \sin \delta' = 1$.

Число узлов, содержащихся в этом параллелограмме, вычисляется как число пушечных ядер в куче с прямоугольным основанием по формуле

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\nu}{b'}.$$

Обозначив это число через ρ, всегда будем иметь его очень большим,

$$\rho = \frac{\varkappa\nu}{a'b'} = \frac{\varkappa\nu \sin \delta'}{a'b' \sin \delta'} = \frac{1}{\omega'},$$

где ρ, являющееся мерой плотности сетки, должно оставаться постоянным, какой бы ни была система сопряженных осей, принятая для ее определения. Отсюда будем иметь

$$\omega' = \omega = ab \sin \delta. \tag{23}$$

Теорема IV. Средний интервал между узлами сетки равен корню квадратному из площади порождающего параллелограмма.

Пуассон * назвал «средним интервалом между молекулами тела» частное от деления стороны куба, равного единице объема тела, на число молекул, содержащихся в этом объеме. Можно применить это определение к случаю плоскости и назвать с р е д н и м и н т е р в а л о м между узлами сетки частное от деления стороны квадрата, равного единице площади, на число содержащихся в нем узлов.

Пусть ε — средний интервал. Обозначив через ρ число узлов в единице площади, будем иметь

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\rho}.$$

Отсюда по предыдущей теореме

$$\varepsilon^2 = \omega, \quad \varepsilon = \sqrt{\omega}, \tag{24}$$

где ω — постоянная площадь порождающего параллелограмма сетки.

* J. l'Ecole Polytechn., 20, p. 5, Mém. l'Acad. Sci., t. XVIII, p. 7.

Задача XII. Найти ширину полосы для системы рядов с символом (gh).

Пусть Δ — неизвестная ширина полосы, A — параметр двух смежных ей рядов. Площадь порождающего параллелограмма будет равна ΔA. Следовательно,

$$\Delta A = \omega. \tag{25}$$

Подставив значения A и ω из уравнений (9) и (20), получим

$$\Delta = \frac{ab \sin \delta}{\sqrt{h^2a^2 + g^2b^2 + 2ghab \cos \delta}},$$

или, проще,

$$\Delta = \frac{\sin \delta}{\sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + 2\frac{gh}{ab} \cos \delta}}. \tag{26}$$

Определение. Всякий треугольник, имеющий в качестве вершин три узла сетки, принадлежащих двум смежным рядам, называется э л е м е н т а р н ы м. Такой треугольник всегда является половиной одного из порождающих параллелограммов сетки. Его можно рассматривать как треугольную клетку сетки.

Треугольник, имеющий основанием наименьший параметр сетки, углы которого при основании острые, а один из них, в виде исключения, может быть прямым, называется о с н о в н ы м э л е м е н т а р н ы м треугольником, или, кратко, о с н о в н ы м треугольником.

Теорема V. Элементарные треугольники имеют постоянную площадь, равную половине площади порождающего параллелограмма. Треугольник, имеющий вершиной точку начала координат и основанием отрезок, соединяющий узлы (m, n) и (m', n'), имеет площадь, равную произведению площади элементарного треугольника на абсолютное значение множителя $mn'—nm'$.

Первая часть теоремы очевидна. Площадь элементарного треугольника имеет своим значением $\frac{1}{2}\omega$.

Пусть теперь P, P' (рис. 2) — узлы с целочисленными координатами (m, n), (m', n'). В силу второго доказательства теоремы III

$$\text{площадь треугольника } OPP' = \frac{1}{2} ab \sin \delta\, (nm' - mn'),$$

однако $ab \sin \delta = \omega$. Следовательно,

$$\text{площадь треугольника } OPP' = \frac{1}{2} \omega\, (nm' - mn'). \tag{27}$$

Если умножить m и n на общий множитель D, то первый и второй члены левой части уравнения станут в D раз больше, что, однако, не приведет к потере уравнением своей силы. Аналогичный результат получим,

если m' и n' будут умножены на D. Следовательно, это уравнение справедливо даже, если m, n или m', n' не являются взаимно простыми.

Задача XIII. Найти основной треугольник сетки.

Выберем произвольно узел O (рис. 4) и определим среди всех остальных узлов ближайший. Пусть A — такой узел. OA будет наименьшим параметром сетки. Через O и A проведем прямые Op и Am, перпендикулярные OA, и найдем в неограниченном пространстве $pOAm$ узел, наиболее близкий к прямой OA. Мы найдем его в точке B на смежном OA ряде. Проведем OB и BA; OAB будет основным треугольником сетки.

Теорема VI. Основной треугольник есть единственный элементарный треугольник, все углы которого острые.

В самом деле, пусть OAB (рис. 5) — основной треугольник. Проведем прямую COF, параллельную BA. Три ряда AOD, BOE, COF попарно сопряжены друг с другом. Следовательно, всякий элементарный треугольник будет содержаться в одном из шести угловых пространств AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA (теорема II). Пусть $O\alpha\beta$ — такой треугольник; ряд $O\gamma$, проведенный через O параллельно $\alpha\beta$, будучи сопряжен $O\alpha$ и $O\beta$, должен содержаться в том же угловом пространстве AOB (теорема II). Если треугольник $O\alpha\beta$ имеет все углы острые, то угловое пространство, охваченное тремя полупрямыми $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, должно быть равным или превосходить 90°. Однако это невозможно, ибо мы только что доказали, что угол $\alpha O\gamma$ необходимо меньше, чем косой или прямой угол AOB. Следовательно, чтобы получить остроугольный треугольник, необходимо совместить $O\alpha$ с OA, $O\beta$ с OB, и в итоге можно получить основной треугольник.

Примечание. Шесть треугольников, образующих шестиугольник $ABCDEF$, равны и совместимы. Они образуют только одно сочетание. Заметим, что эти треугольники двух видов. Первые имеют своим основанием наименьший параметр сетки и могут быть совмещены простым переносом без поворота. Три других расположены в обратном положении и могут быть совмещены друг с другом с помощью поворота на 180° вокруг нормали к плоскости.

Например, DOC будет приводиться в совпадение с DOE полуповоротом в плоскости этих треугольников вокруг центра O' основания OD, общего для обоих треугольников. Полуповорот вокруг O совместит DOC с AOF.

Следствие. Если основной треугольник не имеет ни одного угла, большего 90°, то значение наименьшего угла колеблется между 0 и 60° включительно, среднего угла — между 45 и 90° включительно, наибольшего угла — между 60 и 90° включительно.

Теорема VII. Основной треугольник принадлежит полосе с наибольшей шириной.

В самом деле, из уравнения (25) заключаем, что $\Delta = \frac{\omega}{A}$, где ω — постоянна для всей сетки, т. е. треугольник становится наибольшим, когда параметр наименьший. Следовательно, если за основание основного тре-

угольника взять наименьший параметр и провести параллельную ему прямую через геометрическую вершину треугольника, то полоса, заключенная между этими параллелями, будет наиболее широкой полосой сетки.

Примечание. Это максимальное значение Δ не может быть меньше $a\sqrt{\frac{3}{4}}$, где a обозначает наименьший параметр сетки. В самом деле, из точки O как центра (рис. 4) опишем четверть круга ANP. Из A как центра опишем четверть круга ONM. Вершина B основного треугольника будет содержаться в неограниченном пространстве $pPNMm$. Высота Δ этого треугольника будет наименьшей, когда B будет совпадать с N. Следовательно, обозначив Δ_0 наибольшую ширину полосы, будем иметь

$$\Delta_0 \geqslant a\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Теорема VIII. Основной треугольник содержит три наименьших параметра всей сетки.

Пусть OA (рис. 5) — наименьший параметр и OB — наименьшая из двух оставшихся сторон основного треугольника. Пусть OAB, OBC — два основных треугольника, построенных на OB. Линия Oi, нормальная к OA, пройдет между узлами B и C. Для некоторого узла α, принадлежащего продолжению ряда BC, очевидно, будем иметь $i\alpha > iB$, $i\alpha > iC$. Стало быть, $O\alpha > OB$, $O\alpha > OC$, т. е. $O\alpha > AB$.

Если точка α, принадлежащая ряду, смежному BC, такая, что делит нормаль Oii' на расстоянии $Oi' = 2Oi$, то будем иметь $O\alpha > Oi'$. Однако при этом

$$Oi' = 2Oi = 2AB \times \sin OAB.$$

Более того, на основании следствия теоремы VII OAB будет средним углом:

$$OAB \geqslant 45^\circ, \quad 2\sin OAB \geqslant \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$O\alpha > AB\sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что во всех случаях параметр $O\alpha$ превосходит параметр AB, который, по предположению, является наибольшей стороной основного треугольника.

Примечание. Очевидно, что в виде исключения можно иметь $OB = OA$, а также $OC = OB = OA$. Можно учитывать как исключение, что $O\alpha = OC$, но только в том случае, когда треугольник BOA имеет прямой угол в точке O.

Следствие. Основной треугольник есть треугольник с наименьшим из всех элементарных треугольников сетки периметром.

Теорема IX. Некоторая точка, взятая внутри основного треугольника, будет ближе к одной из вершин этого треугольника, чем к любому другому узлу сетки.

Будем доказывать эту теорему, описывая на OA, OB и BA (рис. 5) как диаметрах полуокружности, внешние к треугольнику BOA. Заметим, что эти три полукруга не могут содержать никакого узла.

§ III. Симметричные сетки

Определения. Всякая прямая, делящая сетку на две симметричные половины, т. е. такие, которые способны совмещаться узлом в узел с помощью полувращения одной из них вокруг этой прямой, будет называться осью симметрии сетки.

Узлы, приводимые в совмещение, будут называться гомологичными по отношению к этой оси симметрии. В дальнейшем будет показано, что эти оси — возможные ряды.

Сетка, обладающая одной или несколькими осями симметрии, будет называться симметричной. Она будет асимметричной в противоположном случае. Если сетка имеет много осей симметрии, то они могут быть одного или разных родов.

Две оси симметрии будут одного рода, если форма сетки вокруг каждой из них одинакова. В первую очередь требуется, чтобы они имели одинаковые параметры. Мысленно соединим узлы сетки с каждой из этих осей, так чтобы представить себе две равные сетки, наложимые узлом в узел. Если одна из этих сеток предполагается подвижной, то для того, чтобы оси были одного рода, необходимо существование такого движения подвижной сетки, которым можно одновременно привести в совпадение подвижные и неподвижные оси, подвижные и неподвижные узлы.

Две оси симметрии будут разных родов, если форма сеток вокруг каждой из них не будет одинаковой.

Теорема X. Всякой оси симметрии, не проходящей ни через один узел сетки, соответствуют другие оси, параллельные ей и проходящие через узлы. Основной треугольник в этом случае прямоугольный.

Пусть GH — такая ось симметрии (рис. 6), A — узел, A' — узел, гомологичный A на линии, нормальной к GH. Соединим A и A' и выберем на ряду AA' два узла, наиболее близких к оси GH, но расположенных по разные стороны от нее. Пусть A, A' удовлетворяют этому условию. Проведем AB, $A'B'$, параллельные GH. Пусть теперь BB' — ряд, смежный AA'. Их параметры равны AA'; точки их пересечения с прямыми AB, $A'B'$ будут узлами сетки. Если узел попадает между B' и B, то он будет иметь расстояние гомологичности меньшее, чем параметр AA', что невозможно. Следовательно, AB, $A'B'$ будут рядами с параметром $AB=A'B'$ и будут сопряжены с AA', BB'. Эти ряды являются, очевидно, осями симметрии. Основной треугольник — $A'AB$ или $A'B'B$ — прямоугольный.

Следствие. Ось GH можно заменить осями симметрии AB, $A'B'$, которые ей параллельны или некоторым рядом, параллельным AB, который тоже будет осью симметрии.

Сетка обладает осью симметрии, параллельной AB. Необходимо заметить, что все ряды, параллельные AB, будут такими осями. После нахождения системы параллельных осей симметрии, проходящих через узлы, можно задать вопрос: существуют ли оси, не проходящие ни через один узел сетки? Назовем их промежуточными осями. Они не вносят никаких новых понятий в изучение сеток, и мы не будем их рассматривать, предполагая, что всякая ось симметрии проходит через узел.

Теорема XI. Всякая ось симметрии, проходящая через узел, является одним из рядов сетки.

Пусть GOH (рис. 7) — ось, проходящая через узел O, и A — другой узел вне этой оси. Точка A имеет ей гомологичную A' в силу симметрии, которую порождает ось GOH. С другой стороны, в силу общей симметрии сетки A' имеет соответствующий ей узел A'' по другую сторону O по отношению к A'. Следовательно, прямая AA'' есть ряд, но она параллельна GOH. Отсюда GOH есть тоже ряд сетки.

Теорема XII. Всякой оси симметрии соответствует перпендикулярная ей другая ось симметрии, пересекающаяся с ней в некотором узле.

Если провести прямую IOK (рис. 7), проходящую через узел O и нормальную к GOH, то она будет перпендикуляром к AA'' в ее середине. Следовательно, всякому узлу A соответствует ему гомологичный A'' по отношению к IOK. Отсюда IOK есть тоже ось симметрии сетки.

Теорема XIII. Всякой оси симметрии соответствует бесконечное число других осей симметрии, ей параллельных и проходящих через все узлы решетки.

Это следствие общих законов правильного распределения узлов любой сетки. Симметрия сетки, следуя определенному направлению, никогда не характеризуется одной единственной осью, ей свойственна система параллельных осей, образующих полную систему взаимно параллельных рядов, охватывающих все узлы сетки.

Теорема XIV. Всякая сетка, обладающая осью симметрии, имеет в качестве основного треугольника прямоугольный или равнобедренный треугольник.

В самом деле, пусть OMm (рис. 8) — ось симметрии, проходящая через два соседних узла O, M. Пусть $O'M'$ — прямая, на которой расположен ряд, смежный OM. Отрезок $O'M'$, заключенный между перпендикулярами OO', MM', должен содержать узлы сетки. Пусть N — этот узел, имеющий себе гомологичным N'. Если $M'N''=O'N=O''N'$, то прямая MN'' будет равна и параллельна ON'. Итак, N'' будет одним из узлов сетки (теорема I). Однако не может существовать два различных узла N, N'' между O' и M'. Необходимо, чтобы имел место один из следующих факторов:

1) или $NN''=O'M'$, когда N падает на O' и N'' на M';

2) или $NN''=O$.

В первом случае основным треугольником будет $O'OM$ или OMM', т. е. прямоугольный треугольник. Во втором случае N совпадает с серединой P отрезка $O'M'$. Треугольник OPM — равнобедренный и более того, если $POM > 45°$, то он является основным треугольником сетки. Если $POM < 45°$, где P' — узел, гомологичный узлу P, то POP' будет основным треугольником (теорема VI) и тоже равнобедренным.

Следствие I. Всякая сетка, основной треугольник которой разносторонний, асимметрична.

Следствие II. Всякая симметричная сетка имеет в качестве порождающего параллелограмма прямоугольник или ромб: прямоугольник $OO'M'M$ (рис. 8), если основным треугольником является $OO'M$; ромб $OPMP'$, если основным треугольником является OPP' или OPM.

Теорема XV (обратная). Если основной треугольник сетки прямоугольный, то сетка обладает двумя осями симметрии, параллельными катетам основного треугольника. Если основной треугольник равнобедренный, то сетка обладает двумя осями симметрии, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна основанию.

Сетка с прямоугольной клеткой имеет в качестве осей стороны прямоугольника. В этом случае существуют промежуточные оси симметрии, параллельные предыдущим и проходящие через центры порождающих прямоугольников. Сетки с клетками в виде ромба имеют осями свои диагонали.

Определение. Центрировать сетку, центрировать клетки сетки значит добавить новые узлы в центре каждого порождающего параллелограмма сетки.

Теорема XVI. Если центрировать сетку с прямоугольными клетками, то образуется сетка с ромбическими клетками. Если центрировать сетку с ромбическими клетками, то сетка перейдет в прямоугольную.

Это утверждение очевидно. Важно заметить, что такая операция не изменяет осей симметрии системы.

Теорема XVII. Сетки с центрированными или нецентрированными ромбами обладают одинаковыми системами рядов. То же имеет место для сеток с центрированными или нецентрированными прямоугольниками.

Пусть $abc\ldots$, $ABC\ldots$ (рис. 9) — ромбическая сетка с клеткой $AaBa'$. Рассмотрим систему рядов, параллельных одной из диагоналей ромба, например AB. Если взять эту диагональ за ось x, то любой ряд, параллельный этой оси, будет характеризоваться целочисленным уравнением $y=n$, где n — некоторое целое число.

Ромбическая сетка переходит в прямоугольную с клеткой $AA'BB'$, если уничтожить все ряды, представленные уравнением $y=2j+1$, где j — некоторое целое число. Это приводит к исчезновению всех узлов с нечетными целочисленными ординатами. Ряд, объединяющий два узла с четными ординатами $2j$ и $2j'$, существует явно как в начальной, так и в раздублированной сетке. Если соединить узел с четной ординатой $2j$ и узел с ординатой $2j+1$ и таким образом полученный ряд продлить за

последний узел на величину, равную интервалу между двумя заданными узлами, то он закончится третьим узлом с ординатой $4j'+2-2j$. Эта ордината будет четной. Ряд будет принадлежать раздублированной сетке, но его параметр в ней будет вдвое больше, чем в начальной сетке. Наконец, если объединить два узла с нечетными ординатами $2j+1$, $2j'+1$, то полученный таким образом ряд, очевидно, не существует в раздублированной сетке, но если провести из узла, служащего началом, ряд, параллельный ему, то он пройдет через узел с ординатой $\pm(2j'-2j)$, который служит началом рядов раздублированной сетки.

Следовательно, раздублирование сетки не уничтожает никакой системы рядов.

Можно доказать, что если в сетке с прямоугольной клеткой $a'AB'A'$ (рис. 10) уничтожить все ряды нечетного порядка в системе рядов, параллельных диагоналям $a'b'$, AB, такие как abc, $a'b'c'd'$, . . ., то сетка с ромбической клеткой $ABB'A'$, происходящая при таком изъятии, будет обладать той же системой рядов, что и начальная сетка. Изменению подвергнутся параметры этих рядов или интервалы, которые их разделяют.

Теорема XVIII. Если основной треугольник сетки является одновременно прямоугольным и равнобедренным, то сетка будет обладать четырьмя системами осей: двумя взаимно перпендикулярными системами одного рода, имеющими параметром стороны порождающего квадрата, и двумя другими взаимно перпендикулярными системами другого рода, имеющими параметром диагонали порождающего квадрата. Они будут пересекать оси предыдущих двух систем под углом 45°.

Это очевидное следствие теоремы XV.

Теорема XIX. Если основной треугольник равносторонний, то сетка будет обладать шестью системами осей: три системы первого рода будут следовать сторонам основного треугольника, три другие взаимно подобные системы, отличные от предыдущих, будут перпендикулярны сторонам основного треугольника.

Это еще одно следствие теоремы XV. На рис. 11 дано расположение осей: сплошные линии соответствуют осям первого рода, пунктирные — второго рода.

Классификация симметричных сеток

В отношении симметрии можно различать четыре класса симметричных сеток.

Первый класс. Сетки с шестью осями симметрии: тремя одного и тремя другого рода. Этот класс допускает только один вид: сетка с клеткой в виде правильного треугольника, имеющая в качестве порождающего параллелограмма ромб с углами 60 и 120° (теорема XIX).

Второй класс. Сетки с четырьмя осями симметрии: двумя одного и двумя другого рода. Этот класс допускает только один вид — сетка с квадратной клеткой.

Третий класс. Сетки с двумя осями симметрии. Этот класс имеет два различных вида: сетка с ромбической клеткой или центрированным прямоугольником и сетка с прямоугольной клеткой или центрированным ромбом (теоремы XV и XVI). Две оси различного рода взаимно перпендикулярны.

Четвертый класс. Асимметричная сетка — клетка параллелограмма с неравными соседними сторонами, углы между которыми отличны от 90°.

Ряды одного рода в симметричных сетках

Определение. Предположим, как на стр. 59, что в заданной сетке существуют две равные сетки, наложенные узлом на узел до полного совпадения. Одна из этих сеток будет рассматриваться как неподвижная, а другая может быть приведена в движение как единое целое переносом или вращением.

Если задан ряд подвижной сетки, совпадающий до всякого перемещения с неподвижным рядом *abc*. . ., и можно надлежащим перемещением подвижной сетки совместить этот ряд с неподвижным рядом *ABC*. . ., то одновременное совпадение двух сеток узлом к узлу дает основание говорить, что ряды *abc*. . ., *ABC*. . . одного рода.

Теорема XX. Два параллельных ряда всегда одного рода.

Ряды всегда можно привести к желаемому совпадению путем подходящего переноса подвижной сетки без ее поворота.

Теорема XXI. Если два ряда имеют один и тот же параметр и на этом параметре, как основании, можно построить два взаимно равных элементарных треугольника, то ряды одного рода.

Простым переносом всегда можно совместить узлы подвижного и неподвижного рядов. Пусть O — общий узел (рис. 12), OA — подвижный ряд с параметром OA, на котором построен элементарный треугольник OAa. Пусть OA' — неподвижный ряд с параметром OA', на котором построен элементарный треугольник $OA'a'$. Приняв $OA=OA'$, можно предположить, что $Oa=Oa'$; ибо если мы имеем $Oa'=aA$, то один из элементарных треугольников может быть построен на противоположной стороне параметра, который служит ему основанием. Отношение $Oa=Oa'$ будет тогда удовлетворяться. Если мы теперь повернем подвижную решетку на угол AOA' вокруг оси вращения, проходящей через O нормально к плоскости сетки, то два элементарных треугольника совпадут и наложение двух сеток будет полным.

Если два элементарных треугольника будут зеркально расположены, например OaA и $Oa'''A'''$, то невозможно достичь совпадения их вращением вокруг нормали к плоскости. Тогда можно повернуть подвижную сетку на 180° вокруг прямой OO', биссектрисы угла AOA'''. Следовательно, и в этом случае два ряда будут одного рода.

Примечание. Биссектриса угла, образованного двумя рядами с равными зеркально расположенными элементарными треугольниками, является осью симметрии сетки.

Определение. Ряды OA, OA' (рис. 12), элементарные треугольники которых могут быть приведены в совпадение вращением вокруг нормали, проходящей через точку O, будут называться прямо сходными.

Ряды OA, OA''', элементарные треугольники которых будут зеркально расположенными, называются обратно сходными.

Если два треугольника, построенные на параметре, как основании, равнобедренные, то ряды одновременно прямо и обратно сходны.

Теорема XXII. Два ряда, гомологичные по отношению к одной из осей симметрии сетки, одного рода и обратно сходны.

Обратное подобие есть следствие симметрии.

Теорема XXIII. Если существует два или несколько прямо сходных рядов одного рода, начинающихся из одного узла, то полная система этих рядов делит на равные части окружающее этот узел пространство.

Среди рядов, прямо сходных OA (рис. 12), рассмотрим ряд, образующий с OA наименьший угол. Пусть OA' — этот ряд. Подвижную сетку будем поворачивать вокруг нормали, проходящей через O, до тех пор, пока подвижный ряд OA не совпадет с неподвижным OA'. В процессе движения подвижный ряд OA' наложится на OA'', который должен быть одним из рядов неподвижной сетки, и в результате получим $A'OA''= =AOA'$.

Поворот на тот же угол и с теми же рассуждениями, что и ранее, приведет подвижный ряд OA к совмещению с OA'''. Аналогично этому OA совпадет с $O\alpha$ — продолжением OA, после общего поворота на 180°. Все ряды OA, OA', OA'', . . ., полученные таким образом, будут прямо сходны. Если обозначить через q число этих рядов, то будем иметь

$$AOA' = \frac{180^\circ}{q}.$$

Теорема XXIV. Общее число прямо сходных рядов одного рода в сетке не может быть больше трех.

Пусть q — общее число прямо сходных рядов, O (рис. 13) — их общий узел и OM — наименьший параметр сетки. Повернем OM вокруг O на угол $\frac{180^\circ}{q}$. Известно (по предыдущей теореме), что в результате этого движения подвижная сетка совместится с неподвижной. Пусть $MOM'= =\frac{180^\circ}{q}$; M' будет одним из узлов сетки. Опишем круг радиусом OM с центром в O и проведем дугу $M''M'$=дуге $M'M$, дугу $M'''M''$=дуге $M''M'$ и т. д. Точки M, M', M'' будут принадлежать сетке, а хорды MM', $M'M''$ будут сторонами правильного вписанного многоугольника с числом сторон, равным $2q$. Этот многоугольник может быть только квадратом или шестиугольником. В самом деле, достроим ромб $MM'M''m$. Очевидно,

что угол $M'Mm$=углу $M'OM$. Таким образом, треугольники $M'OM$, $M'Mm$ будут равнобедренными и подобными. Получаем $M'm = \frac{\overline{M'M''}}{OM}$. Иными словами, если $M'M < OM$, то тем более $M'm < OM$; m — будет узлом сетки, но OM не будет более наименьшим параметром сетки. Следовательно, для всех правильных вписанных многоугольников с числом сторон больше шести длина стороны меньше радиуса. Следовательно, многоугольник $MM'M''$. . . может быть только квадратом или шестиугольником и q=2, 3. Если q=2, то сетка будет иметь квадратную клетку; если q=3, то сетка будет иметь клетку в виде правильного треугольника.

Следствие. Угол, образованный двумя прямо сходными рядами, может быть равен только 60 или 90°.

Теорема XXV. Прямо сходные ряды одного рода можно встретить только в сетке с квадратной клеткой или клеткой в виде правильного треугольника.

Эта теорема выводится из предыдущего следствия. Обратные теоремы приводим без доказательства.

Теорема XXVI. Во всякой сетке с квадратной клеткой при повороте ее вокруг одного из узлов с каждой четвертью поворота узлы совпадают, и любой системе рядов соответствует другая система прямо сходных рядов того же рода, перпендикулярных к ней.

Теорема XXVII. Во всякой сетке с клеткой в виде правильного треугольника, вращающейся вокруг одного из узлов, узлы самосовпадают через каждую шестую часть поворота, а всей системе рядов соответствуют две другие системы прямо сходных рядов одного рода, наклоненные к заданной системе под углом 60°.

Определение. Если сетка, вращаясь вокруг прямой, нормальной к ее плоскости, самосовмещается после каждой четвертой части полного поворота, то эта прямая будет называться ч е т в е р н о й о с ь ю с и м м е т р и и сетки. Если самосовмещение происходит через каждую шестую часть полного поворота, то мы будем говорить о ш е с т е р н о й о с и с и м м е т р и и сетки. Эти оси, если они существуют, образуют системы параллельных прямых, проходящих через каждый узел. Четверная ось симметрии характеризует сетку с квадратной клеткой, шестерная ось симметрии — сетку с клеткой в виде правильного треугольника. Рис. 14, 15, 16 представляют расположение рядов одного рода (либо прямо, либо обратно сходных) вокруг одного и того же узла O для этих различных видов сетки. Сплошные линии — оси симметрии: различная длина линий указывает на различие их родов. Пунктирные линии — ряды, порядок которых тот же, что и ряда с заданным параметром. На рис. 14 представлена сетка первого класса с клеткой в виде правильного треугольника, на рис. 15 — сетка второго класса с квадратной клеткой, на рис. 16 — сетка третьего класса с ромбической или прямоугольной клеткой.

Теорема XXVIII. Ряды одного рода с различными направлениями не могут существовать в асимметричной сетке.

Это очевидно как для обратно сходных, так и для прямо сходных рядов (следствие теоремы XXI и теорема XXV).

Теорема XXIX. Две оси симметрии одного рода являются для сетки рядами тоже одного рода.

Эти оси являются рядами сетки (теоремы X и XI), и так как совпадение двух таких осей влечет за собой аналогичное совпадение подвижной и неподвижной сеток, то это ряды одного рода (определение стр. 59).

Определение. В сетке углы одного рода можно определить как два равных угла, заключенных между двумя рядами попарно одного рода.

§ IV. Совокупности в целом

Рассмотрим совокупность рис. 1, построенную с помощью трех рядов $OAA'A''\ldots$, $OBB'B''\ldots$, $ODD'D''\ldots$, где узел O принят за начало координат. Обозначим через a, b, d параметры этих рядов, а именно:

$$OA = a, OB = b, OD = d; \tag{28}$$

ξ, η, ζ — линейные координаты точек пространства, образованного косыми осями OA, OB, OD; m, n, p — целочисленные координаты определенных узлов; x, y, z — целочисленные координаты (переменные) неопределенных узлов. Таким образом,[1]

$$\frac{\xi}{a} = m, \quad \frac{\eta}{b} = n, \quad \frac{\zeta}{d} = p, \tag{29}$$

$$\frac{\xi}{a} = x, \quad \frac{\eta}{b} = y, \quad \frac{\zeta}{d} = z. \tag{30}$$

Заметим, что целая совокупность может быть рассмотрена как поверхность, состоящая из различных замкнутых поверхностей, каждая из которых исчезает в одном из узлов совокупности.

Уравнение этой поверхности может быть записано в виде:

$$\sin^2 \frac{\xi}{a} \pi + \sin^2 \frac{\eta}{b} \pi + \sin^2 \frac{\zeta}{d} \pi = 0.$$

Задача XIV. Найти уравнение ряда, проходящего через начало координат и заданный узел T (рис. 20).

Пусть m, n, p — целочисленные координаты T. Уравнение OT в линейных переменных координатах будет иметь вид

$$\frac{\xi}{ma} = \frac{\eta}{nb} = \frac{\zeta}{pd}.$$

В целочисленных координатах

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}. \tag{31}$$

Если m, n, p имеют наибольший общий делитель D, то узел $\left(\frac{m}{D}, \frac{n}{D}, \frac{p}{D}\right)$ будет принадлежать ряду OT и среди всех узлов ряда будет наиболее близким к узлу O. Если m, n, p — взаимно простые, то OT — параметр ряда. Впредь будем считать, что узлы, которые мы будем соединять прямой с началом координат, удовлетворяют этому условию, т. е. три их целочисленные координаты взаимно простые.

Обозначение. Ряд, соединяющий начало координат с узлом (m, n, p), где m, n, p — взаимно простые числа, будем в дальнейшем обозначать символом mnp.

Теорема XXX. Пусть T, T' — два узла совокупности (рис. 20); если из третьего узла O провести отрезок Ot', равный и параллельный TT', то конец этого отрезка будет четвертым узлом совокупности.

Эта теорема доказывается так же, как теорема I.

Задача XV. Найти общее уравнение рядов, параллельных ряду OT (рис. 20), с символом mnp.

Пусть m', n', p' — координаты второго узла T', взятого произвольно. Ряд, проведенный из этого узла параллельно OT, будет иметь следующее уравнение в целочисленных координатах:

$$\frac{x-m'}{m}=\frac{y-n'}{n}=\frac{z-p'}{p}. \tag{32}$$

Задача XVI. Найти параметр ряда OT и рядов, ему параллельных (рис. 20).

Пусть α, β, δ — углы, образованные между собой тремя положительными полуосями на плоскостях yz, xz, xy, соответственно. Обозначим через P_{mnp} параметр ряда OT, идущего из начала координат в узел (m, n, p). Для квадрата этого параметра по известной формуле будем иметь

$$P^2_{mnp}=m^2a^2+n^2b^2+p^2d^2+2mnab\cos\delta+2mpad\cos\beta+2npbd\cos\alpha. \tag{33}$$

В этой формуле a можно заменить на P_{100}, b — на P_{010}, d — на P_{001}.

Задача XVII. Найти уравнение ретикулярной плоскости, проходящей через начало координат и узлы T и T' (рис. 20).

Формулы аналитической геометрии дают нам

$$\xi(nbpd'-pdn'b)+\eta(pdm'a-map'd)+\zeta(man'b-nbm'a)=0.$$

Разделив это выражение на abd, получим

$$x(np'-pn')+y(pm'-mp')+z(mn'-nm')=0. \tag{34}$$

Пусть теперь D — наибольший общий делитель двучленов $np' - pn'$, $pm' - mp'$, $mn' - nm'$.

Обозначив

$$\frac{np'-pn'}{D}=g,\quad \frac{pm'-mp'}{D}=h,\quad \frac{mn'-nm'}{D}=k; \tag{35}$$

получим

$$gx+hy+kz=0. \tag{36}$$

Определение, обозначение. Символ (ghk) будет обозначать множество ретикулярных плоскостей, параллельных плоскости OTT'. Положительные или отрицательные целые числа g, h, k будут характеристиками этой системы ретикулярных плоскостей в системе осей x, y, z. В случае, если этот символ будет приводить к неоднозначности, он будет заменяться символом (g, h, k). Если одна из этих характеристик будет отрицательна, например $-k$, то знак минус мы будем ставить над соответствующей характеристикой (g, h, $\bar{k}$). В этих обозначениях плоскость xy будет обозначаться символом (001), плоскость xz — символом (010), плоскость yz — (100).

Теорема XXXI. След некоторой ретикулярной плоскости, такой как OTT' (рис. 20), проходящей через начало координат на одной из трех координатных плоскостей, есть ряд, общий для сеток этих двух плоскостей.

Этот след на плоскости xy можно представить в виде

$$z=0,\quad gx+hy=0.$$

Второе из этих уравнений удовлетворяется значениями $x=g$, $y=-h$. Следовательно, этот след есть ряд. Если g, h — не взаимно простые, то существуют другие узлы между началом координат и точками $x=h$, $y=-g$. Пусть D — наибольший общий делитель g, h. След плоскости (ghk) на плоскости xy будет рядом с символом $\left(\frac{g}{D}\,\frac{h}{D}\right)$.

Следствие I. Пересечение двух произвольных ретикулярных плоскостей будет рядом, общим для сеток двух этих плоскостей, если только он содержит узел. Тогда за плоскость xy (задача I) всегда можно взять одну из плоскостей и общий узел взять за начало координат.

Следствие II. Если это пересечение не проходит ни через один из узлов совокупности, то оно проходит, по крайней мере, параллельно некоторой системе рядов.

Чтобы получить это утверждение, через произвольно выбранный узел проводятся две ретикулярные плоскости, параллельные заданной; их пересечение определяет один из рядов этой системы.

Задача XVIII. Найти общее уравнение ретикулярной плоскости, параллельной OTT' (рис. 20), символ которой (ghk).

Через узел (m'', n'', p'') проведем плоскость, параллельную OTT'; ее уравнение

$$gx + hy + kz = gm'' + hn'' + kp'',$$

или, обозначив правый член через C,

$$gx + hy + kz = C. \tag{37}$$

где C — обязательно целое число. Это самое общее уравнение, включающее все системы ретикулярных плоскостей, параллельные OTT'.

Задача XIX. Найти уравнение ретикулярных плоскостей, смежных с OTT' (рис. 20).

Из теории непрерывных дробей известно, что если g, h, k не имеют общих делителей, кроме единицы, то всегда можно записать двойное уравнение

$$gx + hy + kz = \pm 1 \tag{38}$$

для целых значений x, y, z. Две ретикулярные плоскости, заданные этими уравнениями, смежны плоскости OTT', ибо для другой плоскости, уравнение которой $gx+hy+kz=C$, пересечение с осями x, y, z имеет место на большем от начала координат расстоянии, чем для плоскостей, заданных уравнением (38). Это утверждение можно доказать без обращения к теории непрерывных дробей.

Задача XX. Найти количество слоев, содержащихся между узлами с координатами MNP и $M'N'P'$ в системе ретикулярных плоскостей с символическим обозначением (ghk).

Представим себе, что ретикулярная плоскость $gx+hy+kz=1$ в качестве порядкового номера получает единицу, следующая плоскость получает номер два и т. д. Плоскость $gx+hy+kz=C$ будет иметь порядковый номер C. Пусть теперь C и C' — порядковые номера ретикулярных плоскостей, проходящих через узлы (M, N, P), (M', N', P'). Будем иметь

$$C = gM + hN + kP, \quad C' = gM' + hN' + kP'.$$

Следовательно, число слоев, содержащихся между ними, будет равно

$$g(M - M') + h(N - N') + k(P - P').$$

Задача XXI. Найти условие сопряженности плоскости с символом (ghk), проходящей через начало координат, и ряда, проходящего через начало координат и узел (m'', n'', p'').

Необходимо, чтобы узел был расположен на одной из двух ретикулярных плоскостей, смежных плоскости

$$gx + hy + kz = 0.$$

Следовательно, искомое условие запишется следующим образом:

$$gm'' + hn'' + kp'' = \pm 1. \tag{39}$$

Если плоскость (ghk) содержит узлы (m, n, p), (m', n', p'), как это было принято выше (задача XVII), и если в уравнении (39) заменить g, h, k их значениями из уравнения (35), то условие перейдет в следующее:

$$m''(np'-pn')+n''(pm'-mp')+p''(mn'-nm')=\pm D. \qquad (40)$$

В этой формуле D — наибольший общий делитель двучленов $np'-pn'$, $pm'-mp'$, $mn'-nm'$.

Теорема XXXII. Если три ряда, исходящие из одного узла, будут сопряжены в пространство, то два из них будут сопряжены друг с другом на соединяющей их плоскости.

Эта теорема есть очевидное следствие определения сопряженных рядов (стр. 44, 45).

Параллелепипед, построенный на параметрах этих рядов, есть один из порождающих параллелепипедов совокупности. Три грани, проходящие через начало координат, образуют три сопряженные плоскости, имеющие в качестве смежных три другие грани.

Теорема XXXIII. Если систему трех сопряженных рядов OA, OB, OD (рис. 17) заменить системой трех сопряженных рядов OA', OB', OD', то объем параллелепипеда не изменится.

В самом деле, прямая AA' будет располагаться в плоскости, параллельной BOD. Порождающие параллелепипеды в двух этих системах будут иметь одинаковые основания $OBB'D$ и равную высоту.

Теорема XXXIV. Если систему OA, OB, OD заменить системой трех сопряженных рядов OA', OB', OD' (рис. 17), т. е. ряды OB', OD' взаимно сопряжены на плоскости BOD, то объем порождающего параллелепипеда останется прежним.

Площади параллелограммов основания на плоскости OBD (теорема III) и высоты параллелепипедов одинаковы. Следовательно, их объем тоже одинаков.

Теорема XXXV. Порождающий параллелепипед совокупности имеет постоянный объем и не зависит от образующих его систем сопряженных рядов.

Пусть Ox, Oy, Oz (рис. 18) — три параметра, которые служат построению узлов совокупности; пусть Ω — объем порождающего параллелепипеда, построенного на этих параметрах; OA, OB, OD — три заданных сопряженных ряда и Ω' — объем соответствующего порождающего параллелепипеда.

Пусть теперь OA' — след плоскости AOB на плоскости xy. Этот след — один из рядов сетки плоскости AOB (теорема XXXI). Пусть OB' — один из сопряженных ему рядов в той же плоскости. По теореме XXXIV, систему рядов (OA, OB, OD) можно заменить системой (OA', OB', OD') без изменения Ω'.

По аналогии пусть OD' — ряд, след плоскости $OB'D$ на плоскости xy, и OB'' — ряд, сопряженный с OD' в плоскости $OB'D$. Систему $(OA', OB'$ $OD)$ можно заменить системой (OA', OD', OB'') без изменения объема Ω'

порождающего параллелепипеда. Можно, наконец, заменить (OA', OD', OB'') на (Ox, Oy, OB''), потому что Ox и Oy — два сопряженных ряда плоскости $AO'D'$, совпадающие с плоскостью xy. Объем порождающего параллелепипеда останется равным Ω. Если сравнить этот параллелепипед с параллелепипедом, построенным на Ox, Oy, Oz, то, по теореме XXXIII, будем иметь

$$\Omega' = \Omega.$$

Другое доказательство. Назовем плотностью совокупности число узлов, содержащихся в единице объема. Все три значения этой единицы объема предполагаются необычайно большими относительно параметров рассматриваемых рядов. Исходя из этого, пусть (рис. 18)

$$OA = a', \ OB = b', \ OD = d',$$

угол $AOB = \delta'$; наклон OD к плоскости $AOB = \tau'$.

По известной формуле, будем иметь

$$\Omega' = a'b'd' \sin\delta' \sin\tau'.$$

На продолжениях прямых OA, OB, OD отложим очень большие относительно a', b', d' длины $\varkappa$, ν, σ, так что параллелепипед, построенный на $\varkappa$, ν, σ, будет равен единице объема, т. е.

$$\varkappa\nu\sigma \sin\delta' \sin\tau' = 1.$$

Число узлов в этом параллелепипеде подсчитывается как число пушечных ядер в прямоугольном штабеле, которое равно

$$\frac{\varkappa}{a'} \times \frac{\nu}{b'} \times \frac{\sigma}{d'}.$$

Следовательно, для очень большого числа ρ всегда будем иметь

$$\rho = \frac{\varkappa\nu\sigma}{a'b'd'} = \frac{\varkappa\nu\sigma \sin\delta' \sin\tau'}{a'b'd' \sin\delta' \sin\tau'} = \frac{1}{\Omega'}.$$

Однако число ρ как мера плотности совокупности должно оставаться постоянным, какой бы ни была система сопряженных осей, привлеченных для ее определения.

Если задать

$$Ox = a, \ Oy = b, \ Oz = d,$$

угол $xOy = \delta$, наклон Oz к $xOy = \tau$, то получим

$$\Omega' = \Omega = abd \sin\delta \sin\tau. \qquad (41)$$

Теорема XXXVI. Наоборот, если параллелепипед, построенный на параметрах рядов OA, OB, OD (рис. 18), равен по объему порождающему параллелепипеду совокупности, то три этих ряда будут сопряжены.

Представим себе, что внутри параллелепипеда существует узел совокупности P, выбранный с таким расчетом, чтобы он был наиболее близким к плоскости AOB. Параллелепипед, построенный на OP, OA, OB, будет иметь объем, равный Ω (предыдущая теорема). Следовательно, параллелепипед, построенный на OD, OA, OB, имеющий то же основание, но бóльшую высоту, будет иметь бóльший, чем Ω, объем, что противоречит предположению, принятому в формулировке теоремы.

Задача XXII. Найти условие сопряженности трех рядов. Пусть (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') — координаты трех узлов T, T', T'' (рис. 20). Предположим, что m, n, p — взаимно просты; то же самое примем для m', n', p' и m'', n'', p''. Надо найти условие сопряженности рядов OT, OT', OT'' с символами mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$.

Пусть (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') — линейные координаты точек T, T', T'' в системе сопряженных осей Ox, Oy, Oz, имеющих параметры a, b, d.

В аналитической геометрии доказывается, что объем тетраэдра с вершиной в начале координат и в точках с координатами (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$\frac{1}{6}(\xi\eta'\zeta'' - \xi\zeta'\eta'' + \zeta\xi'\eta'' - \eta\xi'\zeta'' + \eta\zeta'\xi'' - \zeta\eta'\xi'').$$

Но если оси косые и угол $xOy = \delta$, наклон Oz к $xOy = \tau$, то этот объем должен быть умножен на $\sin\delta\sin\tau$.

Следовательно, если через Ω' обозначить объем параллелепипеда, построенного на параметрах OT, OT', OT'', а через Ω — объем порождающего параллелепипеда, то, пользуясь предыдущими обозначениями, будем иметь

$$\Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'')\,abd\sin\delta\sin\tau,$$

или в силу уравнения (41)

$$\Omega' = (mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'')\,\Omega. \qquad (42)$$

Если ряды сопряжены, то по теореме XXV $\Omega' = \Omega$, и искомое условие будет иметь вид:

$$mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = \pm 1. \qquad (43)$$

Наоборот, если уравнение (43) удовлетворяется, то из этого делаем вывод, что $\Omega' = \Omega$, и три ряда будут сопряжены (теорема XXXVI).

Задача XXIII. Найти условие сопряженности двух рядов, проходящих через начало координат и узлы T, T' (рис. 20) на ретикулярной плоскости, содержащей эти два ряда.

Пусть (m, n, p), (m', n', p') — координаты T и T'. Уравнение плоскости OTT' задается формулой (36), в которой g, h, k — значения, опре-

деленные из формулы (35). Уравнение двух ретикулярных плоскостей, смежных OTT', задано (задача XIX) и имеет вид:

$$gx + hy + kz = \pm 1.$$

Стало быть, это уравнение может быть записано в виде

$$x(np' - pn') + y(pm' - mp') + z(mn' - nm') = \pm D.$$

Пусть теперь (m'', n'', p'') — координаты узла T'', принадлежащего одной из этих смежных плоскостей; OT'' — ряд, сопряженный с плоскостью OTT', и

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D. \quad (44)$$

Но если OT и OT' — уже взаимно сопряженные ряды на плоскости OTT', то OT, OT' и OT'' — три сопряженных ряда, и в силу условия (43) мы будем иметь

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Из этого уравнения и из уравнения (44) заключаем, что $D=1$. Если же известно, что $D=1$, то условие (43) будет удовлетворяться, и ряды OT, OT' будут сопряжены между собой на соединяющей их плоскости (теорема XXXII).

Следовательно, если $np'-pn'$, $pm'-mp'$, $mn'-nm'$ — взаимно простые, то ряды OT, OT' будут сопряженными рядами сетки плоскости OTT'. Обратное также справедливо.

Теорема XXXVII. Если (m, n, p), (m', n', p') — целочисленные координаты узлов T, T' (рис. 20), то число параллельных OT или OT' полос, содержащихся между противолежащими сторонами параллелограмма, построенного на OT, OT', будет равно наибольшему общему делителю трех двучленов $np'-pn'$, $pm'-mp'$, $mn'-nm'$.

Пусть, в самом деле, m'', n'', p'' — координаты узла T'', принадлежащего ретикулярной плоскости, смежной с плоскостью OTT'. Имеем (уравнение 44)

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm D.$$

Пусть Ω' — объем параллелепипеда, построенного на трех ребрах OT, OT', OT''; значение Ω' будет задано уравнением (42), которое в данном случае приобретет следующий вид:

$$\Omega' = \Omega D.$$

Пусть теперь ω — площадь порождающего параллелограмма сетки плоскости OTT', ω' — площадь параллелограмма, построенного на OT и OT', наконец, Δ — плотность слоя, содержащегося между T'' и плоскостью OTT'.

Будем иметь $\Omega = \Delta\omega$, $\Omega' = \Delta\,\omega'$, откуда

$$\omega' = \omega D. \tag{45}$$

Однако отношение $\omega' : \omega$ должно, по-видимому, равняться числу параллельных OT или OT' полос, которые пересекают треугольник OTT'. Следовательно, D будет представлять число этих полос. Отсюда это число будет наибольшим общим делителем двучленов.

Теорема XXXVIII. В системе параллельных ретикулярных плоскостей с символом (ghk), для которых порождающий параллелограмм имеет площадь ω, треугольник, вырезанный сопряженными осями на плоскости $gx+hy+kz=1$, имеет площадь, равную частному от деления площади $\frac{1}{2}\omega$ на произведение ghk характеристик. Площадь треугольника, вырезанного теми же осями в плоскости $gx+hy+kz=ghk$, равна произведению $\frac{1}{2}\omega$ на ghk.

Пусть GHK (рис. 19) — плоскость $gx+hy+kz=1$, $G'H'K'$ — плоскость $gx+hy+kz=ghk$ и a, b, d — три параметра осей Ox, Oy, Oz.

$$\left.\begin{aligned} OG' &= hka, \quad OG = \frac{a}{g}, \\ OH' &= gkb, \quad OH = \frac{b}{h}, \\ OK' &= ghd, \quad OK = \frac{d}{k}, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

площадь $G'H'K'$: площади GHK, как $\overline{OG}'^2 : \overline{OG}^2$, как $g^2h^2k^2 : 1$.

Перенесем начало координат в G', сохраняя неизменным направление осей. Целочисленные координаты (m, n, p), (m', n', p') узлов H' и K' для такого положения осей будут равны

$$m = -hk, \quad n = gk, \quad p = 0,$$

$$m' = -hk, \quad n' = 0, \quad p' = gh.$$

Отсюда выводим

$$np' - pn' = g^2hk, \quad pm' - mp' = gh^2k, \quad mn' - nm' = ghk^2.$$

D — наибольший общий делитель трех двучленов, равный ghk при условии, что g, h, k — взаимно простые числа.

Пусть ω — площадь, порождающая клетки сеток плоскостей GHK, $G'H'K'$. Исходя из теоремы XXXVII и уравнения (45), будем иметь

$$2 \text{ площади треугольника } G'H'K' = \omega D = ghk\omega, \tag{47}$$

что доказывает вторую часть теоремы. Но, с другой стороны,

$$\text{площадь треугольника } GHK = \frac{\text{площадь треугольника } G'H'K'}{g^2h^2k^2}.$$

Следовательно,

$$2 \text{ площади треугольника } GHK = \frac{\omega}{ghk}. \tag{48}$$

Задача XXIV. Найти в системе ретикулярных плоскостей с символом (ghk) площадь порождающего параллелограмма.

Назовем α, β, δ (рис. 19) углы zOy, zOx, yOx трехгранного угла O; μ, ν, ω — двугранные углы: μ — при ребре Ox, ν — при Oy, ω при Oz.

Обозначим через $S\,(ghk)$ неизвестную площадь порождающего параллелограмма сеток плоскостей (ghk). Исходя из принятых обозначений и формул аналитической геометрии в пространстве, будем иметь

$$\overline{GHK^2} = \overline{GHO^2} + \overline{GKO^2} + \overline{HKO^2} - 2GHO \cdot GKO \cos\mu - \\ - 2GHO \cdot HKO \cos\nu - 2GKO \cdot HKO \cos\omega. \tag{49}$$

Плоскость GHK, будучи ретикулярной, имеет уравнение

$$gx + hy + kz = 1.$$

Отсюда будем иметь площади треугольников:

$$GHO = \frac{1}{2} OG \cdot OH \sin\delta = \frac{1}{2}\frac{a}{g}\frac{b}{h}\sin\delta,$$

$$GKO = \frac{1}{2} OG \cdot OK \sin\beta = \frac{1}{2}\frac{a}{g}\frac{d}{k}\sin\beta,$$

$$HKO = \frac{1}{2} OH \cdot OK \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{b}{h}\frac{d}{k}\sin\alpha.$$

Условимся обозначать $bd \sin\alpha$ через φ, $ad \sin\beta$ через χ, $ab \sin\delta$ через ψ; φ — площадь клетки сетки плоскости yz, или S (100), χ — плоскости xz, или S (010), ψ — плоскости xy, или S (001).

Тогда будем иметь площади треугольников

$$GHO = \frac{\psi}{gh}, \quad GKO = \frac{\chi}{gk}, \quad HKO = \frac{\varphi}{hk}.$$

С другой стороны, в силу теоремы XXXVIII, площадь треугольника $GHK = \frac{1}{2}\frac{S\,(ghk)}{ghk}$. Подставив эти значения в уравнение (49), получим

$$S^2(ghk) = g^2\varphi^2 + h^2\chi^2 + k^2\psi^2 - 2gh\varphi\chi\cos\omega - \\ - 2gk\varphi\psi\cos\nu - 2hk\chi\psi\cos\mu. \tag{50}$$

Из этого уравнения можно определить площадь порождающего параллелограмма ретикулярной плоскости (ghk), как только будут определены аналогичные площади для сеток трех сопряженных координатных плоскостей.

Задача XXV. Найти плотность слоев, параллельных ретикулярным плоскостям с символом (ghk).

Пусть $S(ghk)$ — площадь порождающего параллелограмма сетки системы (ghk), Δ — плотность соответствующих слоев и Ω — объем порождающего параллелепипеда.

Тогда будем иметь

$$\Omega = \Delta S(ghk). \tag{51}$$

Припишем углам α, β, δ, μ, ν, ω их предыдущие значения. Тогда уравнение (41) можно представить в виде

$$\Omega = abd\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}. \tag{52}$$

Из уравнения (50) извлечем возведенное в квадрат значение $S^2(ghk)$, чтобы подставить его в уравнение (51). В результате получим

$$\Delta^2 = \frac{a^2b^2d^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta)}{g^2\varphi^2 + h^2\chi^2 + k^2\psi^2 - 2gh\varphi\chi\cos\omega - 2gh\varphi\psi\cos\nu - 2hk\chi\psi\cos\mu}.$$

Наконец, если заменить φ, χ, ψ их значениями a, b, d, α, β, δ, то это уравнение примет следующий вид:

$$\Delta^2 = \frac{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta}{\frac{g^2\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{h^2\sin^2\beta}{b^2} + \frac{k^2\sin^2\delta}{d^2} - 2\frac{gh\sin\alpha\sin\beta}{ab}\cos\omega - 2\frac{gk\sin\alpha\sin\delta}{ad}\cos\nu - 2\frac{hk\sin\beta\sin\delta}{bd}\cos\mu}. \tag{53}$$

Можно было прямо прийти к этой формуле, найдя аналитическое выражение перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость со следующим уравнением в линейных координатах:

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{d} = 1.$$

Теорема XXXIX. Средний интервал между узлами совокупности равен кубическому корню из объема порождающего его параллелепипеда.

В соответствии с определением Пуассона (см. стр. 55) средним интервалом между узлами совокупности назовем частное от деления стороны куба, равного единице объема, на число узлов, содержащихся в этом кубе.

Пусть E — средний интервал; ρ всегда обозначает предполагающееся чрезвычайно большим число узлов, содержащихся в единице объема. Получим $E^3 = \frac{1}{\rho}$, откуда, в силу того что $\rho = \frac{1}{\Omega}$ (см. второе доказательство теоремы XXXV), выводим

$$E^3 = \Omega, \quad E = \sqrt[3]{\Omega}, \tag{54}$$

где Ω — постоянный объем порождающего параллелепипеда совокупности.

Задача XXVI. Сменить координатные оси и выразить новые координаты как функции старых и наоборот.

Пусть (m, n, p), (m', n', p), (m'', n'', p'') — целочисленные координаты концов T, T', T'' (рис. 20) параметров трех рядов, которые должны служить новыми осями; XYZ — целочисленные координаты некоторого узла в новой системе осей. Рассуждениями, аналогичными приводящим к уравнениям (17), приходим к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} x &= mX + m'Y + m''Z, \\ y &= nX + n'Y + n''Z, \\ z &= pX + p'Y + p''Z. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Ряд OT, проходящий через начало координат и точку (m, n, p), служит осью X, ряд OT' — осью Y, ряд OT'' — осью Z. Обозначим для краткости

$$\left.\begin{aligned} &mn'p'' - mp'n'' + pm'n'' - nm'p'' + np'm'' - pn'm'' = (mn'p''), \\ &mn' - nm' = (mn'),\ nm'' - mn'' = (nm''),\ m'n'' - n'm'' = (m'n''), \\ &pm' - mp' = (pm'),\ mp'' - pm'' = (mp''),\ p'm'' - m'p'' = (p'm''), \\ &np' - pn' = (np'),\ pn'' - np'' = (pn''),\ n'p'' - p'n'' = (n'p''). \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Если известным методом исключения разрешить уравнения (55) относительно X, Y, Z, то получим

$$X = \frac{(n'p'')}{(mn'p'')}x + \frac{(p'm'')}{(mn'p'')}y + \frac{(m'n'')}{(mn'p'')}z,$$

$$Y = \frac{(pn'')}{(mn'p'')}x + \frac{(mp'')}{(mn'p'')}y + \frac{(nm'')}{(mn'p'')}z,$$

$$Z = \frac{(np')}{(mn'p'')}x + \frac{(pm')}{(mn'p'')}y + \frac{(mn')}{(mn'p'')}z.$$

Отсюда ясно: чтобы X, Y, Z всегда были целыми числами, три заданных ряда должны быть сопряженными.

Принимая это предположение, будем иметь $(mn'p'') = \pm 1$, что приведет предыдущие уравнения к виду:

$$\begin{aligned} \pm X &= (n'p'')\,x + (p'm'')\,y + (m'n'')\,z, \\ \pm Y &= (pn'')\,x + (mp')\,y + (nm'')\,z, \\ \pm Z &= (np'')\,x + (pm')\,y + (mn')\,z. \end{aligned} \tag{57}$$

Вращением системы OT, OT', OT'' вокруг O совместим OT с Ox, OT' приведем в плоскость xOy, так чтобы OT' и Oy были расположены по одну сторону от прямой Ox, бесконечно продолженной в обе стороны. Если OT'' и Oz попадут по одну сторону от плоскости xy, то левым членам уравнения (57) можно присвоить знак плюс. В противоположном случае — знак минус.

Следствие. Предположим, что меняется только одна ось z, заменяющаяся на OT''. Обозначим через m_0, n_0 целочисленные координаты T'' в осях x, y. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad n = 0, \quad p = 0, \\ m' &= 0, \quad n' = 1, \quad p' = 0, \\ m'' &= m_0 \quad n'' = n_0, \quad p'' = 1. \end{aligned}$$

Уравнения (55) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= X + m_0 Z, \\ y &= Y + n_0 Z, \\ z &= Z. \end{aligned}$$

Обратная формула будет иметь вид:

$$\begin{aligned} X &= x - m_0 z, \\ Y &= y - n_0 z, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Целочисленная координата, параллельная перемещенной оси, остается неизменной.

Задача XXVII. Как изменится символ ретикулярной плоскости (ghk) в новой системе осей?

Пусть всегда (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') — целочисленные координаты концов T, T', T'' (рис. 20) параметров трех рядов, принимаемых за новые оси. Если в общее уравнение $gx+hy+kz=C$ подставить значения x, y, z, извлеченные из (55), то получим

$$(gm + hn + kp) X + (gm' + hn' + kp') Y + (gm'' + hn'' + kp'') Z = C.$$

Отсюда ясно, что в новой системе осей символ плоскости (ghk) перейдет в символ $(gm+hn+kp,\ gm'+hn'+kp',\ gm''+hn''+kp'')$. Если новый символ (GHK), то

$$\begin{aligned} G &= gm + hn + kp, \\ H &= gm' + hn' + kp', \\ K &= gm'' + hn'' + kp''. \end{aligned} \tag{58}$$

Следствие. Если сохранить неизменными оси x, y и ограничиться заменой оси z на ось, совпадающую с рядом $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$, который является продолжением в противоположную сторону диагонали параллелограмма, построенного на a, b, d, то получим

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad n = 0, \quad p = 0, \\ m' &= 0, \quad n' = 1, \quad p' = 0, \\ m'' &= -1, \quad n'' = -1, \quad p'' = -1. \end{aligned}$$

Это переводит символ (ghk) в $(g, h, -g-h-k)$.

Тогда если l назвать характеристикой ретикулярной плоскости (ghk) относительно новых осей, то $l=-g-h-k$. Если e — параметр новой оси, то отрезок этой оси, содержащийся между началом координат и плоскостью $gx+hy+kz=1$, перешедшей в новой системе в плоскость с уравнением $gx+hy+lZ=1$, будет иметь своим значением $\frac{e}{l}$. Отсюда ясно, что когда параметры a, b, d, e четырех попарно сопряженных рядов расположены таким образом, что образуют четыре силы, находящиеся в равновесии в пространстве, то каждая плоскость, смежная ретикулярной плоскости, проходящей через начало координат, отсечет на параметрах этих рядов отрезки $\frac{a}{g}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{d}{k}$, $\frac{e}{l}$, где g, h, k, l — положительные или отрицательные целые числа. Тогда в качестве символа ретикулярной плоскости можно взять любой из символов (ghk), (ghl), (glk), (lhk). Эти четыре характеристики и подчиняются соотношению

$$g+h+k+l=0. \tag{59}$$

Обозначение с четырьмя характеристиками

Когда положение ретикулярной плоскости определяется четырьмя координатными осями, удовлетворяющими только что полученным условиям, то символ (ghk) заменяется символом из четырех характеристик $(ghkl)$.

Определения. Назовем элементарным тетраэдром всякий тетраэдр, имеющий вершинами узлы совокупности, выбранные таким образом, чтобы каждый из них был расположен на плоскости, смежной той ретикулярной плоскости, которая содержит три других узла; или иначе: всякий тетраэдр, построенный на трех сопряженных параметрах, исходящих из одного узла, будет элементарным.

Такой тетраэдр всегда составляет одну шестую часть от одного из порождающих параллелепипедов совокупности. Стало быть, объем каждого из этих тетраэдров одинаков и равен $\frac{1}{6}\,\Omega$.

Назовем основным тетраэдром такой, в основании которого остроугольный треугольник, охваченный двумя наименьшими параметрами совокупности, и три примыкающих к основанию двугранных угла являются острыми. В виде исключения два из этих трех углов могут быть прямыми.

Теорема XL. Всякий тетраэдр с вершинами в точках (o, o, o), (m, n, p), (m', n', p'), (m'', n'', p'') имеет объем, равный произведению объема элементарного тетраэдра на множитель $mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-pn'm''$.

Эта теорема является следствием формулы (42).

Пусть $OTT'T''$ (рис. 20) — заданный тетраэдр. Объем тетраэдра $OTT'T''$ равен

$$\frac{1}{6}\,\Omega\,(mn'p''). \tag{60}$$

Эта формула справедлива даже в том случае, когда m, n, p, m', n', p' или m'', n'', p'' не являются взаимно простыми.

Задача XXVIII. Найти основной тетраэдр совокупности.

Произвольно выбираем узел O (рис. 21) и находим два наименьших параметра OA, OB. Направляем их так, чтобы угол AOB был острым или, по меньшей мере, прямым, что всегда можно сделать. Замкнем треугольник AOB, который будет одним из основных треугольников ретикулярной плоскости AOB, и на одной из его трех сторон, например AB, построим второй основной треугольник BAO', который в соединении с предыдущим даст порождающий параллелограмм $OAO'B$. На контуре этого параллелограмма восставим неограниченно в обе стороны под прямым углом боковые стороны призмы.

Ретикулярная плоскость, смежная плоскости $OAO'B$ и расположенная поверх этой последней, будет пересекать призму по параллелограмму, равному $OAO'B$, который должен содержать внутри себя узел совокупности, если только он не содержит два или четыре узла на своем контуре. Пусть D — этот узел, ряды OA, OB, OD сопряжены и пирамида $OABD$ будет основным тетраэдром.

Если таким образом полученный узел будет расположен в d и ортогонально проектируется внутрь второго треугольника BAO', то ряды $O'A$, $O'B$, $O'd$ будут сопряжены, и пирамида $O'ABd$ будет основным тетраэдром.

Примечание. Пусть $OABD$ — основной тетраэдр, построенный предшествующим способом и расположенный над плоскостью $OAO'B$. Если мы повторим это построение на плоскости, смежной плоскости $OAO'B$, которая расположена ниже этой последней, то получим узел D'. Положение его по отношению к D будет таким, что A, D, B, D' образуют параллелограмм. Тетраэдр $O'ABD'$ будет тоже основным тетраэдром, но он будет расположен ниже плоскости $OAO'B$. Легко видеть, что $OABD$, $O'ABD'$ будут обратными* многогранниками, центр симметрии которых ω расположен в центре параллелограмма $OAO'B$. Отсюда видно, что во всякой совокупности существуют два основных тетраэдра, обратных по отношению друг к другу.

Теорема XLI. Все плоские углы основного тетраэдра острые, но в виде исключения некоторые из них (но не больше четырех) могут быть прямыми.

Пусть OA, OB (рис. 21) — два наименьших параметра совокупности, $OABD$ — основной тетраэдр. Высказанное предположение очевидно для трех углов основания OAB. Проведем через O плоскость, нормальную OA. В силу самого построения тетраэдра, OD и OA не могут быть расположены

* Определение этих терминов см. на стр. 86.

по разные стороны этой плоскости. Стало быть, $AOD < 90°$. Аналогично доказывается, что подобное соотношение имеет место для углов DOB, DAO, DAB, DBO, DBA.

Из того, что $OB < OD$, заключаем, что $ODB < OBD < 90°$; $OA < OD$, следовательно, $ODA < OAD < 90°$, а из того, что $BD > BO$, $DA > OA$, следует, что $BD^2+DA^2 > BO^2+OA^2$.

Итак, угол BOA будет острым или прямым. Имеем $BO^2+OA^2 \geqslant BA^2$, следовательно, $BD^2+DA^2 > BA^2$, стало быть, угол BDA не может превышать $90°$.

Впрочем, число прямых углов тетраэдра не может превышать четырех, ибо тетраэдр обладает только четырьмя гранями.

Примечание. На основной тетраэдр налагаются меньшие ограничения, чем на основной треугольник в сетках. Его двугранные углы не обязательно острые; он не обязательно построен на наименьших параметрах системы, наконец, основной треугольник с наименьшей площадью может не быть одной из его граней.

Приведем (без доказательства) различные свойства основного тетраэдра.

Теорема XLII. Если b — наименьший из двух параметров совокупности и если B — противолежащий стороне b угол в основном треугольнике, построенном на этих параметрах, то высота основного тетраэдра будет, по крайней мере, равна $\sqrt{1-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 B}$.

Следствие. Эта же высота будет, по крайней мере, равна $b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Теорема XLIII. Наименьший параметр совокупности, лежащий вне плоскости, содержащей два других наименьших параметра, обязательно является одним из трех ребер, соединяющих вершину основного тетраэдра с тремя вершинами его основания.

Теорема XLIV. Если OB, OA (рис. 21) — два наименьших ребра основного тетраэдра $OABD$, OA — наименьшее из них и если из B проведен отрезок BO', равный и параллельный OA, то один из четырех треугольников AOB, AOD, BOD, BAD будет элементарным с наименьшей во всей совокупности площадью.

Следствие. Ретикулярная плоскость с наименьшей площадью содержит, по меньшей мере, один из двух наименьших параметров совокупности.

§ V. Симметричные совокупности

Определения. О с ь ю с и м м е т р и и совокупности будем называть всякую прямую, при вращении вокруг которой всей совокупности как единого целого на некоторый угол одни и те же точки пространства соответствуют узлам совокупности до и после вращения.

Место, принадлежащее узлам совокупности, с а м о с о в м е щ а е т с я после этого вращения.

Для большей ясности в последующих выкладках предположим, что существует две равные совпадающие совокупности, наложимые узлом на узел. Одна из этих совокупностей будет рассматриваться как неподвижная, другая может приводиться в движение переносом или вращением, как твердое тело.

Когда подвижная совокупность, вращаясь вокруг оси, совпадает с неподвижной совокупностью после поворота на 180°, то ось будет называться двойной осью симметрии, или, более кратко, двойной осью. Произвольный узел совокупности будет иметь гомологичный ему по другую сторону оси. Прямая, соединяющая эти два узла, будет нормальна к оси, и точка их пересечения делит эту прямую на две равные части.

Когда совпадение наступает после поворота на одну третью, четвертую, шестую часть полного поворота, то ось вращения будет называться, соответственно, тройной, четверной, шестерной осью симметрии.

При тройной оси симметрии узлы расположены по три, и каждый узел имеет два ему гомологичных. Вокруг четверной оси узлы размещаются по четыре, вокруг шестерной — по шесть. Симметрия оси будет иметь порядковый номер 2, 3, 4, 6 в зависимости от того, будет ли она двойной, тройной, четверной или шестерной. Этот порядковый номер в дальнейшем будет обозначаться буквой q.

Две оси одного порядкового номера будут называться осями одного рода, когда расположение узлов вокруг каждой из них одинаково.

Чтобы установить это подобие, мысленно соединим узлы совокупности с каждой из этих осей и одну из этих систем предположим подвижной. Если одновременно можно привести в совпадение подвижную и неподвижную оси, подвижные и неподвижные узлы, то оси будут называться осями одного рода.

Чтобы оси были одного рода, необходимо, чтобы они были одного порядка и их параметры были одинаковыми. Эти условия, в общем, удовлетворяются. Однако имеется частный случай, когда две двойные оси имеют одинаковый параметр, но не будут одного рода.

Две оси, не удовлетворяющие приведенным условиям, называются осями разных родов.

Всякая совокупность, обладающая одной или многими осями симметрии, будет называться симметричной, а в противоположном случае — асимметричной. Всякая плоскость, делящая совокупность на две геометрически симметричные части, будет называться плоскостью симметрии совокупности. В такой совокупности каждый узел обладает ему гомологичным узлом по другую сторону плоскости симметрии.

Теорема XLV. Наименьший угол, самосовмещающий совокупность в процессе ее вращения, является делителем 360°.

Пусть M (рис. 13) — узел совокупности и MO — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось. Повернем подвижную совокупность на угол MOM' вокруг оси (без изменения мест узлов) и пусть $MOM'=Q$.

Подвижный узел M наложится на неподвижный M', подвижный M' — на неподвижный M''. В результате получим

$$OM = OM' = OM'', \quad MOM' = Q.$$

Опишем окружность радиуса OM из центра O и затем построим дугу $M''M'$, равную дуге $M'M$; дугу $M'''M''$, равную дуге $M''M'$. Ясно, что M, M', M'',. . . тоже будут узлами неподвижной совокупности и что хорды дуг образуют правильный вписанный многоугольник, который после одного или нескольких поворотов самосовместится с исходным положением в точке M. Иначе существовало бы бесконечное число узлов совокупности на окружности круга, что невозможно. К тому же всегда можно предположить, что M, M' — два соседних узла, и тогда MOM' будет наименьшим углом поворота, самовосстанавливающим узлы. Следовательно, обозначив через Q этот наименьший угол, получим

$$Q = \frac{360°}{q}. \tag{61}$$

Теорема XLVI. Совокупность может обладать только двойными, тройными, четверными и шестерными осями симметрии.

На MM', $M'M''$ (рис. 13) строим ромб $MM'M''m$. Точка m будет узлом совокупности. Легко находим, что

$$Om = OM'\left(1 - 4\sin^2\frac{1}{2}Q\right).$$

Если:
$$\begin{aligned}
&q=2, \quad Q=180°, \quad Om=-3OM',\\
&q=3, \quad Q=120°, \quad Om=-2OM',\\
&q=4, \quad Q=90°, \quad Om=-OM',\\
&q=5, \quad Q=72°, \quad Om=-\frac{3\sqrt{5}}{2}OM'=-0.382OM',\\
&q=6, \quad Q=60°, \quad Om=0,\\
&q>6, \quad Q<60°, \quad Om<OM'.
\end{aligned}$$

Решения $q=5$ и $q>6$, очевидно, невозможны, ибо всегда можно предположить, что M взята на наименьшем расстоянии от оси вращения, и, следовательно, неравенство $Om < OM'$ невозможно, исключая случай. когда $Om=0$, ибо тогда O будет узлом совокупности.

Следовательно, если совокупность обладает осью симметрии, то порядковый номер симметрии, свойственной этой оси, может быть равен $q=2$, 3, 4, 6.

Следствие. Вращения на 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300° — единственно возможные.

Теорема XLVII. Когда в совокупности существует ось симметрии, не проходящая через узлы, то прямые, параллельные этой оси и проходящие через узлы, обладают той же симметрией.

Пусть q — порядковый номер рассматриваемой оси MM' (рис. 22) и m — некоторый узел, который после вращения подвижной совокупности на угол $\frac{360°}{q}$ займет место узла m'. Если ось перенести параллельно самой себе из m' в m, то подвижная совокупность, подвергнутая этому предварительному вращению, будет находиться в том положении, как если бы она была повернута вокруг прямой nmn', проведенной из m параллельно MM'. Так как места узлов не изменились, то эта прямая является осью симметрии совокупности. Порядок симметрии этой оси в общем будет равен q. Во всяком случае ось порядка jq, где j — некоторое целое число, тем более обладает свойствами оси порядка q. Может случиться, что новая ось будет иметь более высокий порядок, который всегда должен быть кратным порядку симметрии рассматриваемой оси.*

Определение. П р о м е ж у т о ч н ы м и о с я м и назовем такие оси, которые не проходят через узлы совокупности.

В силу предыдущей теоремы, промежуточные оси сопутствуют осям той же симметрии, проведенным через узлы. Отсюда следует, что во всех изысканиях, не имеющих целью преднамеренного выяснения свойств, присущих промежуточным осям, без нарушения строгости можно ограничиться рассмотрением осей, проходящих через узел.

Теорема XLVIII. Всякая ось симметрии, содержащая узел, есть ряд совокупности. Пусть MM' (рис. 22) — заданная ось, проходящая через узел M, m — другой узел, не лежащий на оси, и m', m'' — узлы, ему гомологичные по отношению к этой оси. Проведем Mm, Mm', Mm'',. . . . Если теперь построим диагональ $M\mu$ параллелограмма, построенного на Mm, Mm', то эта диагональ по направлению и величине будет одним из параметров совокупности (теорема XXX). Если аналогично комбинировать $M\mu$ с Mm'', то новая диагональ $M\mu'$ будет обладать теми же свойствами. После исчерпания последовательности узлов, гомологичных m, полученный таким образом конечный результат будет таким же, как если бы мы составили механически равные по величине и направлению Mm, Mm', Mm'', . . . силы, чтобы получить равнодействующую. Однако если разложить каждую из этих сил MM' и нормали к этой прямой, то очевидно, что нормальные составляющие MM' взаимно уничтожаются в силу симметрии, и вертикальные составляющие останутся одни. Если точка O есть точка пересечения MM' с плоскостью многоугольника $mm'm''$. . ., то каждая из этих вертикальных составляющих будет равна MO. Следовательно, если взять $MM'=qMO$, то M' будет также узлом. Стало быть, MM' есть ряд совокупности.

* Это доказательство дано Коши. Я им воспользовался, поскольку оно проще моего доказательства. (См. Les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XXIX, p. 135).

Теорема XLIX. Всякая плоскость, проведенная нормально к оси симметрии через узел, есть ретикулярная плоскость совокупности.

Пусть M — заданный узел (рис. 22) и MM' — заданная ось, проходящая, по предположению, через M. Пусть m — некоторый другой узел и m', m'' — узлы, ему гомологичные. Линии, проведенные из M параллельно mm', $m'm''$, $m''m$,. . ., являются, очевидно, рядами совокупности. Следовательно, плоскость, нормальная к MM' и содержащая эти прямые, будет одной из ретикулярных плоскостей системы. Если MM' — двойная ось, то можно прибегнуть к другому узлу μ, расположенному вне плоскости mMM', тогда это доказательство станет еще более применимым.

Теорема L. Когда в совокупности существует плоскость симметрии, не проходящая ни через один из узлов, то всякая параллельная ей плоскость, проходящая через узел, есть плоскость симметрии системы.

Пусть m (рис. 23) — некоторый узел, m' — узел, ему гомологичный по другую сторону заданной плоскости GH, которая, по предположению, есть плоскость симметрии совокупности. Если подвижную совокупность перенести параллельно самой себе из m' в m, т. е. следовать нормальному к плоскости направлению, то известно, что она останется симметричной с неподвижной совокупностью по отношению к плоскости, нормальной к середине прямой, соединяющей подвижную точку m' с неподвижной m. В пределе, когда m' совпадет с m, плоскость симметрии, всегда параллельная самой себе, будет проходить через m. Но тогда подвижная и неподвижная совокупности совпадут. Следовательно, плоскость, проведенная через m параллельно GH, будет плоскостью симметрии системы.

Примечание. Всегда можно отрешиться от промежуточных плоскостей симметрии и рассматривать только плоскости симметрии, проходящие через узлы.

Теорема LI. Всякая плоскость симметрии, содержащая узел, есть ретикулярная плоскость.

Пусть M (рис. 23) — узел, расположенный на плоскости симметрии GH, m, m' — два гомологичных узла по отношению к этой плоскости. Диагональ ромба, построенного на Mm, Mm', по направлению и по величине будет параметром одного из рядов системы. Однако она лежит, очевидно, в плоскости симметрии. Аналогично доказывается, что существуют другие ряды системы, проходящие через M и принадлежащие плоскости симметрии, но не расположенные в плоскости mMm'. Отсюда видно, что плоскость симметрии является ретикулярной плоскостью.

Теорема LII. Когда совокупность обладает осью симметрии четного порядка, то она обладает также системой плоскостей симметрии, нормальных к этой оси, и, наоборот, присутствие плоскостей симметрии влечет за собой присутствие некоторой системы осей четного порядка, нормальных к этой плоскости.

В Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie * доказано, что если повернуть на 180° многогранник, обратный заданному многограннику P, вокруг прямой A, проведенной из центра симметрии, то получится многогранник, симметричный P по отношению к плоскости симметрии, проведенной через центр симметрии нормально к прямой A.

Некоторый узел O (рис. 23) примем за центр симметрии и построим обратную совокупность, которая будет совпадать узлами с первоначальной. Затем, проведя через O прямую mOm', параллельную оси четного порядка, повернем обратную совокупность вокруг этой прямой на 180°. Она должна самосовместиться всеми узлами вследствие симметрии оси. В силу вышеизложенных общих свойств плоскость, проведенная из O нормально к оси, будет плоскостью симметрии для обеих совпадающих совокупностей и, как следствие, для двух половин заданной совокупности.**

Обратная теорема доказывается следующим образом. Пусть O (рис. 23) — узел, расположенный на плоскости симметрии, общей для подвижной и неподвижной совокупностей. По общей теории обратных многогранников (см. цитированную литературу) известно, что если многогранник, симметричный многограннику P, повернуть на 180° вокруг нормали к плоскости симметрии, восстановленной из узла O, то обязательно получим обратный многогранник. В данном случае полуповорот подвижной совокупности совместит ее с обратной совокупностью, которая, очевидно, не отличается от заданной совокупности. Следовательно, нормаль является двойной осью симметрии системы. В общем случае ясно, что можно получить ось некоторого четного порядка.***

Определение. Обозначив системой рядов множество всех рядов, параллельных между собой в совокупности, будем рассматривать в такой системе направление, величину параметра и плотность системы. Последняя равна числу рядов, содержащихся в бесконечной призме с ребрами, параллельными общему направлению рядов, и площадью нормального сечения, равной единице.

Вследствие постоянства объемов порождающих параллелепипедов для различных систем рядов частное от деления параметра на плотность всегда остается постоянным и равным объему Ω порождающего параллелепипеда.

Включение новых равноотстоящих узлов между двумя соседними узлами на каждом ряду преобразует совокупность, и в зависимости от числа включенных узлов каждого параметра 1, 2, 3, 4 . . . новая совокупность будет удвоенной, утроенной, учетверенной и т. д. совокупностью. Тогда

* Journal de Mathématiques de MLi. ouville, t. XIV, p. 138. Многогранник, обратный P, получается при соединении вершины P с неподвижной точкой, называемой центром симметрии, и продолжении этих прямых по другую сторону центра симметрии на величину, равную им самим (см. стр. 8. *Ред.*).

** Эту теорему можно рассматривать как непосредственное следствие теоремы XXI моей работы: «О симметричных многогранниках», напечатанной в t. XIV Journal de Mathématiques de M. Liouville.

*** Это непосредственное следствие теоремы IV мемуара «Sur les Polyèdres de forme symétrique».

объем порождающего параллелепипеда выражается отношением единицы к 2, 3, 4, ... Исходя из этого, можно доказать следующую теорему.

Теорема LIII. Системы рядов, находящиеся в первоначально заданной совокупности и в совокупности, полученной включением новых узлов в одну из систем рядов, одни и те же.

Пусть в качестве координатных осей взяты три сопряженных ряда. Ось z будет одним из рядов преображенной включением новых узлов системы. Тогда если a, b, d — три параметра этих рядов, то a, b, $\frac{d}{\theta}$ будут тремя параметрами в новой совокупности, где $\theta - 1$ — число узлов, добавленных на каждом параметре. Чтобы вернуться к первоначальной совокупности, уничтожим в совокупности с включенными узлами все ретикулярные плоскости вида $z=j\theta+1$, $z=j\theta+2, \ldots$, $z=j\theta+\theta-1$, где j — некоторое число, и сохраним только плоскости $z=0$, $z=\theta$, $z=2\theta, \ldots$, $z=j\theta$.

Рассмотрим теперь ряд, проведенный из начала координат O (рис. 20) в узел t с координатами (m, n, p) в совокупности с включенными узлами. Если ордината P кратна θ, то узел t принадлежит первоначальной совокупности. Система рядов Ot будет существовать в первоначальной совокупности с тем же параметром. Если ордината P не кратна θ, то продолжим Ot на $tt''=(\theta-1)\ Ot$. Целочисленная ордината узла t'', параллельная z, становится тогда кратной θ, и точка t'' принадлежит первоначальной совокупности. Следовательно, система рядов Ot будет существовать в совокупности после уничтожения ретикулярных плоскостей с символами $z=j\theta+1$, $z=j\theta+2$, $\ldots$, $z=j\theta+\theta-1$.

Следовательно, после уничтожения промежуточных узлов все системы рядов существуют без изменения их направления. Изменятся только плотности и величины параметров систем. Для каждой системы уничтожение узлов приведет к увеличению в $\theta : 1$ раз отношения параметра к плотности.

Следствие. Одни и те же системы рядов находятся в обеих совокупностях при изменениях, затрагивающих только величину параметра или плотность системы. Отсюда следует, что те же системы ретикулярных плоскостей существуют в двух совокупностях. Тем не менее плотность слоев или площади порождающей клетки меняются одни относительно других так, что их произведение возрастает в $\theta : 1$ раз с уничтожением промежуточных узлов.

После этих общих теорем можно последовательно сформулировать теоремы, характеризующие каждый особый вид симметрии.

Двойная симметрия

Теорема LIV. Если во всякой совокупности с двойной осью симметрии рассматривать две ретикулярные плоскости, смежные ретикулярной плоскости, нормальной к двойной оси, то сетка одной из этих плоскостей совпадает с ортогональной проекцией другой сетки.

Итак, пусть P — ретикулярная плоскость, нормальная оси, AP' и P'' — две смежные ей ретикулярные плоскости. Сетки P' и P'' гомологичны по отношению к плоскости P, которая является плоскостью симметрии совокупности (теорема II). Следовательно, сетка одной из плоскостей P', P'' есть ортогональная проекция другой.

Следствие. Если присвоить порядковые номера всем этим ретикулярным плоскостям, нормальным оси, то ясно, что последовательность плоскостей с четным номером воспроизведет в ортогональной проекции одну и ту же сетку. То же самое справедливо для последовательности сеток на плоскостях с нечетными номерами.

Теорема LV. Всякая совокупность с двойной осью симметрии может быть порождена прямой призмой с основанием в виде параллелограмма, которая в некоторых случаях может содержать в центре фигуры один из узлов совокупности.

Пусть $ABCDE$ (рис. 24) — сетка, проведенная в плоскости, проходящей через узел A, нормально к двойной оси. Примем эту плоскость, за плоскость xy. Ее уравнение в целочисленных координатах будет $z=0$. Все сетки плоскостей $z=\pm 2$, $z=\pm 4$, $z=\pm 6$... можно ортогонально спроектировать на сетку $ABCD$... (теорема LIV). Сетки плоскостей $z=\pm 1$, $z=\pm 3$, ... тоже можно ортогонально спроектировать на $ABCD$. ... В этом случае порождающий параллелепипед будет прямой призмой с основанием в виде параллелограмма.

Но противоположное тоже может иметь место. Предположим, что один из узлов A и сетки $z=1$ проектируется в a на плоскости $z=0$. Если соединить A с A' и продолжить AA' на расстояние, равное ей самой до D'', то D'' будет, очевидно, узлом сетки $z=2$. Если опустить перпендикуляры $A'a$, $D''D$, то D будет одним из узлов сетки $z=0$ (теорема LIV), а a будет расположен посередине отрезка AD. Узел A был выбран произвольно. Ясно, что a — геометрический центр сетки $ABCD$. . . . Он занимает середину одного из параметров AD сетки. Теперь на AD как основании построим два элементарных треугольника, равных и противоположно расположенных, таких как ACD, AED. Точка a будет центром порождающего параллелограмма $ACDE$, а A' — центром прямой призмы, имеющей нижним основанием $ACDE$. Ее верхнее основание — на плоскости $z=2$. Совокупность может быть порождена бесконечным числом таких призм с высотой, равной расстоянию между плоскостями $z=0$, $z=2$, имеющих в своих центрах один из узлов совокупности.

Примечание I. Можно предположить, что A выбрана среди всех узлов сетки $z=0$ наиболее близко к точке a. Если AD в этом случае не является наименьшим параметром $z=0$, то пусть AB — наименьший параметр, направленный так, что $BAD < 90°$. Так как $aB > aA$, то узел B будет вне окружности, описанной на AD как диаметре. Таким образом, $ABD < 90°$. Но, с другой стороны, в силу того, что $AB < BD$, имеем также $ADB < BAD < 90°$. Следовательно, три угла треугольника BAD будут острыми, BAD — основным треугольником сетки $z=0$ (теорема VI). Стало

быть, проекция A' всегда попадет на середину одной из трех сторон основного треугольника. Этим доказано, что чередование сеток с четными и нечетными порядковыми номерами может быть осуществлено не более, чем тремя различными способами в зависимости от попадания проекции узлов сетки $z=1$ на середину маленькой, средней или большой стороны основного треугольника сетки $z=0$. Отсюда ясно, что совокупность всегда может быть порождена призмами с основанием $ABCD$ и высотой, равной интервалу между двумя плоскостями $z=0$ и $z=2$, несущими узлы на центрах двух ее вертикальных прямоугольных сторон. Можно предположить, что основание каждой из этих двух центрированных боковых сторон образовано одной из трех сторон основного треугольника.

Примечание II. В случае чередования сеток прямую центрированную призму всегда можно заменить восьмигранником (рис. 28), ось $A'A''$ которого проходит через центр, основание $ACDE$ в форме параллелограмма и нормально оси. Необходимо заметить, что этот восьмигранник не может быть порождающим геометрическим телом, способным воспроизвести все узлы и совокупности непосредственной плотной пригонкой.

Тридвойная симметрия

Теорема LVI. Если порождающее тело совокупности — прямая призма с ромбическим основанием, центрированная или нецентрированная, то совокупность обладает тремя взаимно перпендикулярными двойными осями симметрии.

Предположим, что ромб $ACDE$ (рис. 24) является основанием прямой порождающей призмы. Бросим взгляд на рис. 25, который представляет на плоскости $z=0$ следующее. 1. Сетку $z=0$, ряды которой изображены сплошными линиями, и проекции на эту сетку сеток $z=2j$, так же как и сеток $z=2j+1$ (последние — в случае наложения всех проекций). 2. При чередовании сетки $z=2j+1$ изображены пунктирными линиями ac, cd, de, ae,. . . . Очевидно, что всякая плоскость, нормальная к плоскости рисунка и следующая диагонали ромба, например $\alpha\alpha'$, будет плоскостью симметрии для совокупности, ибо все одинаково справа и слева от этой плоскости. Следовательно, диагональ AD, нормальная к этой плоскости, будет двойной осью системы (теорема LII). Таким же образом доказывается, что вторая диагональ ромба EC — тоже двойная ось.

Примечание I. В случае, если a (рис. 25) попадает на середину AA', c — на середину AC, d — на середину ED и т. д., то предыдущая теорема не будет применима, хотя порождающая призма будет прямой призмой с ромбическим основанием.

Примечание II. Если основной треугольник правильный и, более того, сетки наложимы, то симметрия станет шестерной, и совокупность перейдет в специальный класс, о котором речь будет идти в дальнейшем. Но если в этом случае сетки последовательно чередуются, то это обстоятельство не изменит общей симметрии совокупности.

Теорема LVII. Если сетка, нормальная двойной оси, имеет прямоугольную клетку, то совокупность обладает тремя взаимно перпендикулярными двойными осями.

Если сетки наложимы без чередования, порождающее тело есть прямоугольный нецентрированный параллелепипед и теорема очевидна. При чередовании сеток можно представить себе два различных варианта.

1. Точка a (рис. 24) попадает на середину гипотенузы основного треугольника.

2. Точка a попадает на середину одной из двух малых сторон.

В первом случае рис. 26 представляет проекцию чередующихся сеток на плоскость $z=0$. При этом плоскости, проведенные нормально к плоскости $z=0$ по прямым AC, ac, ED, . . ., являются, очевидно, плоскостями симметрии совокупности. Следовательно, стороны прямоугольника — двойные оси (теорема LII).

Во втором случае проекция представлена рис. 27, где $ACDE$ — клетка сетки $z=0$, $acde$ — клетка сетки $z=1$. Плоскости, проведенные по сторонам прямоугольника, являются плоскостями симметрии совокупности. Здесь надо принять за порождающее тело прямую призму с ромбическим основанием. Достаточно, в самом деле, взять за основание клетку ромбической сетки, расположенной в плоскости, нормальной к $z=0$, имеющую следом прямую $AaEe$.

Примечание. Если прямоугольник заменить квадратом, то симметрия становится четверной и совокупность переходит в класс, рассматриваемый в дальнейшем. Однако в случае чередования, представленного рис. 27, симметрия останется прежней.

Определение. Тридвойной называется симметрия, которая характеризуется тремя взаимно перпендикулярными двойными осями одного порядка, но разного рода.

Теорема LVIII. Во всякой совокупности с тридвойной симметрией ретикулярные плоскости, нормальные к двойным осям, имеют ромбические или прямоугольные клетки.

Пусть оси x, y, z приняты за двойные оси. Если совокупность повернуть на 180° вокруг оси x, то сетка $z=0$ должна совпасть сама с собой. Ось x должна быть двойной осью симметрии для сетки плоскости xy. Это подтверждает (теорема XIV, следствие II), что клетки сетки являются или ромбами или прямоугольниками. То же справедливо для сеток, расположенных в плоскостях xz и yz.

Следствие. Итогом предыдущих теорем является то, что всякая совокупность с тридвойной симметрией принадлежит одной из четырех следующих категорий:

1) прямой призме с ромбическим нецентрированным основанием, или прямой прямоугольной призме с двумя центрированными боковыми сторонами;

2) прямой центрированной призме с ромбическим основанием;

3) прямой нецентрированной прямоугольной призме;

4) прямой центрированной прямоугольной призме.

Во втором и четвертом случаях совокупность можно воспроизвести, заменив призму восьмигранником $ACDEA'A''$ (рис. 28) с ромбическим (второй случай) или прямоугольным (четвертый случай) основаниями.

Примечание. В «Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique» рассмотрено множество теорем о двойной симметрии. Их можно применять к совокупностям. При этом узел может рассматриваться как центр симметрии совокупности и место пересечения осей и плоскостей симметрии. Ограничимся здесь воспроизведением следующей теоремы (следствие теоремы XIII моего мемуара), прямое доказательство которой не представляет никаких трудностей: «когда существуют две взаимно перпендикулярные двойные оси, лежащие в одной плоскости, то всегда существует третья двойная ось, нормальная этой плоскости».

Теорема LIX. Совокупности, порожденные прямой центрированной или прямой нецентрированной призмой, обладают одной и той же системой рядов и ретикулярных плоскостей.*

Центрирование призмы есть не что иное, как включение узла в середине одной из ее четырех диагоналей. Если провести это включение во все призмы совокупности, используя диагонали, параллельные первоначально выбранной диагонали, то мы получим удвоенную совокупность, которая (в силу теоремы LIII) должна обладать одинаковой с первоначальной совокупностью системой рядов и ретикулярных плоскостей.

Тройная симметрия

Теорема LX. Во всякой совокупности, обладающей тройной осью, сетка ретикулярной плоскости, нормальной к оси, имеет в качестве клетки правильный треугольник.

Пусть M (рис. 11 и 29) — один из узлов совокупности, ближайший к тройной оси, но не совпадающий с ней. Через M проведем плоскость, нормальную оси и пересекающую ее в точке O. Строим вокруг точки O как центра правильный треугольник MNP. Если O — узел совокупности, то сетка изображена на рис. 11. Тогда M', N', P' — тоже узлы, а ось симметрии будет не только тройной, но, более того, шестерной осью. В самом деле, примем плоскость рис. 11 за плоскость xy. Ясно, что сетки плоскостей $z=1$, $z=2, \ldots$ ортогонально проектируются на ту же плоскость $z=0$. В самом деле, при переносе сетки $z=0$ на плоскость $z=1$ параллельно самой себе надо, чтобы ни один из узлов шестиугольника $MM'NN'PP'$ не приблизился к оси. В этом случае прямая, проведенная через O нормально к плоскости рисунка, будет шестерной осью. При сохранившихся условиях допустим в этой и в дальнейших теоремах, относящихся к просто тройной симметрии, что центр O (рис. 29) треугольника MNP не есть узел совокупности. Однако отсюда не следует, что ось, проведенная через эту точку, не должна содержать никакого узла.

---

* См. стр. 17. *Ред.*

Треугольник MNP (рис. 29), построенный таким образом, будет основным треугольником сетки. Следовательно, сетка будет обладать клеткой в виде правильного треугольника.

Теорема LXI. Во всякой совокупности с просто тройной симметрией две ретикулярные плоскости, нормальные к тройной оси и разделенные двумя промежуточными ретикулярными плоскостями, имеют сетки, ортогонально проектирующиеся одна на другую.

Первое доказательство. Нижнюю из этих четырех плоскостей примем за плоскость xy, имеющую уравнение $z=0$. Утверждаем, что сетка плоскости $z=3$ ортогонально проектируется на сетку $z=0$.

Пусть $ABCDEF$ (рис. 29) — правильный шестиугольник, вершины которого принадлежат сетке $z=0$. Из центра O, который тоже является узлом сетки, проведем на его плоскость нормаль, которая будет тройной осью системы (теорема XVII). Затем перенесем параллельно самой себе плоскость $z=0$ на плоскость $z=1$. Пусть MNP — основной треугольник сетки $z=1$. Поверхность этого треугольника пронзена нормалью, восставленной из точки O. Рисунок представляет ортогональную проекцию данного треугольника на плоскость $z=0$.

Если O совпадала бы с проекцией одного из узлов MNP сетки, то узлы соответствовали бы самим себе в плоскостях $z=0$, $z=1$ и симметрия была бы шестерной.

Этот случай исключается, ибо тройная симметрия нормали, восставленной из O, вынуждает O совпадать с центром треугольника MNP. Так как этот треугольник должен иметь стороны параллельными AB, AO, BO, то допускается только два взаимно обратных положения MNP, $M'N'P'$. Треугольник MNP, вершины которого совпадают, очевидно, с центрами треугольников AOF, BOC, DOE, может быть получен путем переноса, без вращения, треугольников AOB, COD или EOF. Треугольник $M'N'P'$, вершины которого являются центрами треугольников DOC, EOF, AOB, может быть получен переносом одного из треугольников BOC, DOE, FOA.

Предположим, что сетка $z=1$ имеет проекцию (пунктирными линиями) MNP. Тогда в ромбе $AOFG$ большая диагональ OG должна проходить через M. Отсюда будем иметь, по известным свойствам правильных треугольников, $OM=\frac{1}{3}OG$. Если соединить узел O с узлом, расположенным в плоскости $z=1$ и имеющим M в качестве проекции, то узел, который мы обозначим через M_1 (не указан на рисунке), определит наклонную OM_1, являющуюся началом ряда с параметром OM_1. Откладываем на том ряде длину $OG_3=3OM_1$. Узел G_3 (не указан на рисунке) должен проектироваться в G, и, более того, он будет принадлежать плоскости $z=3$. Отсюда ясно, что сетка $z=3$ проектируется на сетку $z=0$.

Второе доказательство. Пусть $OO'O''O'''$ (рис. 30) — тройная ось, проходящая через узел O, принадлежащий плоскости $z=0$. Эта ось пересекает плоскости $z=1$, $z=2$ и $z=3$, соответственно, в точках O', O'' и

O'''. Правильный треугольник MNP (рис. 29) — есть треугольная клетка сетки плоскости $z=1$. Он имеет свой центр в точке O' на тройной оси.

Через ось OO''' и один из трех узлов M', N', P', например M', проведем плоскость $M'OO'm'$, которая пересечет $N'P'$ в середине m' и будет перпендикулярна этой линии. На OP', ON' как сторонах построим ромб $ON'P'M''$, четвертый узел которого M'', принадлежащий совокупности, будет расположен в плоскости $z=2$. Кроме того, он будет принадлежать плоскости $M'OO'm'$.

Тогда будем иметь

$$M''O''=2O'm'=M'O',\quad O'''O''=OO',\quad OO'M'=90^\circ=O'''O''M''.$$

Следовательно, треугольники $OO'M'$, $O'''O''M''$ равны. Стало быть, $M''O'''$ равен и параллелен OM'. Отсюда O''' — узел совокупности (теорема XXX). Следовательно, узлы сетки $z=3$ ортогонально проектируются на узлы сетки $z=0$.

Примечание. Легко видеть, что пунктирная сетка $M'N'P'\ldots$ (рис. 29) имеет своей ортогональной проекцией сетку плоскости $z=2$. Если, напротив, сетка $M'N'P'\ldots$ имеет своей ортогональной проекцией сетку $z=1$, то $MNP\ldots$ будет иметь ортогональной проекцией сетку $z=2$.

Следствие. Если на ряде OG_3 уничтожить узел M_1 и следующий за ним узел на том же ряде и если проделать эту операцию на всякой системе рядов, параллельных OG_3, которые исходят из узлов сетки $z=0$, то тройная совокупность перейдет в шестерную, имеющую в качестве ядра прямую призму с основанием в виде ромба с углами в 60 и 120°. Наоборот, можно перейти от шестерной к тройной совокупности, втрое более богатой узлами, включением двух новых узлов на каждом параметре системы рядов, параллельных одной из двух больших диагоналей порождающей призмы с ромбическим основанием.

Важно заметить, что полученные таким образом совокупности различны в силу выбора одной или другой диагонали. Эти совокупности совпадают при повороте одной относительно другой на 180° вокруг тройной оси.

Следовательно, одна и та же шестерная совокупность может породить две тройные совокупности, различные по ориентировке в пространстве: прямую и обратную тройные совокупности.

Теорема LXII. Всякая совокупность с простой тройной симметрией имеет ядром ромбоэдр.

Возьмем рис. 30 и вспомним второе доказательство предыдущей теоремы. Повернем на 120° вокруг OO''' параллелограмм $OM'O'''M''$. Узел M' последовательно замещает N' и P', узел M'' — N'' и P''. Однако, так же как четыре узла O, N', P', M'' образуют плоский ромб, так и $OM'N'P''$, $OM'P'N''$ будут плоскими ромбами, равными предыдущему. Очевидно, что ромбами же будут и три верхние стороны. Таким образом, полученное геометрическое тело будет ромбоэдром. Так как оно не содержит никаких узлов ни внутри, ни на сторонах, ни на ребрах, то его

можно рассматривать как порождающий параллелепипед или ядро совокупности.

Следствие. Можно породить совокупность одним из элементарных тетраэдров $OM'N'P'$, $O'''M''N''P''$ (рис. 30). Достаточно четырех вершин, чтобы полностью определить всю систему совокупности. Однако, строго говоря, этот тетраэдр не является порождающим телом.

Теорема LXIII. Всякая совокупность с тройной симметрией обладает тремя плоскостями симметрии, проходящими через ось и перпендикулярными к трем направлениям сторон основного треугольника сетки в плоскостях, нормальных к осям.

На рис. 29 представлена ортогональная проекция трех сеток плоскостей $z=0$, $z=1$, $z=2$. Все другие сетки плоскостей $z=p$ проектируются на уже указанные плоскости. Сетки вида $z=3$ проектируются на сетку $z=0$, сетки вида $z=3j+1$ — на $z=1$, сетки вида $z=3j+2$ — на $z=2$. Пусть прямая OMG проведена через O нормально к стороне AF, и по этой прямой проведена плоскость, нормальная к плоскости рисунка. Эта плоскость, очевидно, будет плоскостью симметрии для каждой из трех сеток. Следовательно, она будет плоскостью симметрии для совокупности. Аналогично этому плоскости, проведенные через O нормально сторонам AB, BC, будут плоскостями симметрии. Кроме того, и тройная симметрия требует, чтобы число этих плоскостей было равно трем.

Плоскости, проведенные через O нормально к плоскости рисунка и параллельные сторонам, не будут плоскостями симметрии совокупности.

Примечание. Кристаллографы называют основным сечением ромбоэдра всякую плоскость, такую как $OM'm''O'''M''m'$ (рис. 30), которая проходит через геометрическую ось ромбоэдра и через две из шести его боковых вершин, таких как M', M''. Ось OO''' называется осью ромбоэдра. Отсюда следует, что три основных сечения ромбоэдра, служащего ядром совокупности, будут плоскостями симметрии совокупности.

Теорема LXIV. В совокупности с тройной осью симметрии всякая сторона правильного треугольника клетки сетки, нормальной к тройной оси, есть двойная ось совокупности.

Это, очевидно, следствие теорем LII и LXIII, что ясно видно из рис. 29. Рассматриваем сетку MNP как сетку плоскости $z=1$, а сетку $M'N'P'$ — как сетку плоскости $z=-1$. Тогда после поворота на 180° вокруг прямой AOD M перейдет в P', P — в M'. . . и т. д. Таким образом, сетка $z=1$ займет место $z=-1$ и наоборот. Аналогично этому сетки $z=p$ и $z=-p$ поменяются местами. Следовательно, AOD — двойная ось.

Четверная симметрия

Теорема LXV. Во всякой совокупности с четверной осью симметрии сетка ретикулярной плоскости, нормальной к четверной оси, обладает квадратной клеткой.

Пусть M (рис. 31) — один из узлов совокупности, расположенный на наименьшем расстоянии от четверной оси, но вне ее. Через M проведем плоскость, нормальную к оси и пересекающую ее в точке O. Затем в окружность с центром O радиусом OM впишем квадрат $MM'\ M''M'''$, одной из вершин которого является M. Четыре точки M, M', M'', M'''будут принадлежать сетке этой плоскости. Тогда если точка O будет узлом совокупности, то сетка будет иметь в качестве порождающего параллелограмма квадрат $OMmM'$ и квадрат $MM'M''M'''$ — в противоположном случае.

Теорема LXVI. Всякая совокупность с четверной осью симметрии порождается центрированной или нецентрированной прямой призмой с квадратным основанием.

Четверная ось обладает всеми свойствами двойной оси. Следовательно, ядро совокупности будет центрированной или нецентрированной прямой призмой с основанием в виде параллелограмма (теорема LV).

Если призма не центрирована, то все сетки плоскостей $z=p$ проектируются на плоскость $z=0$, нормальную к четверной оси.

Ортогональная проекция изображена на рис. 32. Если призма центрирована, то сетки плоскостей $z=2j$ проектируются на сетку плоскости $z=0$ с квадратной клеткой, но что касается плоскостей $z=2j+1$, то проекция их узлов попадет (рис. 32) на середину одной из трех сторон основного треугольника ABC (теорема LV, следствие I), но не в O' и не в O'', потому что в этом случае прямая призма, восстановленная на квадрате $ABCD$, как основании, имеет центрированные боковые стороны, а две другие — нецентрированные, что несовместимо с четверной осью, проведенной через узлы A, B, C, D. Следовательно, проекция сетки $z=1$ окажется в O, т. е. в центрах квадратов сетки $z=0$, как указано на рис. 33.

Следствие I. Теорема LIII может быть применена к четверным совокупностям. Совокупность, порожденная прямой центрированной призмой, и раздублированная совокупность, полученная устранением узлов, расположенных в центрах призм, обладают одинаковыми системами рядов и ретикулярных плоскостей.

Следствие II. Прямую центрированную призму с квадратным основанием можно заменить восьмигранником с квадратным основанием, изображенным на рис. 28. Однако он не является порождающим телом совокупности.

Теорема LXVII. В случае прямой нецентрированной призмы с квадратным основанием четыре боковых ребра будут четверными осями симметрии; прямые, проведенные из центров квадратов оснований параллельно этим осям, тоже будут четверными осями, но эти промежуточные четверные оси не пересекают никаких узлов совокупности.

Теорема LXVIII. В случае прямой центрированной призмы с квадратным основанием все четверные оси симметрии — ряды, имеющие параметром высоту призмы.

Теорема LXIX. Во всякой четверной совокупности существуют плоскости симметрии, проходящие через ось; одни направлены по сторонам,

другие — по диагоналям порождающего квадрата сетки, нормальной четверной оси.

Следствие. Каждая сторона и каждая диагональ порождающего квадрата сетки, нормальной четверной оси, — двойная ось совокупности (теорема LII).

Определения. Оси, параллельные сторонам квадрата, будут называться двойными осями первого рода. Оси, параллельные диагоналям квадрата, будут называться двойными осями второго рода. Первые имеют в качестве параметра сторону квадрата, вторые — диагональ. Эти четыре системы осей пересекаются под углами 45 и 90°. Все эти утверждения не требуют никакого доказательства.

Шестерная симметрия

Теорема LXX. Во всякой совокупности с шестерной осью симметрии сетка плоскостей, нормальных оси, имеет клетку в виде правильного треугольника. Ортогональные проекции различных сеток совпадают.

Пусть M (рис. 11) — один из узлов, взятых вне оси на наименьшем от нее расстоянии. Проведем через M плоскость, нормальную к оси и пересекающую ее в точке O. Построим правильный шестиугольник $MM'NN'PP'$, имеющий центром точку O. Каждая из его вершин и центр O будут узлами совокупности. Эта плоскость будет принята за плоскость xy, имеющую уравнение $z=0$.

Для ретикулярных плоскостей $z=1$, $z=2$, . . . применимо то же доказательство. Пересечение каждой из этих плоскостей с осью будет узлом. Следовательно, ортогональные проекции этих плоскостей совпадают с сеткой плоскости $z=0$. К тому же очевидно, что эти сетки имеют клетку в виде правильного треугольника.

Следствие. Шестерная ось есть ряд совокупности, и этот ряд сопряжен со своей нормальной плоскостью.

Теорема LXXI. Всякая совокупность с шестерной осью симметрии порождена прямой призмой с основанием в виде правильного треугольника.

Это — следствие предыдущего следствия. Если на ромбе $OMM'N$ (рис. 11) восставить прямую призму с высотой, равной интервалу, разделяющему плоскости $z=0$ и $z=1$, то это тело будет порождающим параллелепипедом совокупности, потому что OM и ON — два сопряженных ряда сетки плоскости $OMM'N$. Прямая призма той же высоты и с основанием в виде правильного треугольника тоже может быть принята за порождающее тело совокупности.

Следствие. Всякий ряд, параллельный шестерной оси, — тоже шестерная ось. Всякая прямая, параллельная шестерной оси и проведенная через центр одного из правильных треугольников сетки, есть промежуточная тройная ось симметрии. Всякая прямая, параллельная шестерной оси и проведенная через середину одной из сторон правильного треугольника сетки $z=0$, есть промежуточная двойная ось. Все ретикулярные плоско-

сти, нормальные шестерной оси, — плоскости симметрии. Все ретикулярные плоскости, проходящие через шестерную ось и параллельные сторонам треугольника сетки $z=0$, — плоскости симметрии. Существует три различные системы таких плоскостей. Всякая ретикулярная плоскость, проходящая через шестерную ось перпендикулярно сторонам треугольников сетки $z=0$, — тоже плоскость симметрии. Существует три различные системы таких плоскостей. В каждом правильном треугольнике сетки $z=0$ каждая сторона — двойная ось симметрии совокупности. Существует три системы осей одного рода такого вида. В каждом таком треугольнике каждая нормаль к стороне, проведенная от противоположной вершины, есть тоже двойная ось симметрии. Существует три системы таких осей, и все оси одного рода отличаются от осей предыдущего рода.

Определение. Оси, параллельные сторонам, будут называться двойными осями первого рода. Оси, перпендикулярные сторонам, параметром которых является диагональ порождающего ромба сетки $z=0$, будут называться двойными осями второго рода. Шесть систем осей пересекаются между собой под углами 30, 60, 90°.

Теорема LXXII. Если в совокупности с простой тройной симметрией изъять те сетки ретикулярных плоскостей, нормальных к оси, которые имеют не делящийся на три порядковый номер, то получим совокупность с шестерной симметрией. Все ряды и ретикулярные плоскости первоначальной совокупности перейдут в новую совокупность.

Первая часть предложенной теоремы уже доказана (теорема LXI, следствие). Указанное изъятие приводит к исчезновению двух из трех узлов на каждой большой диагонали прямой порождающей призмы с ромбическим основанием. Однако мы видели (теорема LIII), что включение новых узлов или уничтожение вставленных узлов в системе параллельных рядов не изменяет различных систем рядов и ретикулярных плоскостей. Во всяком случае не изменяется направление этих систем.

Уничтожение плоскостей с не делящимся на три индексом преобразует системы рядов, уменьшая втрое их плотность или увеличивая втрое их параметр. Это уничтожение преобразует системы ретикулярных плоскостей, либо утраивая плотность слоев, либо утраивая площадь порождающих клеток сеток этих плоскостей.

Тричетверная симметрия

Следующая теорема и определение на стр. 102 указывают, что надо понимать под тричетверной симметрией.

Теорема LXXIII. Если совокупность имеет две непараллельные оси тройной симметрии, то она обладает четырьмя такими осями, расположенными как большие диагонали куба; они пересекаются под углом 70°31′44″, косинус которого равен $\frac{1}{3}$. Совокупность не может обладать большим числом таких осей.

Пусть OA и OB (рис. 34) — две заданные оси симметрии, исходящие из одного узла O. Продолжим их до встречи с поверхностью сферы с радиусом, равным единице, и центром в точке O. Проведем дугу большого круга AB и повернем систему OAB на 120° вокруг OB так, чтобы она заняла положение OCB, затем на 120° вокруг OC и т. д. Этим путем мы легко придем к доказательству того, что оси объединяются как четыре диагонали куба или десять диагоналей правильного додекаэдра. Но если обозначить через ω (рис. 34) центр полученного таким образом правильного сферического многогранника $ABCD$. . ., то $O\omega$ должна быть такой осью симметрии, чтобы самосовпадение узлов имело место после поворота на угол, равный $A\omega C$ вокруг $O\omega$. Однако в случае правильного додекаэдра будем иметь $A\omega C=144°$, т. е. угол, при повороте на который никогда не будет достигнуто самосовпадение узлов (следствие теоремы XLVI). Следовательно, объединение десяти тройных осей как диагоналей правильного додекаэдра должно быть исключено. Тех читателей, которые предпочитают более развернутое доказательство, я отсылаю к работе: «Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique». Здесь я ограничусь только упоминанием доказанных утверждений.

1. Когда в многограннике существуют две оси высшего порядка, то это сфероэдрический многогранник (теорема XL моего мемуара).

2. Существует две группы сфероэдрических многогранников: а) четверотройные, тройные оси которых расположены наподобие диагоналей куба; б) десятитройные, тройные оси которых расположены наподобие десяти диагоналей правильного додекаэдра (следствие теоремы XLIII).

3. Десятитройные оси имеют десять пятерных осей (теорема LII того же мемуара).

Так как совокупность не может обладать пятерной осью, то она не может иметь десять тройных осей.

Отсюда ясно, что всякая совокупность, обладающая двумя тройными осями, находится в категории четверотройных многогранников. То же справедливо для специальной категории четверотройных многогранников с центром симметрии, потому что каждый узел совокупности может быть принят за центр симметрии. Следовательно, теорема полностью доказана.

Теорема LXXIV. Плоскость, соединяющая две непараллельные тройные оси, есть плоскость симметрии совокупности.

Пусть OA (рис. 35) — одна из этих осей и OB — вторая. Из узла O единичным радиусом OA опишем сферическую поверхность. Проведем такие дуги большого круга AB, AC, AD, что $BAC=120°$, $BAD=120°$, $AC=AD=AB$. Через OA проходят три плоскости симметрии (теорема LXIII), делящие сферу по трем большим кругам. Если эти плоскости не направлены по AB, AC, AD, то они будут иметь следующие направления Ab, Ac, Ad; B, C, D будут гомологичными B', C', D'. Стало быть, не только OB, OC, OD будут тройными осями, но ими будут также OB', OC', OD', что противоречит предыдущей теореме. Следовательно, OAB, OAC,

OAD — плоскости симметрии, более того, они будут тремя главными сечениями порождающего ромбоэдра с осью, направленной по OA.

Теорема LXXV. Биссектрисы углов 70°31′44″, 109°29′16″, образованных двумя тройными осями, являются осями симметрии для сетки ретикулярной плоскости, объединяющей эти две тройные оси. Доказательство этой теоремы легко выводится из принципов, изложенных в «Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique».

В самом деле, биссектриса тупого угла между двумя тройными осями четверотройного многогранника всегда двойная или четверная ось симметрии многогранника (теорема XLIV «Mémoire»). Следовательно, эта биссектриса есть ось симметрии для сеток всех ретикулярных плоскостей, которые проходят через эту прямую. Биссектриса острого угла, образованного тройными осями, тоже будет осью симметрии сетки этой плоскости (теорема XII).

Задача XXIX. Найти совокупность, обладающую четырьмя тройными осями симметрии.

Дана некоторая совокупность с ромбоэдрическим ядром. Пусть OO' (рис. 36) — тройная ось параметра OO'; O, O' — два узла; одно из трех основных сечений принято за плоскость чертежа. Пусть $AOA'O'$ — основное сечение. Проведем через узлы O, A, A', O' воображаемые плоскости GOH, AmB, $A'm'B'$, $G'O'H'$, нормальные оси. Этим плоскостям соответствуют уравнения $z=0$, $z=1$, $z=2$, $z=3$. Следовательно, они делят параметр оси OO' на три равные части.

Введем обозначения: μ — угол ромбоэдра, т. е. угол между двумя сторонами ромбоэдра, проходящими либо через O, либо через O'; a — параметр двойной оси совокупности, т. е. длина стороны правильного треугольника, образующего клетки сетки плоскостей $z=0$, $z=1, \ldots$; d — параметр тройной оси, т. е. длина OO'.

Ясно, что для любого μ ромбоэдра

$$Am = A'm' = \sqrt{\frac{1}{3}}\,a,\quad Om = mm' = O'm' = \frac{1}{3}\,d.$$

Угол μ зависит от отношения между параметрами a и d, и эта зависимость выражается формулой:

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\mu = \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{3}. \qquad (62)$$

Исходя из данных предварительных сведений, которые применимы к любым тройным совокупностям, определяем условие, при выполнении которого совокупность будет обладать четырьмя тройными осями.

За плоскость рисунка примем плоскость, соединяющую OO' со второй тройной осью OA. Известно следующее.

1. Эта плоскость будет одним из трех основных сечений ромбоэдра к оси OO' (теорема LXXIV).

2. Должно выполняться условие (теорема LXXIII) $\cos mOA = \frac{1}{3}$, откуда следует, что $OA = 3Om = OO'$.

3. Биссектриса OM угла AOO' есть ось симметрии сетки плоскости рисунка (теорема LXXV).

Отсюда видно, что если провести AM параллельно OO', $O'M$ — параллельно OA, то фигура $OAMO'$ будет ромбом, четыре вершины которого будут узлами сетки плоскости рисунка, а диагонали OM и AO' — осями симметрии сетки (теорема LXXV).

Разделим OA на три равные части On, nn', $n'A$ плоскостями, нормальными к OA, проходящими через O, n, n', A и пересекающими биссектрису OM в точках C, B', N. Узлы нашей сетки могут, с одной стороны, принадлежать только системе рядов $G'O'H'$, $A'm'B'$, BmA и, с другой стороны, только системе рядов APN, $n'RB'Q$, nCO'. Следовательно, эти узлы нужно искать только в точках пересечения этих прямых. С самого начала очевидно, что четыре точки R, P, Q, D' не могут принадлежать совокупности. Если, например, D' будет принадлежать совокупности, то поворотом на 120° вокруг OO' она может быть приведена на место и в пространстве. Здесь она будет иметь в качестве проекции на плоскость рисунка точку, расположенную внутри слоя, содержащегося между двумя плоскостями, проведенными через O и n нормально к OA, что невозможно. Следовательно, точки C, B', N могут быть только узлами внутри ромба $OAMO'$. Стало быть, число решений сводится к трем, и параметр ряда $OCB'M$ равен или OM, или $OB' = \frac{1}{2} OM$, или $OC = \frac{1}{4} OM$.

Первое решение. Параметр ряда биссектрисы равен OM. Параллелограмм $AOA'O'$ есть основное сечение ромбоэдра, имеющего осью OO'. Этот ромбоэдр полностью определен уравнением

$$\overline{Am}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{Om}^2 = \frac{8}{9} d^2.$$

Отсюда находим

$$a^2 = 3\overline{Am}^2 = \frac{8}{3} d^2, \quad \text{tang}^2 \frac{1}{2} \mu = 3, \quad \mu = 120^\circ.$$

Совокупность, зависящая от ромбоэдра с углом 120°, который мы только что вывели, может быть получена центрированием всех кубов совокупности с кубическим ядром. В самом деле, точка O может рассматриваться как самый нижний узел куба, центр которого был бы в точке O', а верхний узел — в точке O''. Тогда параллелограмм $OA'O''M$ был бы основным сечением по диагонали OO''. Узел A был бы центром одного из шести кубов, которые размещаются рядом с $OA'O''M$, прикасаясь к каждой его стороне.

Второе решение. Параметр ряда биссектрисы равен OB'. Прямоугольник $OB'O'B$ есть основное сечение ромбоэдра, имеющего OO' в качестве оси.

Ребро $O'B'$ ромбоэдра будет нормалью к стороне, имеющей следом $O'B$. Ясно, что соответствующий ромбоэдр есть куб. Выразим этот результат в формулах:

$$a^2 = 3\overline{Bm}^2 = \frac{3}{4}\overline{Am}^2 = \frac{2}{3}d^2, \quad \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mu = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \mu = 90^\circ.$$

Третье решение. Параметр ряда биссектрисы равен OC. В этом случае O, C, B', N, M — узлы совокупности. Основное сечение $OCO'C'$. Тогда имеем

$$a^2 = 3\overline{Cm}^2 = \frac{3}{4}\overline{Bm}^2 = \frac{1}{6}d^2,$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mu = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad \mu = 70^\circ 31' 44''.$$

Исходя из значения $70^\circ 31' 44''$ двугранного угла порождающего ромбоэдра, можно сказать, что он ограничивается сверху и снизу двумя правильными тетраэдрами. При этом

$$\overline{OC}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{Cm}^2 = \frac{1}{9}d^2 + \frac{1}{18}d^2 = \frac{1}{6}d^2 = a^2.$$

Это доказывает, что три боковые стороны этого тетраэдра — правильные треугольники.

Узлы C, C' занимают центры двух сторон куба с основным сечением $OBO'B'$. Четыре узла, ортогонально проектирующиеся в D и D' на плоскость рисунка, занимают центры четырех других сторон куба. Стало быть, настоящая совокупность порождена кубом с шестью центрированными сторонами.

Следовательно, только куб, ромбоэдр в 120° (касательный извне к кубу, говоря языком кристаллографов) и ромбоэдр в $70^\circ 31' 44''$ (касательный изнутри к кубу) — единственные ромбоэдры, которые могут быть ядром совокупности, обладающей четырьмя тройными осями.

Теорема LXXVI. Совокупность, обладающая четырьмя тройными осями, должна иметь три четверные оси.

Три ромбоэдра, которые мы только что получили, можно заменить центрированным кубом, нецентрированным кубом и кубом с шестью центрированными боковыми сторонами. Однако каждое из этих тел обладает, очевидно, тремя четверными взаимно перпендикулярными осями. Это линии, попарно соединяющие центры противоположных сторон.

Теорема LXXVII. Если существуют две четверные оси, то общее число таких взаимно перпендикулярных осей будет равно трем, но не больше.

Эта теорема доказывается так же, как теорема XXIII. Пересечение осей со сферой единичного радиуса образует систему из шести точек, расположенных наподобие вершин вписанного октаэдра. Это непосредственное следствие теоремы XLI «Mémoire sur les Polyèdres de forme symètrique».

Задача XXX. Найти совокупность, обладающую тремя четверными осями.

Порождающее тело любой совокупности с четверной осью есть центрированная или нецентрированная прямая призма с квадратным основанием (теорема XVI). Пусть $OACB$ (рис. 37) — основание этой призмы, где O, A, C, B — узлы совокупности; a — параметр рядов, направленных по сторонам квадрата; d — параметр рядов, нормальных плоскости квадрата. Две незанятые четверные оси всегда расположены в плоскости $OACB$ (теорема LXXVII). Оси направлены по OA, OB или OC, GOE. В противном случае двойная симметрия, которой обладают эти последние линии (теорема LXIX, следствие), удваивает число четверных осей, что противоречит теореме LXXVII. Из этого следуют три различных решения.

Первое решение. Если призма не центрирована, то оси, расположенные в плоскости рисунка, не могут быть OC и GOE, потому что вращение на 90° вокруг OC приведет A внутрь бесконечной призмы, имеющей основанием $OACB$, которая должна остаться пустой. Но, принимая OA, OB за четверные оси и поворачивая $OACB$ на 90° вокруг OA, видим, что $d=a$. Стало быть, в этом случае порождающее тело — нецентрированный куб.

Второе решение. Призма центрирована. Пусть D — ее центр (не изображен на рисунке), ортогонально проектирующийся в центр d квадрата $OACB$. Если незанятые четверные оси направить по OA, OB, то вращение $OACB$ вокруг OA на 90° приводит к тому, что $a=d$. Точка D будет занимать тогда центр куба, имеющего $OACB$ своим основанием. Порождающее тело — центрированный куб.

Третье решение. Если OC и GOE являются незанятыми четверными осями, то при вращении на 90° вокруг OC A перейдет в D. Отсюда $Dd=$ $=Ad=a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Удвоив эту высоту, будем иметь высоту порождающей призмы $d=a\sqrt{2}$. Но если квадрат $OCFE$ принять за основание, то призма перейдет в куб с шестью центрированными сторонами.

Следствие. Три вида совокупностей, полученных при решении задачи XXX, совпадают с тремя видами совокупностей, полученных при решении задачи XXIX. Отсюда следует, что совокупности, обладающие тремя осями четверной симметрии, обладают четырьмя осями тройной симметрии и наоборот.

Теорема LXXVIII. Всякая совокупность, обладающая одновременно тройной и четверной осями, обладает тремя четверными и четырьмя тройными осями симметрии.

Три четверные оси — это следствие симметрии, свойственной заданной тройной оси. Следовательно, совокупность обладает также четырьмя тройными осями (предыдущее следствие).

Определение. В дальнейшем будем называть т р и ч е т в е р н ы м и совокупностями, существование которых мы только что установили, три вида совокупностей, обладающих одновременно четырьмя тройными и тремя четверными осями симметрии. Симметрия, характеризующая такие совокупности, будет называться т р и ч е т в е р н о й. Непосредственно

присутствие этих семи осей достаточно, чтобы констатировать тричетверную симметрию.

Теорема LXXIX. Всякая тричетверная совокупность обладает шестью двойными осями, делящими пополам прямые углы между взятыми попарно четверными осями.

Пусть $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ (рис. 42) — три четверные оси, пересекающиеся в узле O. Симметрия четверной оси Oz требует, чтобы две биссектрисы углов xOy, $x'Oy$ были двойными осями (теорема LXIX, следствие). То же относится к четырем другим биссектрисам.

Теорема LXXX. Всякая тричетверная совокупность обладает тремя плоскостями симметрии одного рода, попарно связывающими четверные оси, и шестью плоскостями симметрии другого рода, попарно связывающими тройные оси.

Из существования трех четверных осей следует, что ретикулярные плоскости, нормальные к этим осям, будут плоскостями симметрии (теорема LII). Из существования шести двойных осей следует присутствие шести плоскостей симметрии, которые им нормальны. Наконец, установлено (теорема LXXIV), что плоскость, соединяющая две тройные оси, будет плоскостью симметрии. Очевидно, что такая плоскость нормальна к одной из шести двойных осей симметрии.

Примечание. Чтобы представить себе взаимное расположение этих осей и плоскостей, возьмем куб, центр которого совпадает с точкой их пересечения. Четыре диагонали куба — это тройные оси; три прямые, попарно соединяющие центры противоположных граней, — это четверные оси; шесть прямых, попарно соединяющих середины противоположных ребер, — двойные оси; плоскости, проведенные через центр параллельно граням, — три плоскости симметрии первого рода; плоскости, проведенные через противоположные ребра, — шесть плоскостей симметрии второго рода.

Можно также разделить поверхность сферы на восемь равносторонних сферических треугольников посредством трех взаимно перпендикулярных основных сечений или больших кругов. Вершины $Q, Q', Q'', \ldots$ этих треугольников будут выходами четверных осей. Центры T, T', $T''\ldots$ тех же треугольников будут выходами тройных осей, а в серединах B, B', $B''\ldots$ их сторон будут выходы двойных осей.

Ограничившись рассмотрением наименьших углов, образованных этими осями, и назвав O центром сферы, получим следующие угловые соотношения:

$$\begin{aligned} QOQ' &= 90^\circ, & QOT &= 54^\circ 44' 8'', \\ TOT' &= 70^\circ 31' 44'', & QOB &= 45^\circ, \\ BOB' &= 60^\circ, & TOB &= 35^\circ 15' 52''. \end{aligned}$$

Теорема LXXXI. Если в совокупности существует шестерная ось симметрии, то в ней могут существовать только двойные оси симметрии, расположенные в плоскости, нормальной к шестерной оси.

Сначала надо установить несовместимость двух шестерных осей. Не существует такого правильного многогранника, плоские углы которого объединялись бы по шесть в каждой вершине (см. доказательства теорем LXXIII и LXXVII или, еще лучше, теорему XLI из «Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique»).

Если в совокупности имеется хотя бы одна тройная, четверная или двойная ось, косо расположенная к шестерной оси, то симметрия, свойственная этой оси, вынудит повториться шестерную ось, и тогда будет, по меньшей мере, две шестерные оси, что невозможно в силу предыдущего замечания.

Классификация симметричных совокупностей

Можно выделить семь классов совокупностей, которые мы обозначим следующим образом.

Первый класс — тричетверные совокупности — три четверные, четыре тройные, шесть двойных осей. Оси расположены попарно на линиях, соединяющих в кубе центры противоположных граней, противолежащие вершины и середины противолежащих ребер. Три плоскости симметрии нормальны к четверным осям и шесть плоскостей — к двойным осям симметрии. Три вида размещения узлов: 1) куб; 2) центрированный куб, который может быть заменен ромбоэдром в 120°; 3) куб с центрированными сторонами, который можно заменить ромбоэдром в 70°31′44″ или центрированной призмой с квадратным основанием и высотой, равной стороне основания, умноженной на $\sqrt{2}$. Правильные тетраэдры или правильный октаэдр тоже могут образовать третий вид.

Второй класс — шестерные совокупности. Шестерная ось нормальна к ретикулярной плоскости, сетка которой обладает клеткой в виде правильного треугольника. Три двойные оси первого рода параллельны сторонам основного треугольника, три двойные оси второго рода параллельны его высотам. Одна плоскость симметрии нормальна к шестерной оси, три плоскости симметрии — к двойным осям первого рода и три плоскости симметрии другого рода — к двойным осям второго рода. Единственный вид размещения узлов указан шестью вершинами прямой призмы с основанием в виде правильного треугольника. Порождающий параллелепипед — прямая призма с основанием в виде ромба с углами в 60 и 120°.

Третий класс — четверные совокупности. Четверная ось нормальна к ретикулярной плоскости сетки с квадратной клеткой. Две двойные оси первого рода параллельны сторонам квадрата клетки сетки, две двойные оси второго рода параллельны диагоналям этого квадрата. Плоскость симметрии нормальна четверной оси, две плоскости симметрии одного рода — двойным осям первого рода и две плоскости симметрии другого рода — двойным осям второго рода. Два вида размещения узлов: 1) прямая призма с квадратным основанием; 2) прямая центрированная призма

с квадратным основанием, которую можно заменить прямым восьмигранником с квадратным основанием.

Четвертый класс — тройные совокупности. Тройная ось нормальна к ретикулярной плоскости сетки с клеткой в виде правильного треугольника. Три двойные оси одного рода параллельны сторонам основного треугольника; три плоскости симметрии, проходящие через тройную ось, перпендикулярны двойным осям. Единственный вид размещения характеризуется восемью вершинами ромбоэдра.

Пятый класс — тридвойные совокупности — три взаимно перпендикулярные двойные оси симметрии разных родов. Три плоскости симметрии, попарно их соединяющие.

Четыре вида размещения узлов: 1) прямая призма с прямоугольным основанием; 2) прямая центрированная призма с прямоугольным основанием, которую можно заменить прямым восьмигранником с прямоугольным основанием; 3) прямая призма с ромбическим основанием, которую можно заменить прямой призмой с центрированным прямоугольным основанием или прямой призмой с центрированными двумя противолежащими боковыми сторонами; 4) прямая центрированная призма с ромбическим основанием, которую можно заменить прямым восьмигранником с ромбическим основанием, три основных сечения которого — ромбы.

Шестой класс — двойные совокупности — единственная двойная ось симметрии и единственная плоскость симметрии, нормальная к оси. В качестве клетки сетка имеет равнобедренный треугольник. Два вида размещения узлов: 1) прямая нецентрированная призма с основанием в виде параллелограмма; 2) прямая центрированная призма с основанием в виде параллелограмма, которую можно заменить прямой призмой с основанием в виде параллелограмма и двумя центрированными боковыми сторонами.

Седьмой класс — асимметричные совокупности — никаких осей, никаких плоскостей симметрии. Единственный вид размещения узлов характеризуется косой призмой с основанием в виде параллелограмма.

Следующая таблица указывает число осей симметрии в различных классах совокупностей.

Совокупности	Число осей				
	шестерных	четверных	тройных	двойных	всего
Тричетверные . . .	0	3	4	6	13
Шестерные	1	0	0	6	7
Четверные	0	1	0	4	5
Тройные	0	0	1	3	4
Тридвойные	0	0	0	3	3
Двойные	0	0	0	1	1
Асимметричные . .	0	0	0	0	0

Исходя из таблицы, ясно, что для полного определения каждого класса достаточно знать общее число осей симметрии. Оно равно одному из семи чисел: 13, 7, 5, 4, 3, 1, 0. Первое из этих чисел выражает наивысший вид симметрии, который может дать совокупность. Относительно родов осей заметим, что четверные оси всегда одного рода, тройные оси всегда одного рода. Двойные оси не всегда одного рода. Двойными осями первого рода назовем оси с наименьшим параметром, двойными осями второго рода — оси со средним по величине параметром; оси третьего рода имеют наибольший параметр.

Следующая таблица представляет распределение двойных осей по родам для каждого из шести классов.

Совокупности	Двойные оси			Общее число плоскостей симметрии
	первого рода	второго рода	третьего рода	
Тричетверные . . .	6	0	0	9
Шестерные	3	3	0	7
Четверные	2	2	0	5
Тройные	3	0	0	3
Тридвойные	1	1	1	3
Двойные	1	0	0	1

К этому надо добавить число плоскостей симметрии, характеризующих класс; каждой из них соответствует двойная, четверная или шестерная ось, которая ей нормальна.

Относительно плоскостей симметрии одного или разных родов будем руководствоваться следующим правилом: «осям четного порядка и одного рода всегда соответствуют плоскости симметрии одного рода и наоборот. Если оси симметрии разных родов, то плоскости симметрии, им нормальные, тоже разных родов».

Общее число плоскостей симметрии всегда равно общему числу четных осей, которые существуют в совокупности. Наибольшее число плоскостей симметрии равно девяти. Во втором классе (шестерные совокупности) параметр двойных осей первого рода равен единице, а второго рода — равен $\sqrt{3}$. В третьем классе (четверные совокупности) параметр двойных осей первого рода равен единице, а второго рода — равен $\sqrt{2}$. В пятом классе эти соотношения не определены (тридвойные совокупности).

Символические обозначения симметрии совокупностей

Если через один узел совокупности провести все оси и плоскости симметрии, которые ей свойственны, то можно рассматривать совокупность как многогранник с центром в выбранной точке.

Центром симметрии многогранника назовем центральную точку, расположенную таким образом, что, соединив с ней некоторую вершину многогранника и продолжив соединяющую прямую в противоположную сторону от центра на величину, равную ей самой, получим новую точку, которая будет вершиной многогранника, гомологичной первоначальной вершине по отношению к центру симметрии. Не каждый многогранник имеет такой центр симметрии, и наличие его приводит к необходимости учитывать особые элементы симметрии.

В любой совокупности все узлы — центры симметрии. Это множество центров связано с множеством осей симметрии, параллельных заданной оси.

К совокупностям можно применить те обозначения, которые применялись для представления обычных многогранников («Mémoire sur les Polyèdres de forme symétrique»).

Буква C указывает на наличие в совокупности центра симметрии. Этот символ будет, очевидно, встречаться во всех символах симметрии совокупностей. Буквы Λ, L, L' будут обозначать оси симметрии: Λ^2, L^2, L'^2 — двойные оси, Λ^3, L^3,. . . — тройные оси и т. д. Верхний индекс указывает порядковый номер симметрии оси. Буква Λ применяется только для обозначения главной оси, единственной в своем роде.

Число осей одного рода указывается коэффициентом перед символом оси. Например, обозначение (Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$) указывает на существование одной шестерной оси, соединенной с тремя двойными осями одного рода и тремя двойными осями другого рода.

Плоскости симметрии обозначаются символами Π, P, P'; Π — обозначает плоскость симметрии, нормальную главной оси. Символы P^q, P'^q, $P^{q'}$ применяются для плоскостей, нормальных осям L^q, L'^q, $L^{q'}$. Число плоскостей обозначается коэффициентом перед символом. Так, например, (Π, $3P^2$, $3P'^2$) указывает на наличие плоскости симметрии, нормальной главной оси, трех плоскостей одного рода, нормальных осям $3L^2$, и трех плоскостей симметрии, нормальных осям $3L'^2$.

Семь классов совокупностей будут иметь следующие символы:

Совокупности	Символ их симметрии
Тричетверные	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$
Шестерные	Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$
Четверные	Λ^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P^2$ $2P'^2$
Тройные	Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$
Тридвойные	Λ^2, L_2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2
Двойные	Λ^2, C, Π
Асимметричные	oL, C, oP

Важно заметить, что здесь буквы C, Λ, L, Π, P представляют не только точку, или только линию, или только плоскость, как это было для много-

гранников, но систему точек, или систему параллельных осей, или систему взаимно параллельных подобных плоскостей.

Надо добавить, что в совокупностях существуют центры симметрии, не совпадающие с узлами совокупности. Эти центры симметрии аналогичны промежуточным осям или промежуточным плоскостям симметрии, о которых мы говорили на стр. 60 и 84. Стало быть, в асимметричном классе существует восемь различных систем центров симметрии совокупности: 1) узлы совокупности; 2) центры порождающих параллелепипедов; 3, 4 и 5) центры граней этих параллелепипедов, которые группируются в три различные категории; 6, 7 и 8) центры ребер, которые тоже группируются в три различные категории.

По этим вопросам можно найти ответ в работе Ф. Бретона (Journal de Mathématiques de M. Liouville, t. X, p. 430).

Мы ограничимся рассмотрением центров, совпадающих с узлами, также как были приняты во внимание только оси симметрии, проходящие через узлы.

Различные виды размещений узлов в одном и том же классе совокупностей

Можно было заметить, что в одном и том же классе совокупности группируются совершенно с различными видами расположения узлов, хотя оси и плоскости симметрии остаются для них одними и теми же. Такие совокупности будем называть различными *видами класса*.

Франкенгейм, выполнивший такие прекрасные исследования по кристаллографии, ввел подразделения такого же рода, обозначив *вид* словом *порядок*. Но термин «вид», мне кажется, предпочтительнее, как исключающий геометрические параллели, которым он соответствует. В силу тех же рассуждений я отбросил обозначение «тип», которым я пользовался в сообщении, сделанном на Société Philomathique 17 III 1849 г.

Две совокупности одного класса принадлежат различным видам симметрии, если в результате непрерывного преобразования расстояний между узлами одной из совокупностей при полном сохранении ее элементов симметрии у нее наблюдается частичное совпадение с другой совокупностью. Так, например, совокупности, порожденные кубом и центрированным кубом, частично совместимы, ибо часть второй совокупности, образованная центрами порождающих кубов, остается вне совмещения.

Две совокупности принадлежат одному виду, если непрерывными изменениями межузловых расстояний их можно привести в совпадение.

Если три оси, параметры которых претерпевают изменения, — сопряженные ряды в каждой из совокупностей, то эти совокупности всегда принадлежат одному виду размещения. Действительно, наложение узла в узел сопряженных гомологичных рядов приводит к их полному совпадению.

Все различные виды одного класса могут быть получены из одного из видов того же класса путем добавления новых узлов или в центре порождающего тела, или в центрах его сторон. Добавим несколько новых деталей к тому, что было сказано о делении классов или систем на виды.

Тричетверная система имеет три различных вида:

1) гексаэдрический вид: порождающее тело — куб с молекулой в каждой вершине (см. стр. 104);

2) октаэдрический вид: порождающее тело — правильный октаэдр с молекулой в каждой вершине можно заменить правильным тетраэдром, имеющим эквивалентную форму, или ромбоэдром с углом 70° 31′ 44″. Этот вид происходит из куба центрированием всех его шести граней. Новый куб имеет молекулу в каждой вершине и в центре каждой грани. Симметрия тела, полученного таким образом, более очевидна, чем все другие эквивалентные формы;

3) додекаэдрический вид: порождающее тело — ромбододекаэдр с молекулой в своих четырнадцати вершинах и в центре. Его можно получить из куба, центрируя его. Если соединить прямыми восемь вершин такого куба с шестью центрами соседних кубов, то получится центрированный ромбододекаэдр. За порождающее тело можно также принять ромбоэдр с углом 120°. Однако симметрия совокупности не будет так бросаться в глаза, как для центрированного куба.

Шестерная система имеет единственный вид (см. стр. 104).

Четверная система делится на два различных вида:

1) гексаэдрический вид: порождающее тело — прямая призма с квадратным основанием;

2) октаэдрический вид: порождающее тело — прямой октаэдр (восьмигранник) с квадратным основанием. Этот октаэдр получается при центрировании прямой призмы с квадратным основанием. Соединив этот центр с четырьмя вершинами основания и сделав так же с нижележащей призмой, получим требуемое.

Тройная система имеет единственный вид (см. стр. 105).

Тридвойная система делится на четыре различных вида:

1) гексаэдрический прямоугольный вид: порождающее тело; — прямая призма с прямоугольным основанием, с молекулой в каждой из восьми вершин. Сетки трех плоскостей симметрии имеют прямоугольные клетки;

2) гексаэдрический ромбический вид: порождающее тело — прямая призма с ромбическим основанием. Выводится из предыдущего вида центрированием двух противоположных сторон, например оснований. Центрируя сетку с прямоугольными клетками, получим сетку с ромбическими клетками. В этом случае сетки двух вертикальных плоскостей симметрии имеют прямоугольную клетку, но третья сетка — ромбическую. Оси, нормальные этой последней плоскости, могут быть, соответственно, первого, второго, третьего родов;

3) октаэдрический прямоугольный вид: порождающее тело — прямой октаэдр (восьмигранник) с прямоугольным основанием. Его можно по-

лучить из прямой призмы с тем же основанием и высотой, центрируя последнюю и соединяя полученный узел с четырьмя узлами прямоугольника основания. Последние соединяем с центром нижележащей призмы. Сетки трех плоскостей симметрии имеют прямоугольные клетки;

4) октаэдрический ромбический вид: порождающее тело — прямой октаэдр (восьмигранник) с ромбическим основанием. Его можно получить из гексаэдрической прямоугольной призмы центрированием шести ее граней. Эти шесть новых узлов, соединенные попарно, дадут прямой октаэдр с ромбическим основанием. Сетки трех плоскостей симметрии имеют ромбические клетки.

Ясно, что эти четыре вида соответствуют: прямой нецентрированной призме, прямой призме с центрированными основаниями, центрированной прямой призме, призме с центрированными сторонами и основаниями.

Двойная система имеет два различных вида:

1) гексаэдрический вид: порождающее тело — прямая призма с основанием в виде параллелограмма;

2) октаэдрический вид: порождающее тело может быть получено из предыдущего вида центрированием призмы или центрированием двух из четырех ее вертикальных боковых сторон. Эти два способа воспроизведения соответствуют одному и тому же виду* (теорема LV, следствие I). Если после центрирования двух сторон повернуть призму на 90°, приводя в вертикальное положение ребра четырех ее нецентрированных сторон, то в качестве порождающего тела получим призму с негоризонтальным ромбическим основанием, которая в минералогии называется косой ромбической призмой.

Асимметрическая система имеет один вид.

Положения осей и плоскостей симметрии различных видов одной системы связаны между собой свойствами, сформулированными в следующей теореме.

Теорема LXXXII. Все совокупности, принадлежащие различным видам одного класса и получающиеся друг из друга подходящим центрированием, обладают одинаковыми системами рядов и ретикулярных плоскостей.

В самом деле, центрировать порождающие параллелепипеды — значит добавить узел в середине одной из произвольно выбранных диагоналей

---

* М. Франкенгейм (Acta Nat. curiosorum, t. XXI, 2-e partie, p. 570) в двойных совокупностях (система косой призмы Гаюи) установил три различных вида:

1) прямая призма с основанием в виде параллелограмма;

2) косая призма с ромбическим основанием;

3) прямой октаэдр с основанием в виде параллелограмма.

Ясно, что последние два пункта совпадают, соответствуя различным положениям двойной оси, которая горизонтальна в косой призме с ромбическим основанием и вертикальна в прямом восьмиграннике с основанием-параллелограммом.

Целесообразные подразделения октаэдрического вида зависят от того, куда спроектируется центр призмы на ее основании относительно трех сторон основного треугольника сетки.

параллелепипеда. Однако, в силу теоремы LIII, это включение не изменяет системы рядов и ретикулярных плоскостей, по крайней мере, их абсолютного направления.

Центрировать две противолежащие стороны порождающего параллелепипеда — значит добавить узел на середине одной из двух диагоналей сторон, т. е. удвоить число узлов системы соответствующих рядов; системы рядов и ретикулярных плоскостей не изменятся, как и их направление.

Примечание. Эта теорема применима также к четверным и шестерным совокупностям, имеющим одну и ту же основную ось симметрии и одинаковую сетку в плоскости, нормальной этой оси. Следует заметить, что сосуществование одинаковых систем рядов и ретикулярных плоскостей наблюдается в случае шестерной совокупности и прямой и обратной тройных совокупностей, полученных включением двух новых узлов на каждом параметре диагональных рядов порождающей призмы с ромбическим основанием (теорема LXI, следствие).

Ретикулярные плоскости одного рода и ряды одного рода в симметричных совокупностях

Определение. Две ретикулярные плоскости в совокупности будут одного рода, если размещение узлов относительно одной из них будет таким же, как и для другой.

Чтобы констатировать это подобие, мысленно соединим узлы совокупности с каждой из этих двух плоскостей и одну из этих систем представим подвижной. Если подходящим движением эти системы можно совместить: узел с узлом, плоскость с плоскостью, то это ретикулярные плоскости одного рода.

Чтобы две ретикулярные плоскости были одного рода, их сетки должны быть наложимы, но это условие не всегда достаточно. Необходимо, чтобы совпадение сеток влекло совпадение узлов, лежащих вне этих плоскостей.

Я уже показал (Journal de M. Liouville, t. XIV, p. 137), что:

1) многогранник, обратный заданному, можно получить следующим образом: произвольно выбранную точку (полюс симметрии) соединяем с вершинами данного многогранника и продолжаем полученные отрезки в противоположные стороны от заданных вершин за полюс симметрии на величины, равные соответствующим отрезкам;

2) из обратного многогранника поворотом на 180° вокруг некоторой прямой, проведенной через полюс симметрии, получаем многогранник, симметричный заданному (в геометрическом смысле) по отношению к плоскости симметрии, нормальной к этой прямой. Совокупность, обратная заданной, всегда способна к совпадению с ней: достаточно взять за полюс симметрии один из узлов совокупности. Отсюда следует, что это же имеет место как для данной совокупности, так и для симметричных ей (в геомет-

рическом смысле) совокупностей. Другими словами, две совокупности, симметричные по отношению к некоторой плоскости симметрии, всегда могут быть приведены в совпадение.

Теорема LXXXIII. Если при совпадении сеток M и F ретикулярных плоскостей подвижной и неподвижной совокупностей эти совокупности вместо совмещения становятся симметричными одна относительно другой (в геометрическом смысле слова) по отношению к плоскости двух совпадающих сеток, то обе ретикулярные плоскости будут одного рода.

В самом деле, если повернуть подвижную совокупность на 180° вокруг прямой, проходящей через один из узлов совпадающих сеток и нормальной плоскости этой сетки, то подвижная совокупность придет в совпадение с совокупностью, обратной неподвижной*, т. е. с самой неподвижной совокупностью.

Теорема LXXXIV. Во всякой совокупности, обладающей плоскостью симметрии, две ретикулярные плоскости, симметричные (в геометрическом смысле) по отношению к этой плоскости, будут одного рода.

Поворачивая одну из этих плоскостей, рассматриваемую как часть подвижной совокупности, вокруг прямой пересечения этих плоскостей, приведем их сетки в совпадение. Подвижная совокупность станет симметричной (в геометрическом смысле) неподвижной совокупности по отношению к плоскости совпавших сеток. В силу предыдущей теоремы, эти плоскости будут одного рода.

Можно прямо установить, что две заданные плоскости — одного рода. Достаточно через произвольно взятый узел S, принадлежащий обеим сеткам, провести нормаль к плоскости симметрии. Эта нормаль будет осью четного порядка (теорема II). Если повернуть подвижную совокупность на угол, равный $q\,\frac{360°}{2q}$, где $2q$ — номер порядка оси симметрии, то произойдет самосовпадение узлов. Легко видеть, что две заданные ретикулярные плоскости придут в совпадение узла в узел.

Теорема LXXXV. Параллельные ретикулярные плоскости всегда одного рода.

Достаточно перенести подвижную сетку параллельно ей самой, чтобы получить совпадение узлов.

Теорема LXXXVI. Если в совокупности существуют две непараллельные ретикулярные плоскости одного рода, то эта совокупность обладает, по меньшей мере, осью симметрии.

Пусть две ретикулярные плоскости F и M имеют общий узел S, который не участвует в движениях подвижной сетки. Предположим, что подходящим движением подвижная сетка M приводится в совмещение с неподвижной F. Совпадение всегда может быть рассмотрено (по известному в механике закону суперпозиции) как результат только одного вращения подвижной совокупности вокруг оси вращения, проходящей через узел

* Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, théorème IV (Journal de Mathématiques, t. XIV, p. 139). — См. стр. 9. *Ред.*

S. Важно заметить, что эта прямая и угол поворота, приводящий к совпадению M и F, полностью определены условием, согласно которому угол вращения не превышает 180°. Эта прямая, обладающая способностью самосовмещать узлы с помощью подходящего поворота, будет осью симметрии совокупности.

Следствие. Непараллельные ретикулярные плоскости одного рода в асимметричной совокупности невозможны.

Определение. Две ретикулярные плоскости одного рода, не параллельные между собой, будут называться гомологичными по отношению к оси симметрии совокупности в том случае, когда единственное вращение вокруг этой оси приводит к совпадению их сетки, а также подвижную и неподвижную совокупности. Отсюда следует теорема.

Теорема LXXXVII. Две непараллельные ретикулярные плоскости одного рода всегда гомологичны по отношению к оси симметрии.

Следствие. Все системы ретикулярных плоскостей одного рода получаются из одной заданной ретикулярной плоскости как гомологичные ей относительно всех осей симметрии совокупности.

Теорема LXXXVIII. Число ретикулярных плоскостей одного рода, гомологичных относительно оси симметрии порядка q, равно q, если эти плоскости не параллельны и не нормальны этой оси.

Поворачивая плоскость на $\frac{360°}{q}$, $2\,\frac{360°}{q}$, ..., $(q-1)\,\frac{360°}{q}$, получим $q-1$ ей гомологичных плоскостей. Очевидно, что их общее число равно q. Эти плоскости различны между собой, т. е. они не могут быть взаимно параллельными.

Теорема LXXXIX. Число ретикулярных плоскостей одного рода, гомологичных относительно оси порядка q и параллельных этой оси, равно q, если q — нечетное, и равно $\frac{1}{2}q$, где q — четное. Общее число плоскостей также равно q. Но в частном случае, когда q — четное, плоскости становятся попарно параллельными и обшее число плоскостей с различным направлением сводится к $\frac{1}{2}q$.

Теорема XC. Число плоскостей одного рода, гомологичных по отношению к оси порядка q, сводится к единице, если первоначально заданная плоскость нормальна этой оси.

Теорема очевидна.

Посредством этих принципов легко разрешаются вопросы определения числа и относительного расположения ретикулярных плоскостей одного рода в заданной совокупности (как в случае, когда эти плоскости не обладают никакими особенностями расположения относительно осей симметрии, так и в случае, когда они параллельны или нормальны некоторому числу этих осей). Эти вопросы имеют большое значение в кристаллографии.

Подобные теоремы можно установить для рядов одного рода.

Определение. Определение рядов одного рода аналогично определению осей или ретикулярных плоскостей одного рода. Определение гомологичных рядов подобно определению гомологичных ретикулярных плоскостей.

Теорема XCI. Если при совпадении параметров рядов M и F, принадлежащих, соответственно, подвижной и неподвижной совокупностям, вместо совпадения эти совокупности становятся симметричными одна другой (в геометрическом смысле) по отношению к плоскости, проходящей через ряд F, то эти два ряда будут одного рода.

Если повернуть подвижную совокупность на 180° вокруг прямой, проходящей через один из узлов ряда F и нормальной к плоскости симметрии, то эта совокупность приводится в совпадение с совокупностью, обратной подвижной, т. е. с самой неподвижной совокупностью.

Теорема XCII. Во всякой совокупности, обладающей плоскостью симметрии, два ряда симметричных (в геометрическом смысле) по отношению к этой плоскости, будут одного рода.

Теорема XCIII. Параллельные ряды всегда одного рода.

Теорема XCIV. Если в данной совокупности существуют два непараллельных ряда одного рода, то эта совокупность обладает хотя бы одной осью симметрии.

Теорема XCV. Два непараллельных ряда одного рода всегда гомологичны по отношению к оси симметрии.

Следствие. Все системы рядов одного рода можно получить как гомологичные заданному ряду по отношению ко всем осям симметрии совокупности.

Теорема XCVI. Число рядов одного рода, гомологичных относительно оси порядка q, равно q, если эти ряды не параллельны и не нормальны данной оси.

Теорема XCVII. Число рядов одного рода, гомологичных относительно оси порядка q и нормальных этой оси, равно q, если q — нечетное, и равно $\frac{1}{2}q$, если q — четное.

Теорема XCVIII. Число рядов, гомологичных относительно оси порядка q, равно единице, если ряд совпадает с осью.

Эти теоремы доказываются точно так же, как и теоремы LXXXIV—XC. Они являются, в конечном итоге, необходимым следствием взаимно обратных отношений между рядами и ретикулярными плоскостями в совокупностях, называемых «полярными совокупностями». Изучение соответствия между ними будет предметом следующего параграфа.

Теорема XCIX. Оси симметрии одного рода — в то же время и ряды одного рода.

Это следствие определений осей (стр. 82) и рядов (стр. 114) одного рода.

§ VI. Полярные совокупности

Определения, обозначения. Проведем из одного произвольно взятого узла, принятого за начало координат, нормали к трем сопряженным плоскостям заданной совокупности и на каждой из этих трех нормалей отложим длины, равные площадям элементарных параллелограммов сеток, построенных на каждой из этих плоскостей, которые разделены средним интервалом между узлами. Если на этих новых осях с такими длинами в качестве параметров построить совокупность, то она будет называться первичной полярной совокупностью и будет обладать важными свойствами, рассмотренными ниже.

Символ ghk представляет ряд, проходящий через начало координат и узел с координатами g, h, k в первичной совокупности; символом $[ghk]$ обозначен ряд, проходящий через начало координат и узел с целочисленными координатами g, h, k в полярной ей совокупности; символ (ghk) представляет ретикулярную плоскость с уравнением $gx+hy+kz=0$; символом $[(ghk)]$ обозначена ретикулярная плоскость с таким же уравнением в полярной совокупности.

Обозначим $Pghk$ параметр ряда, проходящего через начало координат и узел с координатами g, h, k, т. е. параметр ряда ghk; $P[ghk]$ — параметр ряда, проходящего через начало координат и узел с целочисленными координатами g, h, k в полярной совокупности, т. е. параметр полярного ряда $[ghk]$; $S(ghk)$ — площадь порождающего параллелограмма сетки, проведенной на ретикулярной плоскости (ghk) первичной совокупности; $S\ [(ghk)]$ — площадь элементарного параллелограмма сетки, проведенной на ретикулярной плоскости с обозначением $[(ghk)]$ в полярной совокупности; E — средний интервал и заметим:

1) 100, 010, 001 — символическое обозначение осей x, y, z;

2) (100), (010), (001) — символическое обозначение плоскостей yz, xz, xy.

В принятых обозначениях

$$P[100]=\frac{S\,(100)}{E},\quad P[010]=\frac{S\,(010)}{E},\quad P[001]=\frac{S\,(001)}{E}. \tag{63}$$

Как и ранее, α, β, δ — плоские углы на плоскостях yz, xz, xy; μ, ν, ω — двугранные углы, имеющие в качестве ребер оси x, y, z.

Отсюда следует

$$\begin{aligned} S\,(100)&=P_{010}P_{001}\sin\alpha,\\ S\,(010)&=P_{100}P_{001}\sin\beta,\\ S\,(001)&=P_{100}P_{010}\sin\delta. \end{aligned} \tag{64}$$

В полярной совокупности за ось $[x]$ принимаем нормаль к плоскости yz, за ось $[y]$ — нормаль к плоскости xz, за ось $[z]$ — нормаль к плоскости xy. Три положительные полуоси должны быть направлены в ту же сторону, что и положительные полуоси тех же наименований первичной

совокупности по отношению к плоскостям, к которым каждая из новых осей перпендикулярна. Три плоских угла между этими осями обозначены $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\delta]$; три двугранных — $[\mu]$, $[\nu]$, $[\omega]$.

Теорема C. Если α, β, δ — плоские углы порождающего параллелепипеда первичной совокупности, а μ, ν, ω — двугранные углы, то плоские углы в полярной совокупности равны: $180° - \mu$, $180° - \nu$, $180° - \omega$; а двугранные углы составляют $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \delta$.

Это известное свойство сферических полярных треугольников. Следовательно, будем иметь

$$[\alpha] = 180° - \mu,\ [\beta] = 180° - \nu,\ [\delta] = 180° - \omega, \tag{65}$$

$$[\mu] = 180° - \alpha,\ [\nu] = 180° - \beta,\ [\omega] = 180° - \delta. \tag{66}$$

Теорема CI. Если из вершины O тетраэдра $OABD$ (рис. 38) восставить к трем боковым граням OBD, OAD, OAB нормали Oa, Ob, Od, расположенные по отношению к каждой грани на той же стороне, что и противолежащая сторона вершины, и равные, соответственно, площадям треугольников этих трех сторон, то диагональ параллелепипеда, построенного на ребрах Oa, Ob, Od, будет нормалью к основанию ABD и равна площади этого основания.

По построению имеем: Oa=площади OBD, Ob=площади OAD, Od= площади OAB, Oa, Ob, Od — перпендикулярны к плоскостям OBD, OAD, OAB; OA, OB, OD будут перпендикулярными к плоскостям Obd, Oad, Oab.

Опустим из O на основание ABD нормаль OP и через a проведем плоскость $aA'p$, параллельную плоскости bOd, и, следовательно, нормаль к ребру OA. Эта плоскость пересечет OA в A' и OP в p. Спроектируем треугольники OBD, ABD на плоскость $aA'p$; O и A будут проектироваться в A'. Следовательно, две проектируемые площади совпадут. Первая из двух проектируемых площадей имеет следующее значение:

$$\text{площадь } OBD \cos\,(\text{плоскость } ODB,\ \widehat{\ }\ \text{плоскость } aA'p).$$

Заменив плоскости их нормалями, получим

$$\text{площадь } OBD \cos\,(\widehat{Oa,\ OA}) = \text{площади } OBD\,\frac{OA'}{Oa} = OA'.$$

Другая проектируемая площадь будет такой же:

$$\text{площадь } ABD \cos\,(\widehat{Op,\ OA}) = \text{площади } ABD\,\frac{OA'}{Op}.$$

Приравнивая полученные выражения, будем иметь

$$OA' - \text{площадь } ABD\,\frac{OA'}{Op},$$

откуда

$$Op = \text{площадь } ABD. \tag{67}$$

Проведем теперь через b плоскость, параллельную aOd. Аналогично изложенному доказываем, что эта плоскость пересекает OP на расстоянии от точки O, равном площади ABD, т. е. в уже полученной точке p.

Точно так же проводим через d плоскость, параллельную aOb. Эти три плоскости вместе с тремя параллельными им плоскостями bOd, aOd, aOb образуют параллелепипед с ребрами Oa, Ob, Od и диагональю Op. Эта диагональ равна площади треугольника ABD и нормальна ему.

Следствие. Если ребра Oa, Ob, Od не равны площадям сторон, а пропорциональны им в отношении $1 : B$, то диагональ Op будет также пропорциональна площади ABD в отношении $1 : B$ и останется нормальной к плоскости ABD.

Теорема CII. Если (ghk) — символ ретикулярной плоскости заданной совокупности и в полярной ей совокупности построена прямая, проходящая через начало координат и точку с целочисленными координатами g, h, k, то эта прямая с символом $[ghk]$ будет нормальна плоскости (ghk).

Первое доказательство. Пусть Ox, Oy, Oz (рис. 39) — три сопряженных ряда, взятых в качестве координатных осей в первичной совокупности, и a, b, d — параметры этих рядов. Имеем

$$OA = hka, \quad OB = gkb, \quad OD = ghd.$$

Уравнение плоскости ABD в целочисленных координатах

$$gx + hy + kz = ghk.$$

Кроме того, будем иметь

$$\begin{aligned} &\text{площадь } OBD = \frac{1}{2} g^2hkbd \sin \alpha = \frac{1}{2} g^2hkS\,(100), \\ &\text{площадь } OAD = \frac{1}{2} gh^2kad \sin \beta = \frac{1}{2} gh^2kS\,(010), \\ &\text{площадь } OAB = \frac{1}{2} ghk^2ab \sin \delta = \frac{1}{2} ghk^2S\,(001). \end{aligned} \tag{68}$$

Символы S (100), S (010), S (001) в принятых обозначениях — площади порождающих параллелограммов на плоскостях yz, xz, xy. Построим теперь три оси полярной совокупности и пусть на этих осях

$$Oa = gP\,[100] = \frac{gS\,(100)}{E},$$

$$Ob = hP\,[010] = \frac{hS\,(010)}{E},$$

$$Od = kP\,[001] = \frac{kS\,(001)}{E},$$

где E — средний интервал узлов.

Пусть Op — диагональ параллелепипеда, построенного на Oa, Ob, Od; ghk в полярной совокупности — целочисленные координаты p; $[ghk]$ — обозначение ряда Op.

Заменив значения Oa, Ob, Od выражениями площадей OBD, OAD, OAB (уравнение 68), убеждаемся, что они им будут пропорциональны в отношении

$$\frac{1}{E} : \frac{1}{2} ghk = 1 : \frac{1}{2} ghkE.$$

Следовательно, вследствие теоремы CI диагональ Op будет нормальна к основанию ABD, т. е. к системе ретикулярных плоскостей с символом (ghk).

Второе доказательство. Для доказательства теоремы CII с помощью геометрического анализа в пространстве обозначим τ наклон оси Oz к плоскости xy (рис. 39); ξ_0, η_0, ζ_0 — линейные координаты точки a; ξ_1, η_1, ζ_1 — линейные координаты b; ξ_2, η_2, ζ_2 — линейные координаты точки d. Примем

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta = J^2. \qquad (69)$$

Тогда получим

$$\zeta_2 = \frac{Od}{\sin\tau} = \frac{Od\sin\delta}{J} = \frac{kab\sin^2\delta}{JE}.$$

Отсюда легко находим значения ξ_2, η_2 из известного уравнения нормали к плоскости xy в системе косых осей. Аналогично этому определяются значения ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1. Координаты ξ, η, ζ точки p будут задаваться формулами:

$$\xi JE = (\xi_0 + \xi_1 + \xi_2)\, JE = gbd\sin^2\alpha - had\sin\alpha\sin\beta\cos\omega - kab\sin\alpha\sin\delta\cos\nu,$$

$$\eta JE = (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2)\, JE = -gbd\sin\alpha\sin\beta\cos\omega + had\sin^2\beta - kab\sin\beta\sin\delta\cos\mu,$$

$$\zeta JE = (\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2)\, JE = -gbd\sin\beta\sin\delta\cos\mu - had\sin\alpha\sin\delta\cos\nu + kab\sin^2\delta.$$

Если для простоты принять

$$\left.\begin{aligned} &\frac{g}{a}\sin^2\alpha - \frac{h}{b}\sin\alpha\sin\beta\cos\omega - \frac{k}{d}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu = r, \\ &-\frac{g}{a}\sin\alpha\sin\beta\cos\omega + \frac{h}{b}\sin^2\beta - \frac{k}{d}\sin\beta\sin\delta\cos\mu = s, \\ &-\frac{g}{a}\sin\beta\sin\delta\cos\mu - \frac{h}{b}\sin\alpha\sin\delta\cos\nu + \frac{k}{d}\sin^2\delta = t, \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

то уравнение прямой Op примет вид $\frac{\xi}{r} = \frac{\eta}{s} = \frac{\zeta}{t}$. Однако известно, что после подстановки значений r, s, t это уравнение будет представлять нормаль к плоскости с уравнением

$$\frac{g}{a}\xi + \frac{h}{b}\eta + \frac{k}{d}\zeta = 0,$$

символическое обозначение которой (ghk).

Теорема CIII. Если (ghk) — символ ретикулярной плоскости в заданной совокупности, то нормаль к этой плоскости будет рядом в полярной совокупности с символом $[ghk]$.

Это — следствие предыдущей теоремы.

Теорема CIV. Параметр ряда $[ghk]$ равен площади порождающего параллелограмма сетки плоскости (ghk), разделенной средним интервалом узлов.

Обозначения те же, что и в предыдущей теореме. Пусть Op (рис. 39)— параметр ряда $[ghk]$; g, h, k — взаимно просты. В силу следствия теоремы CI, будем иметь

$$Op : \text{к площади } ABD, \text{ как } OA : \text{к площади } OBD.$$

Однако это отношение равно $1 : \frac{1}{2}\, ghkE$. Следовательно,

$$Op = \frac{2 \text{ площади } ABD}{ghkE}.$$

Но уже было доказано (теорема XXXVIII, уравнение 47), что площадь $ABD = \frac{1}{2} ghk\omega$; где ω — площадь порождающего параллелограмма сетки плоскости ABD. Отсюда, заменив ω на $S\ (ghk)$, получим 2 площади $ABD = ghk\ S\ (ghk)$.

$$Op = \frac{S\ (ghk)}{E},$$

откуда выводится общая формула:

$$P\,[ghk] = \frac{S\ (ghk)}{E}, \tag{71}$$

являющаяся алгебраической формой только что доказанной теоремы.

Примечание. Формула (63) есть только частный случай формулы (71).

Следствие I. Заданной совокупности соответствует только одна полярная совокупность, которая будет определена, как только мы найдем общий для обеих совокупностей узел. Ведь полярная совокупность, построенная на трех взятых на удачу сопряженных рядах, должна совпасть, по предыдущей теореме, с полярной совокупностью, построенной на совершенно другой системе рядов.

Следствие II. Если три плоскости совокупности сопряжены, то их нормали являются сопряженными рядами в полярной совокупности. Параллелепипед, построенный на этих трех рядах, будет полярным параллелепипедом по отношению к тому, который образован тремя сопряженными плоскостями и им смежными в первичной совокупности.

Следствие III. Наоборот, если три ряда сопряжены в первичной совокупности, то плоскости, нормальные им, будут сопряженными плоскостями в полярной совокупности.

Следствие IV. Условие сопряженности трех ретикулярных плоскостей (ghk), $(g'\ h'\ k')$, $(g''\ h''\ k'')$ выводится из условия сопряженности рядов $[ghk]$, $[g'h'k']$, $[g'', h'', k'']$, выражающегося уравнением (43)

$$gh'k'' - gk'h'' + kg'h'' - hg'k'' + hk'g'' - kh'g'' = \pm 1.$$

Задача XXXI. Найти площадь $S\,(ghk)$ клетки сетки ретикулярной плоскости (ghk).

В общем в начальной совокупности имеем (задача XVI)

$$P^2_{ghk} = g^2P^2_{100} + h^2P^2_{010} + k^2P^2_{001} + 2ghP_{100}P_{010}\cos\delta + 2gkP_{100}P_{001}\cos\beta + \\ + 2hkP_{010}P_{001}\cos\alpha. \qquad (72)$$

Учитывая, что то же самое отношение должно иметь место в полярной совокупности, и обозначая:

$P\,[ghk]$ через $\frac{1}{E}\,S\,(ghk)$,

$P\,[100]$ через $\frac{1}{E}\,S\,(100)$,

$P\,[010]$ через $\frac{1}{E}\,S\,(010)$,

$P\,[001]$ через $\frac{1}{E}\,S\,(001)$,

$[\alpha]$ через $180^\circ - \mu$,

$[\beta]$ через $180^\circ - \nu$,

$[\delta]$ через $180^\circ - \omega$,

будем иметь

$$S^2\,(ghk) = g^2S^2\,(100) + h^2S^2\,(010) + k^2S^2\,(001) - 2ghS\,(100)\,S\,(010)\cos\omega - \\ - 2gkS\,(100)\,S\,(001)\cos\nu - 2hkS\,(010)\,S\,(001)\cos\mu. \qquad (73)$$

Эта формула уже была получена — формула (50). Однако сопоставим ее с формулой (72), чтобы вывести объединяющий их закон.

Замечания относительно формул (72) и (73). Если в уравнении (72) записать

$$P_{100} = \sqrt{a},\ P_{010} = \sqrt{a'},\ P_{001} = \sqrt{a''},\ P_{ghk} = \sqrt{f},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a'a''}},\ \cos\beta = \frac{b'}{\sqrt{aa''}},\ \cos\delta = \frac{b''}{\sqrt{aa'}},$$

то это уравнение примет вид:

$$f = ag^2 + a'h^2 + a''k^2 + 2b''gh + 2b'gk + 2bhk.$$

Величина f получила у Гаусса название тройничной формы (Gauss, Disquisitiones Arithmeticoe, p. 426). Знаменитый геометр обозначил ее символом $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = f$.

Величина

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D$$

названа М. Гауссом определителем формы. Заменив a, a', a'', b, b', b'' их значениями с учетом уравнения (52) и (54), найдем

$$D = P_{100}^2 P_{010}^2 P_{001}^2 (-1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\delta) = -E^6,$$

где буква E обозначает средний интервал узлов в совокупности.

Из этого следует, что всякая тройничная форма соответствует совокупности точек, действительных или мнимых. Каждое особое значение f для целых определенных значений g, h, k выражает квадрат расстояния между точками или узлами совокупности. Определитель формы, взятый со знаком минус, есть квадрат объема порождающего параллелепипеда или шестая степень среднего интервала между узлами и т. д.

Аналогичный результат имеет место для квадратичных форм:

$$ag^2 + 2bgh + a'h^2.$$

Определитель $b^2 - aa'$, взятый с противоположным знаком, равен квадрату площади порождающего параллелограмма или четвертой степени среднего интервала между узлами на плоскости сетки, порождающей квадратичную форму.

Тройничная форма

$$\begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix},$$

названная М. Гауссом дополнительной по отношению к форме $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$, обозначается в Disquisitiones буквой E.

Из способа введения a, a', a'', b, b', b'' получаем, что

$$b^2 - a'a'' = -P_{010}^2 P_{001}^2 \sin^2\alpha = -S^2(100),$$

$$b'^2 - aa'' = -S^2(010),$$

$$b''^2 - aa' = -S^2(001),$$

$$ab - b'b'' = P_{100}^2 P_{010} P_{001} (\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta) = S(001)\,S(010)\cos\mu,$$

$$a'b' - bb'' = S(001)\,S(100)\cos\nu,$$

$$a''b'' - bb' = S(100)\,S(010)\cos\omega.$$

После подстановки этих значений в форму F, получим

$$-F = g^2S^2(100) + h^2S^2(010) + k^2S^2(001) - 2ghS(100)S(010)\cos\omega - $$
$$- 2gkS(100)S(001)\cos\nu - 2hkS(010)S(001)\cos\mu.$$

Стало быть,

$$F = -S^2(ghk) = -E^2P^2[ghk].$$

Следовательно, тройничная дополнительная форма представляет собой квадрат элементарной площади плоскости (ghk), взятой со знаком минус. Ясно, что если f представляет геометрически совокупность, то дополнительная к f форма F представляет геометрически полярную совокупность. Однако это произойдет после того, как полярные параметры будут умножены на средний интервал E, т. е. на корень шестой степени из определителя D, взятого со знаком минус.

Особая аналогия, существующая между квадратичными и тройничными формами и геометрическими свойствами, объединяющими сетки и совокупности, была указана M. Seeber в его «Recherches sur les formes ternaires» (voyez le Journal de Crelle, t. XX, p 318).

Теорема CV. Объем элементарного параллелепипеда одинаков и в первичной и в полярной совокупностях.

Пусть Ω — объем порождающего параллелепипеда заданной совокупности, $[\Omega]$ — тот же объем для полярной совокупности. Очевидно, будем иметь

$$[\Omega] = \frac{ab\sin\delta}{E}\,\frac{ad\sin\beta}{E}\,\frac{bd\sin\alpha}{E}\sin\mu\sin\nu\sin\delta,$$

где a, b, d — параметры первичной совокупности.

Однако, с другой стороны,

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta\sin\delta\sin\mu &= J,\\ \sin\alpha\sin\delta\sin\nu &= J,\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

где J — всегда задано уравнением (69).

Стало быть,

$$[\Omega] = \frac{a^2b^2d^2J^2}{E^3},$$

и так как

$$abdJ = \Omega \text{ — уравнение (41)},$$
$$E^3 = \Omega \text{ — уравнение (54)},$$

приходим к тому, что

$$[\Omega] = \Omega. \tag{75}$$

Примечание. Полярная совокупность имеет ту же плотность, что и первичная совокупность. Средний интервал E одинаков для обеих совокупностей

$$[E] = E. \tag{76}$$

Теорема CVI. Совокупность, полярная к полярной совокупности, является первичной совокупностью.

Определим элементарную площадь сетки плоскости $[yz]$ в полярной совокупности. Двумя параметрами, сторонами порождающего параллелограмма, будут $\frac{ad \sin \beta}{E}$, $\frac{ab \sin \delta}{E}$, угол $[\alpha]$ равен $180° - \mu$ (теорема C). Следовательно, будем иметь

$$S[(100)] = \frac{a^2bd \sin \beta \sin \delta \sin \mu}{E^2} = \frac{Ea^2bd \sin \beta \sin \delta \sin \mu}{\Omega}.$$

Однако мы имеем

$$abd \sin \beta \sin \delta \sin \mu = abd \ J = \Omega.$$

Стало быть,

$$S[(100)] = Ea = EP_{100}.$$

Аналогично этому

$$S[(010)] = Eb = EP_{010},$$
$$S[(001)] = Ed = EP_{001}.$$

Если построить оси совокупности, которые полярны построенным на Oa, Ob, Od осям (рис. 39), то получается OA, OB, OD. Если построить по величине параметры этих осей по известной формуле (63)

$$\frac{S[(100)]}{[E]}, \quad \frac{S[(010)]}{[E]}, \quad \frac{S[(001)]}{[E]},$$

то вследствие того, что $[E] = E$, вернемся к параметрам a, b, d или P_{100}, P_{010}, P_{001}. Таким образом, полученная совокупность будет совпадать с первичной.

Теорема CVII. Если ghk — символ ряда совокупности, то нормальная ему плоскость будет ретикулярной плоскостью в полярной совокупности и будет иметь символ $[(ghk)]$.

По предыдущей теореме, полярную совокупность можно рассматривать как первичную совокупность, а первичную совокупность — как полярную по отношению к другой совокупности. Тогда (теорема CIII) символ нормали плоскости (ghk) должен иметь вид $[ghk]$. Чтобы вернуться к первоначальной точке зрения, достаточно перенести скобки от одного символа к другому. В результате символ нормали к плоскости $[(ghk)]$ будет ghk. Следовательно, ряд ghk есть нормаль к плоскости $[(ghk)]$.

Следствие. Если $[ghk]$ — символ ряда в полярной совокупности, то (ghk) — нормальная ему плоскость, которая будет ретикулярной плоскостью первичной совокупности.

Определение. Свойства полярной совокупности в пространстве аналогичны таким же свойствам на плоскости. Каждой сетке соответствует полярная сетка. Она может быть получена следующим образом.

Пусть $Oa=a$, $Ob=b$ — два параметра на осях Ox, Oy (рис. 40), δ — угол xOy, ε — средний интервал, заданный формулой $\varepsilon^2=ab\sin\delta$. На этой сетке с помощью параметра ε, нормального к плоскости xOy, взятого за ось z, строим совокупность, имеющую сетку плоскости xOy в качестве основания.

Имеем $\Omega=\varepsilon ab\sin\delta=\varepsilon^3$. Таким образом, ε — средний интервал этой вспомогательной совокупности.

Строя полярную ей совокупность, видим, что ось $[x]$ — нормаль $O\,[x]$ к оси Oy, ось $[y]$ — нормаль $O\,[y]$ к оси Ox. Пусть $O\,[a]=[a]$, $O\,[b]=[b]$ — параметры относительно этих осей. Тогда получим

$$[a]=\frac{b\varepsilon}{\varepsilon}=b,\quad [b]=\frac{a\varepsilon}{\varepsilon}=a.$$

Строя сетку на этих параметрах, получим сетку, полярную к заданной. Если теперь на продолжении прямой $O[y]$ взять $O[b']=O[b]$, то узел $[b']$ тоже будет принадлежать полярной сетке. Так как $O[a]=Ob$, $O[b']=Oa$, то треугольники bOa, $[a]O[b']$ будут равными. Отсюда следует теорема.

Теорема CVIII. Полярная сетка может породить первичную сетку, если ее повернуть на $90°$ вокруг одного из взятых за начало координат узлов.

Примечание. Если после этого вращения положительная полуось y перейдет в положительную полуось $[x]$ полярной сетки, а положительная полуось x перейдет в отрицательную полуось $[y]$, то обратное будет иметь место, если вращение осуществляется в противоположную сторону.

Теорема CIX. Всякая полярная совокупность обладает теми же осями симметрии, что и первичная совокупность.

Пусть O — начало координат (рис. 41) есть узел, общий для обеих совокупностей; OO' — ось симметрии первичной совокупности, OP — один из рядов полярной совокупности, O и P — два соседних узла на этом ряду. Проведем через O плоскость RR', нормальную OP, которая будет ретикулярной плоскостью первичной совокупности (теорема CVII, следствие).

Пусть теперь q — номер порядка симметрии на оси OO'. Повернем RR' вокруг OO' на $\frac{360°}{q}$, $\frac{2\cdot 360°}{q}$, $\frac{3\cdot 360°}{q}$, ... и т. д. Получим ретикулярные плоскости одного рода (теорема LXXXVIII), нормали которых будут также рядами полярной совокупности (теорема CIII). Эти нормали получаются при повороте OP вокруг OO' на углы, равные последовательно $\frac{360°}{q}$, $\frac{2\cdot 360°}{q}$, ... и т. д. В процессе движения точка P будет последовательно занимать положения P', P'', откуда ясно, что она будет иметь $q-1$ гомологичных ей узлов по отношению к оси OO'. Так как P — некоторый узел полярной совокупности, то ось OO' будет осью симметрии порядка q этой совокупности.

Следствие. Если существуют плоскости симметрии в первичной совокупности, то эти плоскости будут также плоскостями симметрии в полярной совокупности.

Ведь всякой плоскости симметрии соответствует ось симметрии четного порядка, а эта ось должна перейти в полярную совокупность. Наоборот, всякой оси симметрии четного порядка соответствует нормальная ей плоскость симметрии. Стало быть, эта плоскость симметрии сохраняется в полярной совокупности.

Теорема CX. Если центрировать все параллелепипеды, объединение которых образует заданную совокупность A с известной полярной совокупностью $[A]$, и если центрированием всех шести сторон полярных параллелепипедов, составляющих совокупность $[A]$, образовать новую совокупность A' и затем увеличить все ее размеры в отношении $1:\sqrt[3]{2}$, то полученная совокупность будет полярной к A'.

Пусть Ω' — ядро совокупности A'. Объем этого ядра будет, очевидно, равен половине объема старого ядра, так что $\Omega' = \frac{1}{2}\Omega$.

Пусть E и E' — средние интервалы совокупностей A и A'. Будем иметь $E'^3 = \frac{1}{2}E'^3$; $E = E'\sqrt[3]{2}$.

С другой стороны, в полярной A', выделяя штрихом величины, соответствующие совокупности A' и ей полярной $[A']$:

$$P'[100] = \frac{S'(100)}{E'},\quad P'[010] = \frac{S'(010)}{E'},\quad P'[001] = \frac{S'(001)}{E'}.$$

Но так как сетки плоскостей yz, xz, xy не искажаются центрированием, то мы приходим к тому, что

$$\begin{aligned} S'(100) &= S(100) = EP[100],\\ S'(010) &= S(010) = EP[010],\\ S'(001) &= S(001) = EP[001]. \end{aligned}$$

Следовательно, подставив эти значения, получим

$$\left.\begin{aligned} P'[100] &= \sqrt[3]{2}\,P[100],\\ P'[010] &= \sqrt[3]{2}\,P[010],\\ P'[001] &= \sqrt[3]{2}\,P[001]. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

$P[100]$, $P[010]$, $P[011]$ представляют по величине и направлению ребра трех соприкасающихся сторон порождающего параллелепипеда полярной совокупности $[A]$. Если, напротив, рассматривать диагональные плоскости (110), (101), (011), и особо те, которые имеют в начальной совокупности следующие уравнения:

$$x + y = 1,\ x + z = 1,\ y + z = 1,$$

то легко видеть, что эти плоскости проходят через центр порождающего параллелепипеда. Следовательно, параллелограммы сеток этих плоскостей все становятся центрированными и площадь их клеток вполовину уменьшается. Будем иметь

$$S'(110)=\frac{1}{2}S(110),$$

$$S'(101)=\frac{1}{2}S(101),$$

$$S'(011)=\frac{1}{2}S(011).$$

Следовательно,

$$P'[110]=\frac{S'(110)}{E'}=\frac{E}{E'}\frac{1}{2}\frac{S(110)}{E}=\sqrt[3]{2}\frac{1}{2}P[110],$$

и также

$$\left.\begin{aligned}P'[101]&=\sqrt[3]{2}\frac{1}{2}P[101],\\ P'[011]&=\sqrt[3]{2}\frac{1}{2}P[011].\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

$P[110]$, $P[101]$, $P[011]$ представляют по величине и направлению диагонали трех соприкасающихся сторон порождающего параллелепипеда полярной совокупности $[A]$.

Из уравнений (77) и (78) заключаем, что для получения совокупности $[A']$ размеры порождающего параллелепипеда полярной $[A]$ необходимо умножить на $\sqrt[3]{2}$, затем вполовину уменьшить параметры диагоналей шести их сторон, что эквивалентно центрированию этих сторон.

Первая из этих двух операций превратит ядро Ω полярной совокупности $[A]$ в $\Omega(\sqrt[3]{2})^3=2\Omega$. Вследствие второй операции порождающий параллелепипед приобретет вдвое меньшие основания и высоты. Его ядро 2Ω станет равным $\frac{1}{4}2\Omega=\frac{1}{2}\Omega=\Omega'$, т. е. равным ядру совокупности A'. Таким образом, полученное центрирование совокупности $[A']$ будет полным. Последующее центрирование, если оно может иметь место, делает плотность совокупности $[A']$ большей, чем плотность совокупности A', что невозможно (теорема CV, примечание). Стало быть, $[A']$ — совокупность, полярная к центрированной совокупности A'.

Теорема CXI. Если центрировать стороны порождающих параллелепипедов, образующих заданную совокупность A, для которой известна ей полярная $[A]$, то для образования этим центрированием новой совокупности A' следует использовать $[A']$, полярную совокупности A', центрируя полярные параллелепипеды, составляющие совокупность $[A]$, и уменьшая все их размеры в отношении $\sqrt[3]{2}:1$.

В общем, пусть M и N — две совокупности, полярные одна другой, M_c — та совокупность, в которую перейдет совокупность M при центрировании всех ее параллелепипедов, N_f — совокупность, в которую перейдет N при центрировании сторон ее параллелепипедов, полярных к параллелепипедам из M. Из предыдущей теоремы следует, что M_c и N_f подчиняются условиям соотношения таких размеров, чтобы они были полярны одна другой. Только вместо

$$\text{ядро } M_c = \text{ядру } N_f$$

будем иметь

$$\text{ядро } M_c = 2 \text{ ядрам } N_f. \tag{79}$$

Тогда если увеличить размеры N_f в отношении $\sqrt[3]{2}:1$. то ядра станут равными, а совокупности взаимно полярными (предыдущая теорема).

Можно получить тот же результат, уменьшая размеры M_c в отношении $\sqrt[3]{2}:1$. Ядра станут равными, и совокупности будут взаимно полярными.

В настоящем случае зададим $N=A$, $M=[A]$, $N_f=A'$; M_c будет совокупностью $[A]$, в которой параллелепипеды центрированы, и M_c с уменьшенными в отношении $\sqrt[3]{2}:1$ размерами будет полярной к A'.

Теорема CXII. Если в плоскостях $z=0$, $z=1$ центрировать основания порождающих параллелепипедов, составляющих совокупность A, для которой известна ей полярная $[A]$, то получается полярная совокупность с центрированными основаниями A'. При таком центрировании на плоскостях $[z]=0$, $[z]=1$ основания $[A]$ центрируются, параметры осей $[x]$ и $[y]$ изменяются в отношении $\sqrt[3]{2}:1$, а параметр оси $[z]$ — в отношении $\sqrt[3]{2}:2$.

Применив метод, использованный в доказательстве теоремы CX, найдем

$$[E]=E'\sqrt[3]{2},$$
$$S'(100)=S(100)=EP[100],$$
$$S'(010)=S(010)=EP[010],$$
$$S'(001)=\frac{1}{2}S(001)=EP[001],$$
$$\left.\begin{aligned} P'[100]&=\sqrt[3]{2}\,P[100],\\ P'[010]&=\sqrt[3]{2}\,P[010],\\ P'[001]&=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\,P[001],\end{aligned}\right\} \tag{80}$$
$$S'(110)=\frac{1}{2}S(110),$$
$$S'(101)=\frac{1}{2}S(101),$$

$$S'(011)=\frac{1}{2}S(011),$$

$$\left.\begin{aligned} P'[110]&=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\,P[110],\\ P'[101]&=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\,P[101],\\ P'[011]&=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\,P[011]. \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Из уравнений (80) и (81) следует, что все размеры совокупности $[A]$ надо умножить на $\sqrt[3]{2}$, затем вполовину уменьшить параметр относительно оси $[z]$, так же как параметр диагонали [110]. Эта последняя операция эквивалентна центрированию параллелограммов на плоскости $[xy]$.

Первая операция превращает ядро Ω совокупности $[A]$ в 2Ω; вторая — делит его на два и сводит к значению Ω; третья — делит на два и сводит к $\frac{1}{2}\Omega$. Однако таким является значение ядра совокупности A'. Следовательно, полученная совокупность будет полярной к A'.

Задача XXXII. Найти совокупность, полярную к совокупности с двойной симметрией.

Пусть Oz — двойная ось (рис. 42), d — ее параметр, $Ox=a$, $Oy=b$, $xOy=\delta$. Сначала возьмем нецентрированную призму и примем

$$abd\sin\delta=R^3, \qquad (82)$$

где E — средний интервал. Имеем $E^3=R^3$. Ось $[z]$ совпадет с Oz. Оси $[x]$ и $[y]$ будут расположены в плоскости xy. Имеем

$$[a]=E^2\frac{1}{a\sin\delta}=\frac{d}{E}\,b,$$

$$[b]=E^2\frac{1}{b\sin\delta}=\frac{d}{E}\,a,$$

$$[d]=E^2\frac{1}{d}=\frac{E^2}{d^2}\,d.$$

Оси x, y, z сопряжены, потому что прямая призма не центрирована, оси $[x]$, $[y]$, $[z]$ будут точно такими же. Порождающим телом полярной совокупности будет прямая призма с основанием в виде параллелограмма. Сетка плоскости $[x]$ $[y]$ будет полярной к сетке плоскости xy, увеличенной или уменьшенной в отношении $d:E$.

Если порождающая призма центрирована (теорема LV), то стороны полярной призмы, полученной без применения центрирования (теорема CX), необходимо центрировать и затем увеличивать размеры их в отношении $1:\sqrt[3]{2}$. В качестве порождающего тела будем иметь прямой восьмигранник (октаэдр) с основанием в виде параллелограмма. Центри-

рование прямой призмы с основанием в виде параллелограмма приводит к тому же результату. Тогда для ребер этой призмы найдем

$$[a]=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\delta}}{2ab\sin\delta},$$

$$[b]=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\delta}}{2ab\sin\delta},$$

$$[d]=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{d},$$

для угла между $[a]$ и $[b]$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{2ab\sin\delta}{a^2-b^2}\right).$$

Задача XXXIII. Найти совокупность, полярную к совокупности с тридвойной симметрией.

За оси координат примем оси двойной симметрии. Пусть a, b, d — параметры осей x, y, z; $[a]$, $[b]$, $[d]$ — параметры осей $[x]$, $[y]$, $[z]$. Ось $[x]$ совпадает с осью x, ось $[y]$ — с осью y, ось $[z]$ — с осью z. Исходя из этого, можно представить себе четыре различных случая.

Если имеется прямая нецентрированная призма с ребрами a, b, d, то полярная совокупность будет иметь порождающим телом прямую призму с прямоугольным основанием.

Для простоты выкладок примем

$$abd=R^3 \tag{83}$$

и, очевидно, получим

$$E^3=R^3,\ [a]=E^2\frac{1}{a},\ [b]=E^2\frac{1}{b},\ [d]=E^2\frac{1}{d}. \tag{84}$$

Если прямая призма центрирована — случай, когда совокупность может рассматриваться как порождение прямого восьмигранника (октаэдра) с прямоугольным основанием, то полярной ей будет прямая призма с шестью центрированными основаниями. Легко находим (теорема CX)

$$\begin{aligned} E^3&=\frac{1}{2}R^3,\\ [a]&=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{a}=2E^2\frac{1}{a},\\ [b]&=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{b}=2E^2\frac{1}{b},\\ [d]&=R^2\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{d}=2E^2\frac{1}{d}. \end{aligned} \tag{85}$$

Призма, построенная на $[a]$, $[b]$, $[d]$, должна быть затем центрирована на шести ее сторонах, и тогда она становится равноценной прямому восьмиграннику (октаэдру) с ромбическим основанием.

Если прямая призма центрирована по шести сторонам (случай, когда совокупность может быть порождена прямым восьмигранником (октаэдром) с ромбическим основанием), то, в силу теоремы CXI, она переходит в прямую центрированную призму, эквивалентную прямому восьмиграннику (октаэдру) с прямоугольным основанием. Пусть всегда a, b, d — ребра прямой призмы с центрированными сторонами. В силу теоремы CXI, будем иметь

$$\begin{aligned} E^3 &= \frac{1}{4} R^3, \\ [a] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} = 2E^2 \frac{1}{a}, \\ [b] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{b} = 2E^2 \frac{1}{b}, \\ [d] &= R^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \frac{1}{d} = 2E^2 \frac{1}{d}. \end{aligned} \tag{86}$$

$[a]$, $[b]$, $[d]$ — ребра прямой прямоугольной призмы, которая, будучи центрированной, служит порождающим телом искомой полярной совокупности.

Наконец, если призма имеет две центрированные грани, например основания (случай, когда совокупность может рассматриваться как порождение прямой призмы к ромбическим основаниям), то, учитывая предписания теоремы CXII, с помощью вычислений, аналогичных предыдущим, найдем $[a] = 2E^2 \frac{1}{a}$, $[b] = 2E^2 \frac{1}{b}$, $[d] = E^2 \frac{1}{d}$. Затем центрированием прямоугольников, построенных на $[a]$ и $[b]$, получим новую прямую призму с ромбическим основанием.

В последнем случае можно опереться на решение задачи XXXII. Примем в вычислениях, относящихся к этой задаче, $a=a'$, $b=b'$, $E=E'$, что приводит к тому, что диагонали прямоугольного центрированного основания принимаются за оси x и y. Тогда

$$\begin{aligned} E'^3 &= a'^2 d \sin \delta, \\ [a'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [b'] &= E'^2 \frac{1}{a' \sin \delta} = \frac{d}{E'} a', \\ [d] &= E'^2 \frac{1}{d} = \frac{E'^2}{d^2} d \end{aligned} \tag{87}$$

и угол ромба основания к полярной совокупности равен $180° - \delta$.

Следствие I. Полярная к прямой призме с прямоугольным основанием есть прямая призма с прямоугольным основанием. То же справедливо для прямой призмы с ромбическим основанием. Два прямоугольника или два ромба подобны.

Следствие II. Прямой октаэдр (восьмигранник) с прямоугольным основанием и прямой октаэдр (восьмигранник) с ромбическим основанием взаимно полярны.

Задача XXXIV. Найти совокупность, полярную тройной или ромбоэдрической совокупности.

Полярная к совокупности, построенной на ромбоэдре с плоским углом, равным α, и двугранным углом, равным μ, есть совокупность, построенная на другом ромбоэдре * с плоским углом $[\alpha]$ (теорема С), равным $180° - \mu$, и двугранным углом $[\mu]$, равным $180° - \alpha$.

Начальный ромбоэдр будет полностью определен, если задать параметр a сетки с клеткой в виде правильного треугольника, нормальной тройной оси с параметром d. Тогда из известных свойств ромбоэдра найдем

$$\frac{1}{2(1-\cos\alpha)}=\frac{d^2}{9a^2}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{2(1+\cos\mu)}=\frac{a^2}{4d^2}+\frac{1}{3}. \tag{88}$$

Пусть $[a]$, $[d]$ — параметры тех же обозначений в полярном ромбоэдре. Имеем

$$\frac{1}{2(1+\cos[\mu])}=\frac{[a]^2}{4[d]^2}+\frac{1}{3},$$

однако $1+\cos[\mu]=1-\cos\alpha$,
следовательно,

$$\frac{d^2}{9a^2}=\frac{[a]^2}{4[d]^2}.$$

Отсюда следует окончательно отношение

$$\frac{a[a]}{2}=\frac{d[d]}{3}, \tag{89}$$

выражающее условие подобности двух ромбоэдров, каждый из которых полярен другому.

Чтобы два объема были равны, имеем, сверх всего, условие

$$E^3=\frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^2d=\frac{1}{6}\sqrt{3}\,[a]^2[d]. \tag{90}$$

Откуда находим значения $[a]$ и $[d]$:

$$[a]=d\sqrt[3]{\frac{2a}{3d}}=2E^2\frac{1}{a},$$

$$[d]=a\sqrt[3]{\frac{9a}{4d}}=3E^2\frac{1}{d}.$$

* Это ромбоэдр, который проф. Вейс назвал инверсионным ромбоэдром (Mémoire de l'Académie de Berlin, t. XV, p. 93).

Задача XXXV. Найти совокупность, полярную совокупности с четверной симметрией. Пусть a, a — два параметра сторон квадрата основания, d — параметр оси z, которая является четверной осью симметрии.

Если речь идет о прямой нецентрированной призме с квадратным основанием, то будем иметь

$$a^2d = R^3, \quad E^3 = R^3, \quad [a] = E^2\frac{1}{a}, \quad [d] = E^2\frac{1}{d}. \tag{91}$$

Полярной ей будет тоже призма с квадратным основанием.

Если речь идет о центрированной призме с квадратным основанием, то полярной ей будет центрированная призма с квадратным основанием, составные части которой могут сводиться к решению второго случая задачи XXXIII. В относящейся к этому случаю формуле примем $b=a$ и найдем прямую центрированную призму с квадратным основанием, определенную формулами:

$$E^3 = \frac{1}{2}R^3, \quad [a] = \sqrt{2}\,E^2\frac{1}{a}, \quad [d] = 2E^2\frac{1}{d}. \tag{92}$$

Задача XXXVI. Найти совокупность, полярную совокупности с шестерной симметрией.

Порождающее тело совокупности — прямая призма с ромбическим основанием, стороны которого равны a, a, угол δ равен 120°, высота равна d.

Найдем тогда (см. решение задачи XXXIII, четвертый случай), что порождающее тело полярной совокупности есть прямая призма с ромбическим основанием, с углом ромба 180° — δ, или 60°, т. е. получаем призму с шестерной симметрией, что и предполагалось (теорема CIX).

Пусть $[a]$, $[a]$ — стороны ромба в полярной призме и $[d]$ — высота ее. Применив формулы (87), будем иметь

$$\begin{aligned} E^3 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2d, \\ [a] &= \sqrt{\frac{4}{3}}\,E^2\frac{1}{a}, \\ [d] &= E^2\frac{1}{d}. \end{aligned} \tag{93}$$

Между a, d, $[a]$, $[d]$ существуют соотношения

$$\frac{a\,[a]}{2} = \frac{d\,[d]}{\sqrt{3}}, \tag{94}$$

$$a^2d = [a^2]\,[d], \tag{95}$$

аналогичные соотношениям (89), (90).

Сетки плоскости, нормальные к шестерной оси, поворачиваются в своей собственной плоскости на 90°, при этом изменяется их наименьший параметр.

Задача XXXVII. Найти совокупность, полярную совокупности с тричетверной симметрией.

Если порождающее тело совокупности — куб, то ему полярным тоже будет куб в качестве порождающего тела.

Если порождающее тело есть центрированный куб с ребром a, то ему полярным будет куб с центрированными гранями (теорема CX), грань $[a]$ которого будет задана формулой $[a] = a\sqrt[3]{2}$.

Наоборот, если порождающее тело будет кубом с центрированными гранями и ребром a $\left(\text{или правильным октаэдром с ребром } a\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, то полярным ему будет центрированный куб с ребром $[a]$, заданным уравнением (теорема CXI) $[a] = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Следовательно, два последних вида взаимно полярны.

Можно доказать последний результат, рассматривая порождающие ромбоэдры. Ромбоэдр 90° имеет плоский угол 90°; полярным ему будет ромбоэдр в 90° (решение задачи XXXIV). Ромбоэдр в 70°3′44″ имеет плоский угол 60°; полярный ему — ромбоэдр в 120°. Ромбоэдр в 120° имеет плоский угол 109°28′16″; полярным ему является ромбоэдр в 70°31′44″.

Казалось бы, этот мемуар можно рассматривать как работу, имеющую чисто умозрительный геометрический характер, так как утверждения, которые в нем доказываются, не зависят от физических свойств тел. Несмотря на это работа была завершена автором с мыслью, что она будет служить, сверх того, для объяснения фундаментальных фактов кристаллографии. Это и являлось целью, которой руководствовался автор.

Было принято, согласно Гаюи, неявно или явно, что центры молекул кристаллических тел распределены на одинаковых расстояниях на серии прямых линий, параллельных пересечениям плоскостей спайности. Геометрическая система, образованная этими центрами, является не чем иным, как тем, что мы назвали «совокупностью точек», и все построения, развернутые в этой работе, приложимы к ней.

Если теперь допустить, что некоторая причина, участвующая в упорядочении совокупности, образующейся в момент кристаллизации, порождает симметричную структуру с большей степенью вероятности, чем асимметричную, то ясно, что образованная окончательно совокупность будет принадлежать одному из наших семи классов (стр. 104). Причем предпочтительнее возникают первые шесть классов, поскольку именно они обладают осями или плоскостями симметрии. Наблюдения над кристаллическими телами, как естественными, так и искусственными, подтверждает это соображение. Геометрическое подразделение совокупностей точно соответствует тому, что внимательное и терпеливое изучение устанавливает между различными кристаллическими системами.

Но такова причина этой тенденции в совокупностях, образованных центрами молекул кристаллов, и в их симметричном расположении. Об

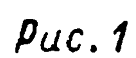

Рис. 1


Рис. 2


Рис. 3


Рис. 4


Рис. 5


Рис. 6


Рис. 7


Рис. 8

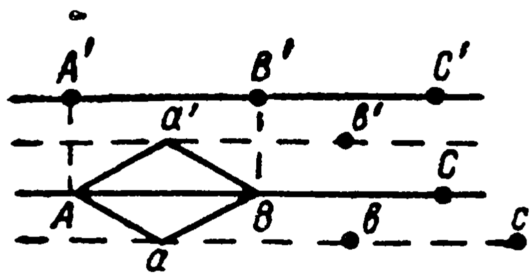


Рис. 9

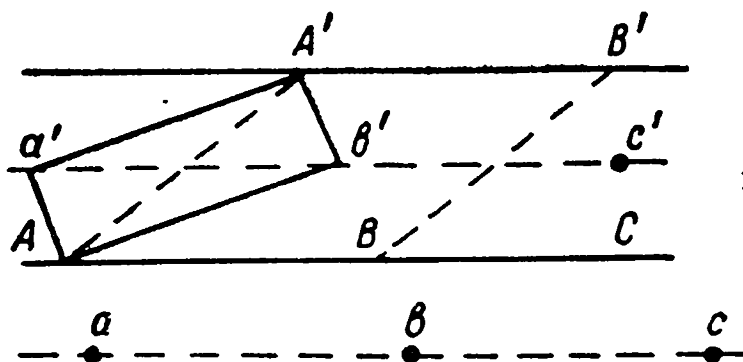


Рис. 10

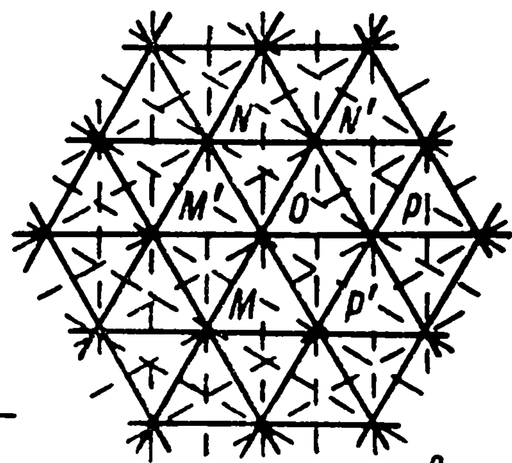


Рис. 11

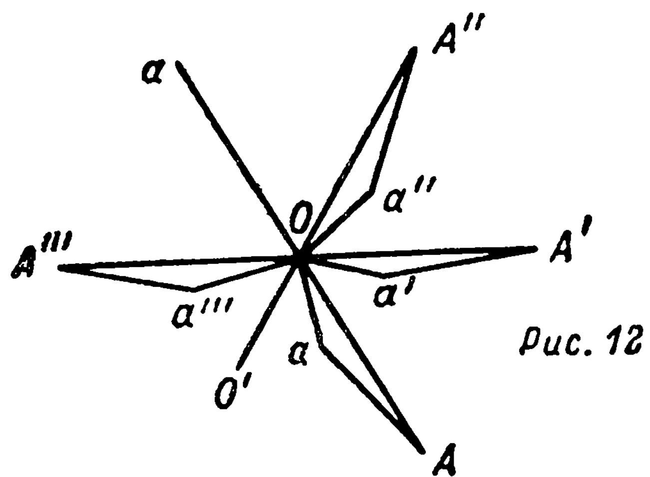


Рис. 12

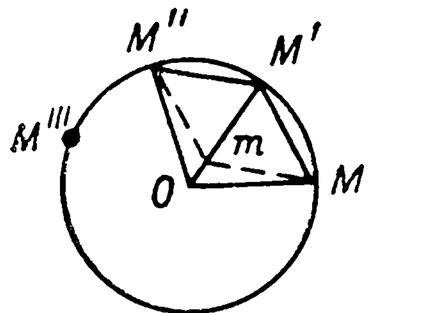


Рис. 13

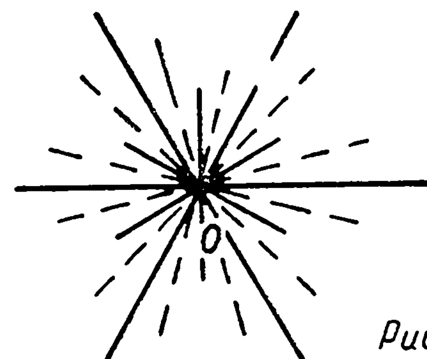


Рис. 14

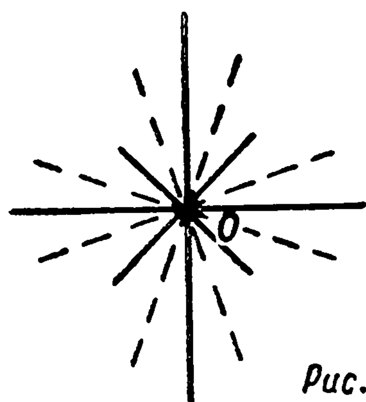


Рис. 15

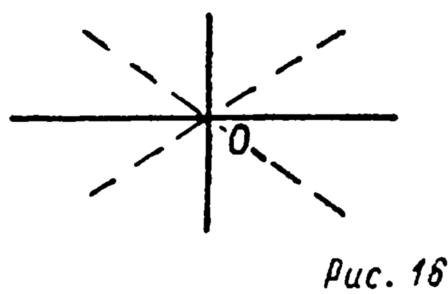


Рис. 16

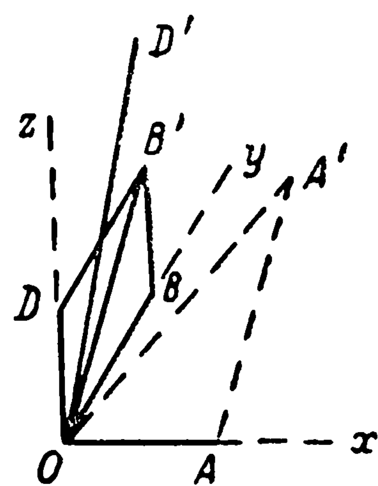


Рис. 17

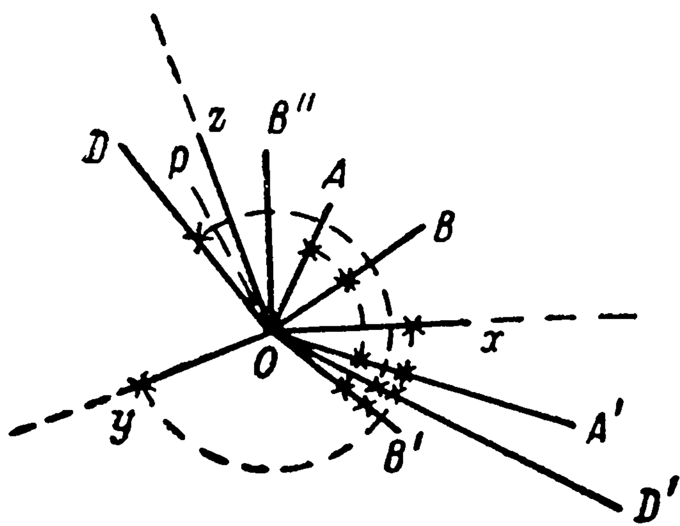


Рис. 18

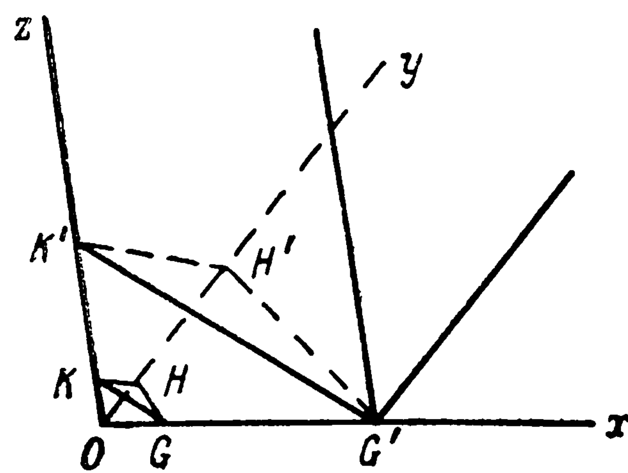


Рис. 19

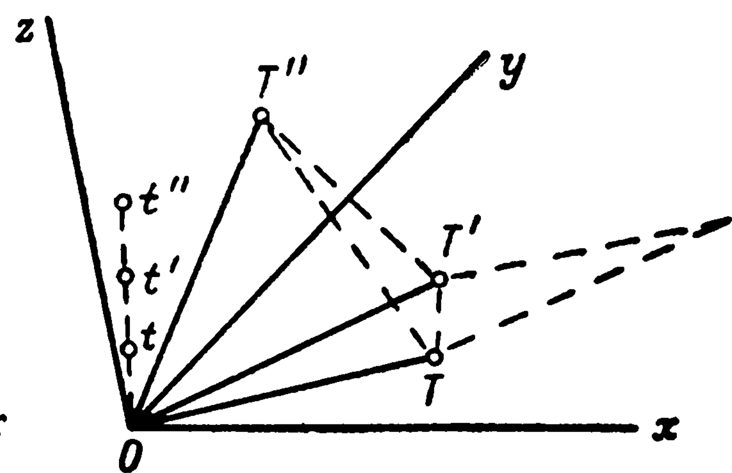


Рис. 20

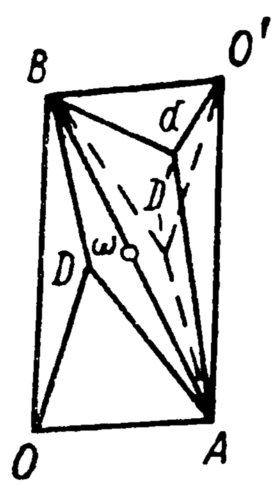


Рис. 21

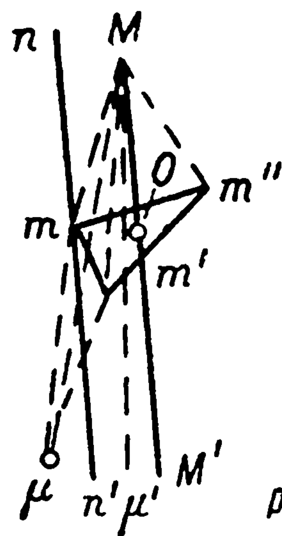


Рис. 22

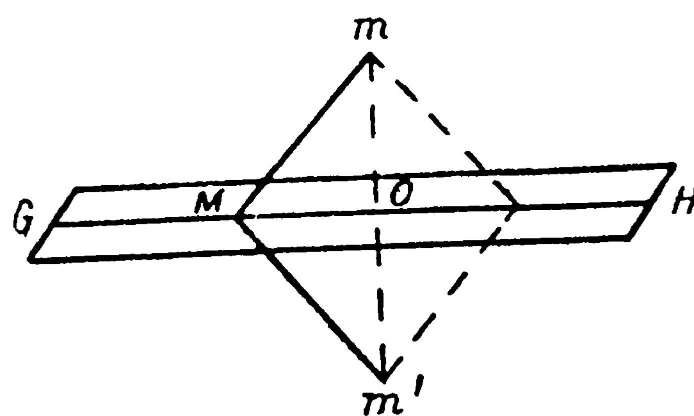


Рис. 23

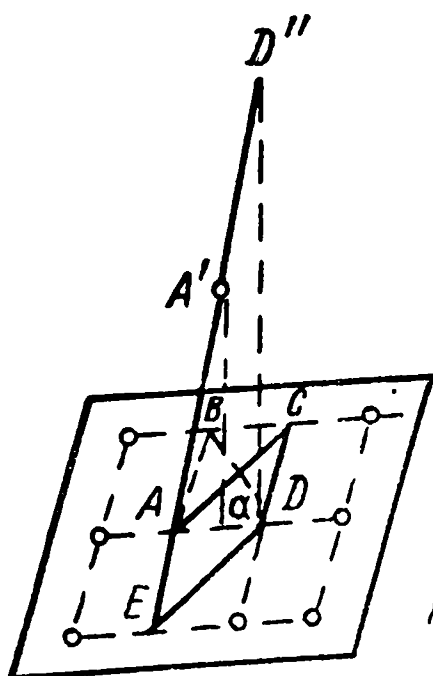


Рис. 24

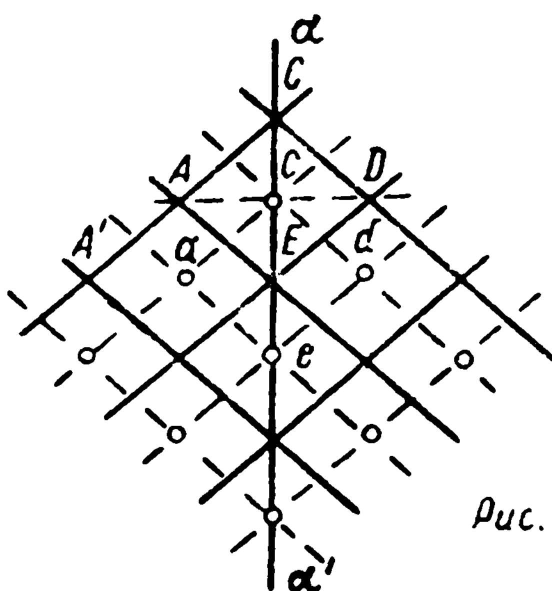


Рис. 25

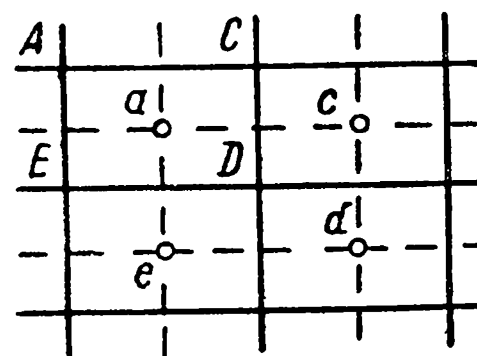


Рис. 26

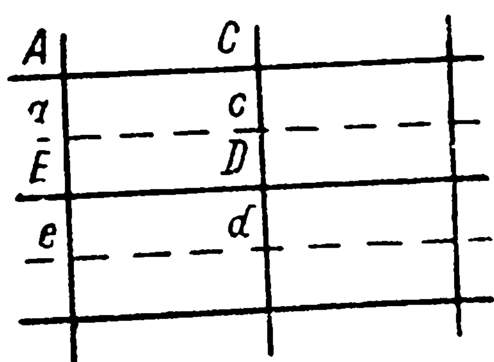


Рис. 27

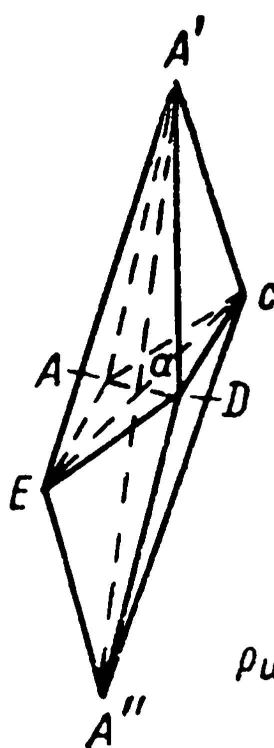


Рис. 28

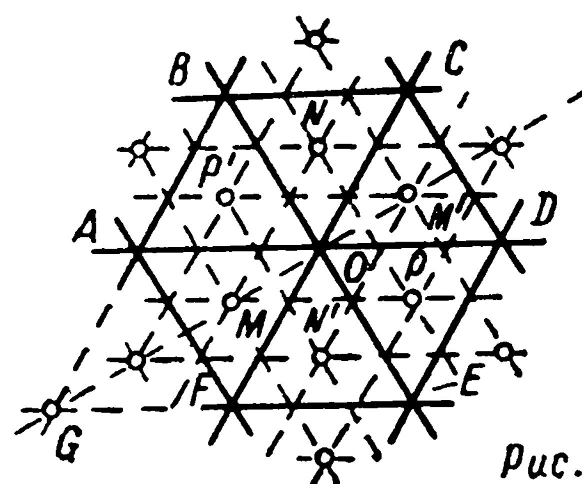


Рис. 29

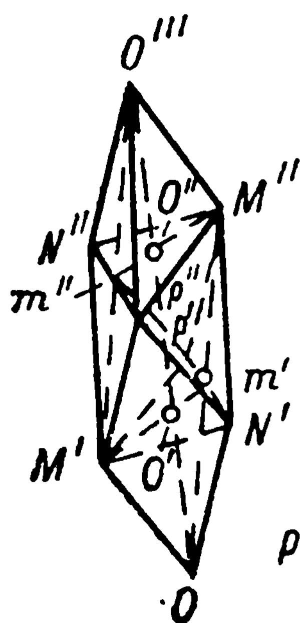


Рис. 30

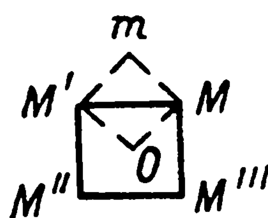


Рис. 31

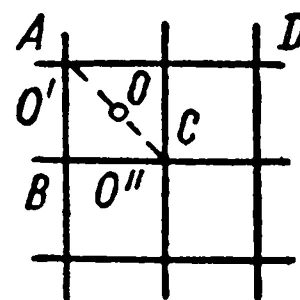
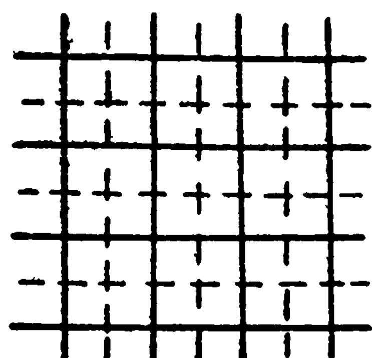


Рис. 32


Рис. 33

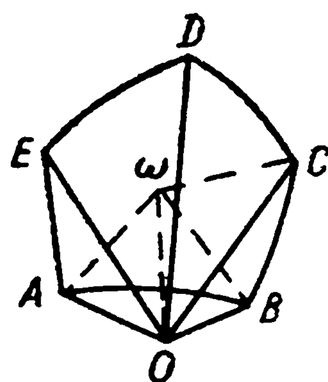


Рис. 34

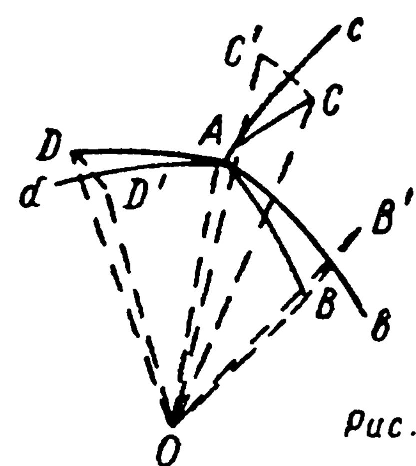


Рис. 35

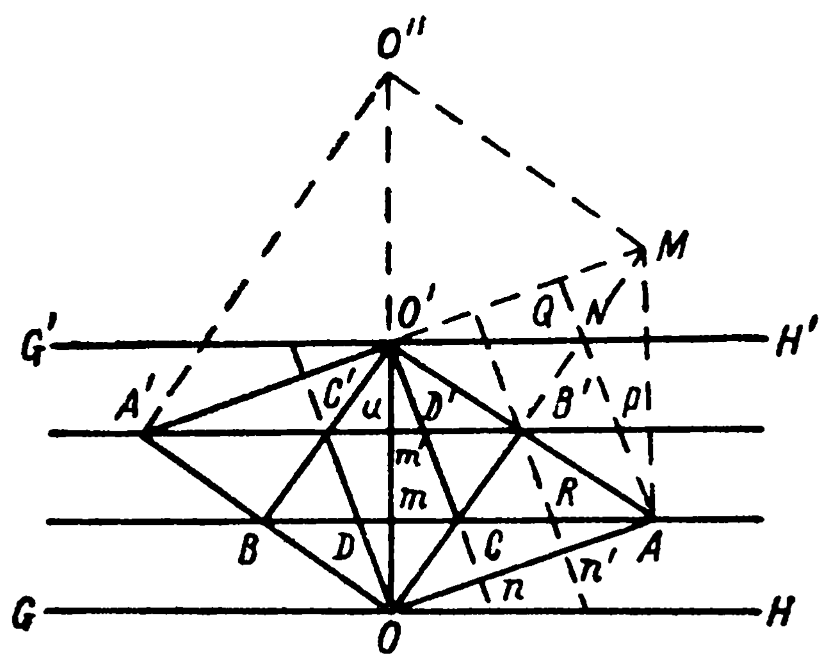


Рис. 36

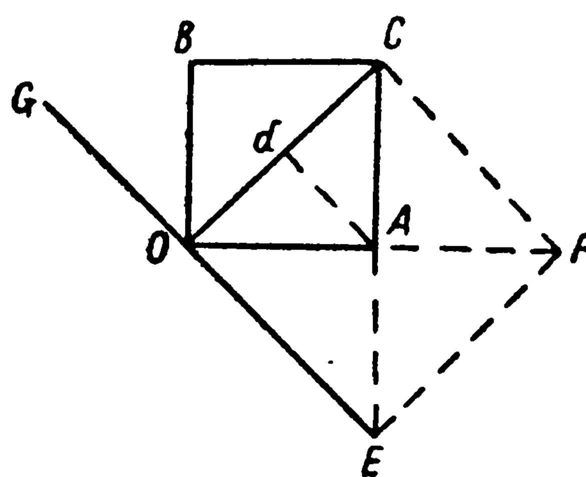


Рис. 37

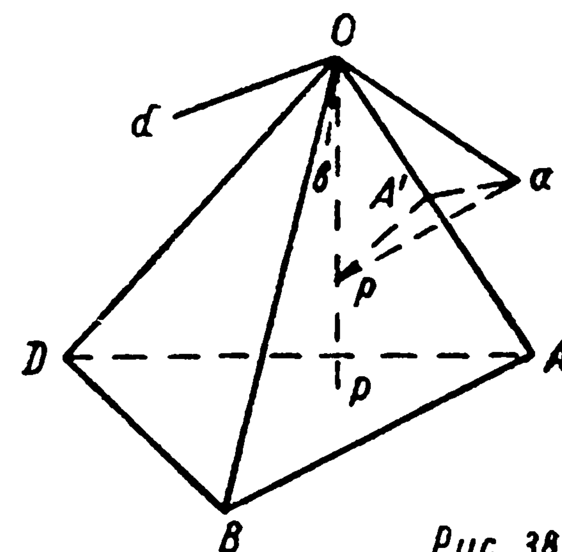


Рис. 38

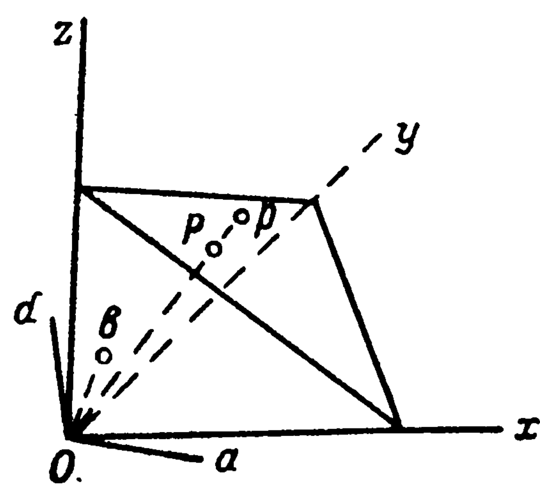


Рис. 39

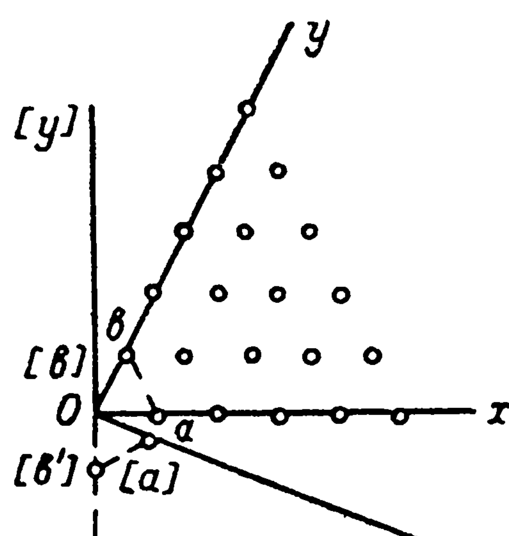


Рис. 40

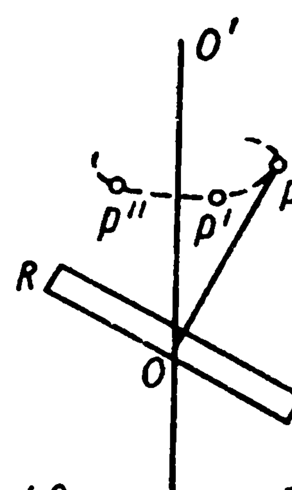


Рис. 41

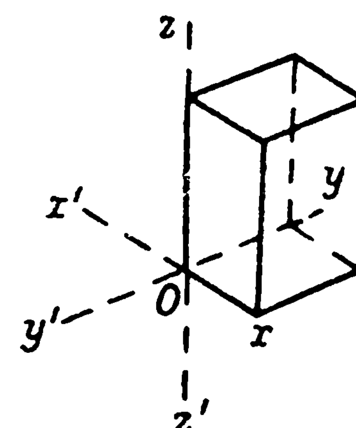


Рис. 42

этом я попытаюсь сказать в другом мемуаре, обработка которого сейчас закончена и который, как надеюсь, вскоре будет напечатан. Основные результаты этой новой работы доложены в Société Philomathique на заседаниях 17 и 24 марта, 19 мая, 7 и 17 ноября 1849 г. (см. le Journal l'Institut, 1849). Настоящий мемуар, так же как статья «О многогранниках симметричной формы», опубликован в XIV томе и является в некотором роде введением к кристаллографической теории, развиваемой в следующем мемуаре.

Сейчас я ограничусь высказыванием, что многогранная форма, или, если угодно, многоатомная форма молекулы кристаллических тел, определяет сорт симметрии соответствующей кристаллической совокупности. Та же причина в дальнейшем очень просто объясняет явления гемиэдрии, гемитропии и изоморфизма. Если еще не полностью разрешена столь сложная проблема диморфизма, то, по крайней мере, та же причина указывает, в каком направлении нужно искать разницу между диморфизмом и изометрией. Она же в некоторых случаях показывает, что собственно диморфизм, т. е. кристаллизация идентичных молекул в двух различных кристаллографических системах, в зависимости от окружающей среды — допустимый факт. Мы придерживаемся этого мнения, хотя оно и противоречит нынешним наиболее распространенным взглядам, принятым в минералогии.

Отзыв о настоящем мемуаре был зачитан М. Коши в Академии наук 6 августа 1849 г. (см. les Comptes rendus, i. XXIX, p. 133).

В заключение позвольте поблагодарить знаменитого рецензента за благосклонность, с которой он подошел к оценке моей работы.



КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КРИСТАЛЛ, РАССМАТРИВАЕМЫЙ КАК ПРОСТАЯ СОВОКУПНОСТЬ ТОЧЕК

§ I. О внутренней структуре кристаллических тел

Сейчас все физики допускают мысль о том, что материальные тела являются объединением однородных молекул. Последние располагаются друг от друга на расстоянии вследствие существования притягивающих или отталкивающих сил, равнодействующая которых равна нулю для каждой из этих молекул. С помощью этих сил тело достигает своего равновесного внутреннего состояния. Под названием «однородные молекулы» подразумевается не только то, что химический состав должен быть идентичным, но и то, что геометрическое расположение составляющих молекулу атомов одинаково вокруг центра тяжести каждой молекулы. Это предположение необходимо для объяснения явления изомерии — изменения вида группировки атомов, составляющих изомерные тела. Несмотря на идентичность состава, такие тела обладают полностью различными физическими и химическими свойствами. По-видимому, даже незначительные дефекты в конгруэнтности молекулярных многогранников двух веществ (например, когда эти многогранники просто симметричны один другому, но не наложимы) могут вызвать некоторые внешние различия, более или менее значительные.

В некристаллических твердых телах относительное распределение центров молекул не подчиняется никаким постоянным правилам.

Если вырезать цилиндр из такого вещества для определения его специфических констант, то коэффициент растяжения или упругости, коэффициент теплового расширения, реакция на свет или нагрев остаются постоянными и не зависят от направления, которое занимает ось цилиндра внутри выделенного тела. Напротив, в кристаллическом теле полученные результаты в общем изменяются в зависимости от направления этой оси: обнаруживается нечто вроде молекулярной полярности, и это приводит

к допущению, что молекулярные многогранники одинаково повернуты и их гомологичные линии параллельны.

Молекулы кристалла не только подобны и одинаково ориентированы, но они, более того, расположены в виде прямолинейных нитей и разделяются на каждой нити равными интервалами. На прямолинейное расположение указывает прямизна ребер и спайность. Всякий раз, когда существуют две различные плоскости, по которым кристалл может раскалываться на пластинки, призмы спайности можно сделать как угодно малыми. Прямолинейное расположение молекул — вынужденное следствие такого подразделения.*

Равенство интервалов не менее ясно следует из факта, который я заимствовал у Biot: «если в непрерывной массе кристалла выделить тело некоторой формы и заметных размеров, то все подобные и параллельные ему тела, которые можно извлечь из той же массы кристалла, будут физически и химически идентичны».

В первой части этой работы мы ограничимся рассмотрением положений центров тяжести каждой молекулы и для второй части оставим вопросы, касающиеся формы и симметрии молекулярных многогранников.

Мысленно построенный кристалл — это не более как система равноудаленных математических точек, расположенных на взаимно параллельных прямолинейных нитях. Эта формулировка совпадает с данным в предыдущей работе** определением совокупности, или ретикулярной системы точек.

Ребра кристалла, так же как и пересечения граней и плоскостей спайности, соответствуют рядам узлов. Ограничивающие кристалл грани являются плоскостями, содержащими эти ряды. Они совпадают с ретикулярными плоскостями. На каждой из этих плоскостей существует сетка из молекулярных центров, слишком тонкая, чтобы наш взгляд мог ее заметить, но существование которой ясно доказано предыдущими выводами.

В изложении общей теории совокупностей показано, что две ретикулярные плоскости не обязательно пересекаются по ряду. Следовательно, говоря математически, ребро кристалла может и не быть рядом. Однако можно заметить, что если через молекулярный центр, наиболее близкий к пересечению двух граней, мысленно провести две плоскости, параллельные граням, то эти новые плоскости, которые для наших чувств совпадают с предыдущими ввиду крайней малости межмолекулярных промежутков тела, должны пересечься по одному из рядов совокупности. Нет, следовательно, никаких существенных помех для рассмотрения ребер кристалла как рядов молекул.

Аналогично этому, точка пересечения трех граней кристалла может рассматриваться как молекулярный центр, хотя, следуя способу наложе-

* По этому вопросу см. Delafosse. Savants étrangers, t. VIII, p. 649.

** О системе точек, правильно распределенных. Journal de l'École Polytechnique, XXXIII[e] cahier, p. 1.

ния слоев, параллельных этим трем граням, такая вершина может заменяться усеченной вершиной; ее бесконечно малые размеры полностью недоступны нашим органам чувств.

В дальнейшем всякая грань кристалла будет рассматриваться как математическая плоскость, несущая на своей поверхности систему молекулярных центров, расположенных в виде сетки. Всякое ребро будет считаться прямолинейной цепочкой таких центров, и всякая вершина будет рассматриваться как один из них.

§ II. О семи кристаллических системах

Степень симметрии совокупности характеризуется числом осей симметрии, которыми она обладает, порядком симметрии этих осей и их взаимным расположением. Исходя из этого, в уже упомянутой работе мы разделили совокупности на семь различных классов. Допуская, что соответствующие семь классов симметрии встречаются в природе, мы будем иметь семь различных классов кристаллических веществ, т. е. семь кристаллических систем. И это в самом деле имеет место.

Минералоги обычно отмечают только шесть систем. Однако если ромбоэдрическую систему разделить, как это делал Гаюи, на кристаллы, порожденные правильной гексагональной призмой, и кристаллы, порожденные ядром в виде ромбоэдра, то мы получим семь классов, точно соответствующих различным системам кристаллов в минералогии. Диклинная К. Ф. Наумана является только частным случаем асимметричной системы, как это было хорошо показано Дюфренуа.*

Исходя из этого ясно, что тричетверные совокупности ** соответствуют правильной, или кубической, системе. Шестерная совокупность составляет часть ромбоэдрической системы. Четверная совокупность соответствует пирамидальной системе, или системе прямой призмы с квадратным основанием. Тройная совокупность, так же как и шестерная, образует ромбоэдрическую систему. Тридвойная совокупность отвечает системе прямой призмы с прямоугольным основанием. Двойная совокупность соответствует моноклинной системе, или системе косой ромбической призмы Гаюи. Асимметричная совокупность отвечает системе косой несимметричной призмы.

Деление совокупностей на различные виды: гексаэдрический, октаэдрический и т. д., очевидно, применимо к подразделению кристаллов, принадлежащих одной и той же кристаллической системе.

В одном из следующих параграфов мы увидим, как с помощью «закона симметрии», требующего одновременного существования на контуре кристалла ретикулярных плоскостей или граней одного рода, можно восстановить оси и плоскости симметрии кристаллической совокупности и, следовательно, сказать, к какой системе он принадлежит.

---

* Traité de Minéralogie, t. I, p. 149.

** Цитированный мемуар, Journal de l'École Polytèchnique, XXXIII^e cahier, p. 88.

Определение кристаллического вида представляет большие трудности, ибо из теоремы LXXXII мемуара о системах точек следует, что те же ретикулярные плоскости, с теми же углами взаимных наклонов могут существовать как грани кристалла, каков бы ни был вид, к которому принадлежит этот последний. Следовательно, осмотра ребер и граней единственного образца минерала, кристаллическая система которого задана, недостаточно для распознавания кристаллического вида этого минерала. Далее мы увидим, что эта неопределенность в большинстве случаев может быть устранена изучением значительного количества образцов одного минерала или изучением неравномерного проявления спайности параллельно различным граням кристалла.

Более того, в силу примечания к теореме LXXXII, между шестерными и тройными классами тоже существует неопределенность, как и в случае двух видов, принадлежащих кристаллической системе со многими видами. Исследование одного образца здесь может оказаться недостаточным для определения системы. Общие законы внешней симметрии, о которых мы будем говорить, в большинстве случаев могут уничтожить эту недостоверность.

§ III. Кристаллические формы и закон симметрии

Знаменитый Гаюи отметил, что грани минерала объединяются по некоторым правилам. Он назвал *идентичными* грани, которые появляются и исчезают одновременно на внешнем огранении кристалла. Гаюи искал условия сосуществования этих граней. Он предполагал, что оно заключается в подобии способа их образования на всех идентичных частях центрального ядра, названного им *примитивной формой вещества*. Идентичность ребер заключается, по его мнению, в равенстве длин и в равном наклоне двугранных углов; для телесных углов — в равенстве их элементарных частей и равенстве длин их сторон.

Геометры, признающие методы немецких ученых, определяют сосуществующие грани следующим образом. Один, два или три отрезка, отсеченных одной из таких граней на трех кристаллографических осях, меняют направление, оставаясь на той же оси или переходя на другую ось с тем же параметром, при условии, однако, что новый трехгранный угол, содержащийся между этими отрезками, равен или геометрически симметричен начальному трехгранному углу.

Эти правила следуют из весьма глубокого изучения огромного числа минералов. Однако они эмпиричны, и физическая причина сосуществования строго не выяснена. На практике из этого следует, что эти правила не всегда согласовываются. Так, например, двенадцать граней биромбоэдра, образованного на ребрах основания правильной гексагональной призмы, совместимы по теории Гаюи. Вместе с тем, следуя кристаллографическим методам Миллера, эти двенадцать граней принадлежат двум различным объединениям, которые могут существовать отдельно.

С другой стороны, Делафосс убедительно показал (см. цитированную работу, стр. 654), что условие геометрической идентичности для различных частей примитивной формы может не быть достаточным. Таким образом, геометрическая идентичность не позволяет строго обосновать закон сосуществования. Эти трудности исчезают, если приравнять кристаллы к совокупностям молекул.

Назовем *гранями одного рода*, как мы делали в теории совокупностей, те, которые могут быть приведены в совпадение сетки на сетку подходящим вращением или переносом. Совпадение граней влечет за собой совпадение совокупностей. Более того, если это совпадение приводит к совпадению молекулярных многогранников, которые предполагаются связанными с совпадающими гранями и подчиняются их движению, то мы будем говорить, что эти грани одного рода и, более того, что они *идентичны*.

Закон сосуществования граней, названный *законом симметрии*, заключается в необходимости одновременного образования всех граней одного рода вместе с заданной гранью. Для спайности этот закон требует, чтобы кристалл, расщепляясь параллельно некоторой ретикулярной плоскости, расщеплялся с такой же легкостью параллельно всем ретикулярным плоскостям того же рода, что и исходная плоскость.

Физический смысл предыдущего закона заключается в том, что в процессе кристаллизации две грани одного рода образуются, в общем, одинаково в порождающей среде. Так как слагающие их сетки одинаковы, то молекулярные силы, обусловливающие последовательное наложение параллельных слоев на одну из них, будут действовать совершенно аналогично при формировании параллельных слоев второй грани. Наряду с этим высказыванием следует учитывать, что посторонние причины могут воздействовать независимо на поверхность кристаллической массы в процессе ее образования, порождая случайные дефекты. Вместе с тем силы, порождающие грани одного рода, должны быть полностью подобными с обеих сторон только в том случае, если грани не только одного рода, но и идентичны.

Идя от простого к сложному, временно допустим, что закон сосуществования граней одного рода справедлив без учета формы молекулярных многогранников. Мы увидим далее, как рассмотрение форм этих многогранников приведет к уменьшению в некотором отношении числа граней, которые теоретически должны сосуществовать.

Назовем *кристаллической формой* совокупность всех граней, которые должны сосуществовать с заданной гранью. Следовательно, форма — это объединение всех граней того же рода, что и заданная. Форма, способная заключить в себе кристалл, называется *закрытой*, в противоположном случае она называется *открытой*.

Число граней формы зависит от числа осей системы. Его всегда можно определить следующим образом. Пусть N_q — число осей симметрии порядка q, которыми обладает кристалл. Если первая грань задана, то сим-

метрия, свойственная каждой такой оси, будет порождать $q - 1$ других граней. Они получаются из заданной с помощью повторяющихся поворотов на $\frac{360°}{q}$ вокруг той оси.* Общее число полученных таким образом граней, не учитывая начальной грани, будет равно $(q - 1)\, N_q$. Чтобы получить понятие об их взаимном расположении, восставим извне нормали к поверхности каждой грани и продолжим их, так же как и оси симметрии, до пересечения с поверхностью сферы очень большого радиуса, центр которой занимает кристалл. Затем вокруг выхода каждой оси как полюса опишем маленькую окружность, проходящую через полюс заданной грани. На этой окружности окажутся полюсы всех граней одного рода, гомологичных по отношению к этой оси. Графическое представление положений этих точек на сфере проекций широко используется в кристаллографии.

Повторяя предыдущие действия с осями порядка q', q'', получим общее число таким образом объединенных граней. Ведь две ретикулярные плоскости одного рода всегда гомологичны по отношению к осям симметрии (теорема LXXXVII). Это общее число граней равно

$$1 + (q - 1)\, Nq + (q' - 1)\, Nq' + (q'' - 1)\, Nq''.$$

Но порождаемая ими форма еще не выведена полностью. Каждой из этих граней соответствует расположенная на противоположной стороне кристалла параллельная ей грань. Эта грань должна принадлежать той же форме. Стало быть, надо удвоить полученное число. Так как q, q', q'' могут быть равны только 2, 3, 4, 6, то теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема I. Число граней N полной формы в кристаллической системе, содержащей N_6 шестерных осей, N_4 четверных осей, N_3 тройных осей, N_2 двойных осей, будет задано формулой:

$$N = 2\,(1 + 5N_6 + 3N_4 + 2N_3 + N_2). \qquad (1)$$

Применив эту формулу и употребив значения N_6, N_4, N_3, N_2, взятые из табл. на стр. 105 предыдущего мемуара, найдем значения N для семи кристаллических систем:

первая	— $N = 48$,	пятая	— $N = 8$,
вторая	— $N = 24$,	шестая	— $N = 4$,
третья	— $N = 16$,	седьмая	— $N = 2$.
четвертая	— $N = 12$,		

Когда речь идет о кристаллических телах, то форма тела будет завершенной и выпуклой, но ограничения, свойственные совокупностям, вводят новый элемент — *двухсторонность* граней, которую необходимо учитывать. В самом деле, каждая грань кристалла имеет внеш-

* Теорема LXXXVIII моего предыдущего мемуара.

нюю и внутреннюю стороны. Можно заключить, что такое же различие имеет место и по отношению к частям граней, мысленно продолженных внутрь по другую сторону многоугольной площади, ограняющей кристалл.

В дальнейшем мы будем говорить, что две грани одного рода прямо сходны, когда вращение, устанавливающее совпадение их сеток, совмещает внутреннюю сторону одной с внутренней стороной другой. Легко видеть, что многоугольники, по которым эти грани соприкасаются с кристаллом, связаны осью, осуществляющей это вращение внутри самой кристаллической массы. Напротив, эти две грани будут называться обратно сходными, если движение, приводящее в совпадение их сетки, продолженные по мере надобности, приводит внутреннюю сторону одной из граней на внешнюю сторону другой. В этом случае ось вращения расположена вне кристалла.

Это определение показывает, что две грани, гомологичные по отношению к плоскости симметрии, всегда обратно сходны. Ведь масса кристалла содержится между двумя гомологичными частями двух граней. Следовательно, ребро двугранного угла, образованного этими гранями, находится вне кристалла или, по меньшей мере, расположено на его поверхности. Двойная ось, вращение на 180° вокруг которой приводит в совпадение эти грани, будет нормалью к данной плоскости симметрии. Опираясь на одну из точек этого ребра, она окажется вне кристалла.

Всякая грань, параллельная заданной, обратно сходна с ней. Ведь их совмещение с помощью простого переноса приводит внутреннюю сторону одной на внешнюю сторону другой. Аналогично этому всякая грань A, прямо сходная с гранью B, будет обратно сходной с гранью, параллельной грани B. В более общем виде можно сформулировать следующую теорему.

Теорема II. Две грани, прямо или обратно сходные с третьей гранью, прямо сходны между собой; две грани обратно сходны, если одна из них прямо сходна с третьей гранью, а другая с ней обратно сходна.

В итоге всякая кристаллическая форма разлагается на две полуформы. Первоначально заданную грань A будем называть определяющей гранью формы, состоящей из $5N_6+3N_4+2N_3+N_2$ граней, прямо сходных с A. Грань A' параллельна A и обратно сходна с ней. Существует $5N_6+3N_4+2N_3+N_2$ граней, прямо сходных с A' и обратно сходных с A.

Стало быть, всякая форма разлагается на две полуформы: прямую полуформу, состоящую из $1+5N_6+3N_4+2N_3+N_2$ граней, прямо сходных между собой; обратную полуформу, состоящую из такого же рода числа граней, прямо сходных между собой, но обратно сходных с гранями прямой полуформы и попарно параллельных этим последним.

Если форма состоит из плоскостей спайности, то не имеет смысла различать внутренние и внешние стороны граней, и число плоскостей, составляющих форму спайности, равно $1+5N_6+3N_4+2N_3+N_2$.

Значение числа N, указанное уравнением (1), отвечает общему случаю, когда определяющая грань A формы не обладает никакой особенностью положения относительно осей симметрии. Тогда эта форма будет называться косой формой.

В противоположном случае можно прийти к тому, что на N гранях, составляющих косую форму, две или несколько граней сливаются в одну. Число N сводится тогда к одному из своих сомножителей. Получается сокращенная форма, менее богатая гранями, чем косая форма, но симметрия которой при всем том остается полной. Мы возвратимся к этому вопросу в § VI.

§ IV. Вывод граней и выбор осей координат

Внешняя поверхность кристалла образуется иногда гранями, принадлежащими одной кристаллической форме, но чаще — двум или многим различным формам. Из заданной грани выводятся все остальные грани, принадлежащие той же форме. Другие формы могут объединяться с предыдущей, образовывая вместе с ней поверхность кристалла.

Существуют некоторые законы, перед которыми склоняется природа и которые допускают вывод всех граней и возможных форм кристалла, наблюдаемых для каждого минерального вида, с некоторыми свойственными ему константами.

Этот вывод граней до сих пор основывался или на методе убывания — молекулярном методе, или же на методе рациональных усечений — геометрическом методе.

В первом методе, предложенном Бергманом и Гаюи, выбирается некоторый параллелепипед как ядро кристалла. Далее присоединяют параллелепипеды гранью к грани так, чтобы образовались налегающие друг на друга слои. Каждый последующий слой отступает на одну и ту же величину по сторонам своего контура по сравнению с нижележащим слоем. В каждом слое наложение параллелепипедов порождает цепочки, одинаково расположенные по отношению друг к другу. Размеры ядра постоянны, и их надо определить раз и навсегда. Далее остается только варьировать закон наложения параллелепипедов, которые Гаюи назвал молекулами убывания. Доказывается, что в этом случае всякая плоскость, параллельная грани, проходящей через вершины, оставшиеся неиспользованными при боковом наложении, пересекает три ребра одного из телесных углов ядра по отрезкам, пропорциональным некоторым простым подмножителям первоначальных длин ребер. Варьируя взаимные отношения этих подмножителей, можно получить все возможные грани.

В методе рациональных усечений выбираются три прямые, пересекающиеся в одной точке внутри кристалла, и на этих прямых откладываются три длины a, b, d, называемые параметрами. Эти величины и углы, которые фиксируют их относительное положение, являются специфическими константами, которые надо установить опытным путем.

Они остаются постоянными для всех образцов одного минерального вида. Эти прямые, называемые кристаллографическими осями, чаще всего являются осями симметрии кристалла. Тогда закон вывода граней может быть выражен следующим образом: если взять на осях длины, соответственно равные

$$\frac{1}{g}a, \ \frac{1}{h}b, \ \frac{1}{k}d,$$

где g, h, k — целые числа, отрицательные в случае, когда отрезок должен отсчитываться в противоположную сторону параметра, то плоскость, проведенная через три конца этих отрезков, будет одной из возможных граней кристалла.

Если одно из чисел g, h, k равно нулю, то соответствующий отрезок будет бесконечен и плоскость грани будет параллельна одной из трех осей.

Грань обозначается символом (ghk). Закон вывода граней заключается в неограниченном изменении целых чисел g, h, k, которые называются характеристиками грани.

Эти два способа вывода в итоге совпадают и, очевидно, идентичны нашему методу вывода ретикулярных плоскостей. В самом деле, в совокупности, отнесенной как к осям к трем сопряженным рядам, где a, b, d — параметры этих рядов, общее уравнение ретикулярной плоскости в линейных координатах имеет вид:

$$g\frac{\xi}{a}+h\frac{\eta}{b}+k\frac{\zeta}{d}=C, \tag{2}$$

где g, h, k — три характеристики ретикулярной плоскости (ghk). Если совместить координатные оси совокупности в нашем представлении с кристаллографическими осями, определяемыми немецкими кристаллографами, и если для одной и для другой взять те же параметры и приписать g, h, k те же значения, то плоскость с уравнением (2), отсекающая на осях расстояния $\frac{c}{g}a$, $\frac{c}{h}b$, $\frac{c}{k}d$ от начала, совпадет с гранью в системе рациональных усечений.

Таким образом, ретикулярные плоскости с символом (ghk) в точности совпадают с плоскостями рациональных усечений в немецкой кристаллографии, которые Франкенгеймом, Вевелем и Миллером обозначались тем же символом (ghk). Это — также грани убывания, по Гаюи. Более того, символом $\{ghk\}$ Миллер обозначал совокупность всех граней, объединяющихся с гранью (ghk) при образовании полной формы в ранее определенной кристаллической системе. Мы сохраним это обозначение, которое будет кратким выражением для N граней, составляющих форму (см. стр. 144).

Обозначим, так же как Миллер,

$$\varkappa\{ghk\} \text{ прямую полуформу,} \tag{3}$$

соответствующую (ghk), и через

$$\varkappa\{ghk\} \text{ — обратную полуформу.} \tag{4}$$

Теперь для каждой из семи кристаллических систем следует сделать подходящий выбор координатных осей, к которым мы должны соотнести грани кристаллов. За координатные оси мы будем брать по возможности три оси симметрии системы. Однако это не всегда обязательно, и Миллер описал тройную систему (ромбоэдрическую), принимая за оси координат ребра порождающего ромбоэдра, которые не являются осями симметрии кристалла.

Во всех кристаллических системах, исключая первую и последнюю, существует, по крайней мере, одна главная ось симметрии (см. таблицу, стр. 107 мемуара о системах точек).

Эту ось всегда будем располагать вертикально и совмещать с осью линейной координаты ζ и целочисленной координаты z, которые ей соответствуют. В тричетверной системе, где существуют три четверные оси, одна из них, выбранная произвольно, будет осью z.

При наличии в одной системе нескольких кристаллических видов при выборе осей следует руководствоваться соответствием с гексаэдрическим видом, из которого остальные виды с легкостью выводятся подходящим центрированием. Кроме того, этот вид обладает тем замечательным свойством, что три ребра его порождающего гексаэдра являются сопряженными рядами совокупности.

В пятой системе, которая заключает два гексаэдрических вида: один с прямоугольным основанием, другой — с ромбическим, вид с прямоугольным основанием должен служить отправным пунктом.

Тричетверная система. За координатные оси принимаем три ребра куба, служащего ядром гексаэдрического вида. Оси x, y, z перпендикулярны между собой. Три параметра равны между собой и обозначены a, a, a. Координатные оси — это четверные оси совокупности. Далее мы увидим, четверные оси можно заменить четырьмя тройными осями совокупности, но эта замена должна делаться только в исключительных случаях, поскольку в общем она приводит к усложнению результатов.

Шестерная система. Принимаются те же оси, что и для тройной системы, которые выводятся способом, указанным на стр. 93 мемуара о системах точек.

Четверная система. Три ребра прямой призмы с квадратным основанием, образующей порождающее тело гексаэдрического вида, принимаются за оси координат. За ось z берется четверная ось, за оси x, y — двойные оси первого рода, a, a, d — параметры этих осей. Параметр осей второго рода равен $a\sqrt{2}$.

Тройная система. В качестве координатных осей можно взять, по Миллеру, три ребра порождающего ромбоэдра. Ту же систему осей можно применить к шестерной системе, которая выводится из нее, ибо ретикулярные плоскости одни и те же для обеих систем.

Однако надо заметить, что 12 граней, которые в совокупности составляют наиболее общую форму тройной системы (см.: Миллер. Кристаллография. Стр. 77), не представляют полной формы шестерной си-

стемы. Чтобы получить остальные 12 граней, надо повернуть грани с символом $\{ghk\}$ на 180° вокруг шестерной оси.

В системе Миллера, где координатные оси параллельны ребрам порождающего ромбоэдра, легко найдем, что плоскость (ghk) при повороте на 180° вокруг тройной оси совпадет с ретикулярной плоскостью $(g'h'k')$, где g', h', k' — целые числа, определенные из уравнений (Кристаллография, § 133):

$$\begin{aligned} -g+2h+2k&=g', \\ 2g-h+2k&=h', \\ 2g+2h-k&=k'. \end{aligned} \tag{5}$$

Стало быть, формы с двенадцатью гранями $\{ghk\}$, $\{g'h'k'\}$ объединятся, чтобы образовать наиобщую форму шестерной системы. Однако предпочтительно, как мы будем говорить далее, в тройной и шестерной системах взять за ось z главную ось системы, за оси x и y — две из трех двойных осей первого рода, пересекающихся в плоскости, перпендикулярной z. Параметр оси z равен d, а для осей x и y он равен a.

Тридвойная система. За оси принимаются три ребра прямоугольного параллелепипеда, образующего порождающее тело прямоугольного гексаэдрического вида. Тогда координатные оси совпадают с осями симметрии и являются в то же время сопряженными рядами этого вида. Параметры a, b, d не равны между собой, ось z предполагается вертикальной и рассматривается как главная ось системы.

Двойная система. За ось z принимаем двойную ось и располагаем ее вертикально. Эта ось является одним из ребер прямой призмы, которая в гексаэдрическом виде образует порождающее тело совокупности. Она, следовательно, нормальна плоскости xy. Ее параметр равен d. Оси x и y — два некоторых сопряженных ряда сетки, проведенной в плоскости. Они образуют между собой угол, равный δ, и их параметры равны a и b.

Асимметричная система. Три некоторых сопряженных ряда, пересекающихся в одной точке, могут быть приняты за оси координат. Здесь a, b, d — параметры этих рядов, α, β, δ — углы, образованные осями между собой на плоскостях yz, xz, xy; μ, ν, ω — двугранные углы, противолежащие этим плоским углам.

В общем примем координатные оси, которыми пользовался Миллер, однако в следующем параграфе будет показано, что мы отходим от метода знаменитого профессора для шестерных, тройных и двойных систем.

§ V. Кристаллографические обозначения

Мы уже видели, что символ (ghk) представляет последовательность параллельных ретикулярных плоскостей с уравнением

$$g\frac{\xi}{a}+h\frac{\eta}{b}+k\frac{\zeta}{d}=C,$$

или, более просто, в целочисленных координатах,

$$gx + hy + kz = C. \qquad (6)$$

Чтобы различать грань (ghk) и грань, параллельно расположенную по другую сторону кристалла, Миллер предлагает эту последнюю обозначать ($-g$, $-h$, $-k$), или ($\bar{g}$, $\bar{h}$, $\bar{k}$). Это справедливо в предположении, что начало координат находится в середине кристалла и число C существенно положительное. В дальнейшем будет соблюдаться данное условие.

Система обозначений, предложенная Вейсом и принятая большинством немецких кристаллографов, заключается в записи в форме геометрической прогрессии трех расстояний, которые рассматриваемые грани или им параллельные отсекают на трех осях, начиная от начала. Стало быть, a, b, d — три параметра, если отрезки, отсеченные на осях x, y, z, равны ma, nb, pd. Обозначение грани при этом следующее: $ma : nb : pd$.

В силу принципа рациональных усечений, m, n, p будут целыми или дробными числами, способными стать бесконечными, но никогда не равными нулю.

Предыдущее выражение эквивалентно уравнению

$$\frac{\xi}{ma} + \frac{\eta}{nb} + \frac{\zeta}{pd} = 1. \qquad (7)$$

Приведем три коэффициента $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ к наименьшему общему знаменателю C и зададим

$$\frac{1}{m} = \frac{g}{C}; \quad \frac{1}{n} = \frac{h}{C}; \quad \frac{1}{p} = \frac{k}{c}, \qquad (8)$$

где g, h, k — взаимно простые целые числа. Тогда будем иметь

$$g\frac{\xi}{a} + h\frac{\eta}{b} + k\frac{\zeta}{a} = C,$$

что приводит нас к грани с символом (ghk). Следовательно, три формулы

$$ma : nb : pd, \quad \frac{1}{g}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{k}d, \quad (ghk)$$

эквивалентны. Но хотя обозначения Вейса обладают преимуществами перед обозначениями Гаюи, новые обозначения более предпочтительны, ибо характеристики g, h, k более удобны в вычислениях, чем $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, так же как в тригонометрии легче оперировать с синусом и косинусом, чем с секансом и косекансом.

Не будем говорить о других символических обозначениях, принятых различными авторами. Миллер полностью исчерпал этот вопрос в одной из глав своей «Кристаллографии», и я могу только отослать к ней своих читателей.

Нельзя обойти молчанием обозначение с четырьмя характеристиками, введение которых оказало большую услугу кристаллографии. Придуманное сначала Вейсом для ромбоэдрических кристаллов, оно было использовано Франкенгеймом в его интересной работе, опубликованной в 1826 г. в l'Isis.

В этой новой системе первая, или главная, ось ромбоэдрических кристаллов есть тройная ось с параметром d. Три другие оси — прямые, расположенные в плоскости, нормальной главной оси, и наклоненные одна к другой под углом в 60°. Параметры этих трех осей a, a, a, так что обозначение граней будет иметь вид:

$$ma : na : qa : pd,$$

где m, n, q, p — целые или дробные числа.

Но прежде чем применять эти обозначения к кристаллическим системам, надо обобщить определение характеристики, данное на стр. 68 мемуара о системе точек.

Характеристикой плоскости (ghk) по отношению к некоторой оси или ряду с параметром d будет в дальнейшем число, на которое надо разделить параметр d, чтобы получить отрезок, вырезанный двумя смежными плоскостями, принадлежащими серии (ghk). С этой точки зрения характеристика g относительно оси x есть число, на которое надо разделить a, чтобы получить отрезок, заключенный на этой оси между началом координат и плоскостью $gx+hy+kz=1$. То же самое для характеристик h и k.

Пусть в общем G — характеристика ретикулярной плоскости (ghk) по отношению к оси, соединяющей начало координат с узлом, целочисленные координаты которого (m, n, p). Из решения задачи XXVII мемуара о системах точек следует, что

$$G = gm + hn + kp. \tag{9}$$

Если плоскость (ghk) параллельна ряду mnp, то

$$gm + hn + kp = 0.$$

Характеристика плоскости по отношению к ряду, взятому за координатную ось, будет равна нулю.

Три координатные оси необходимы для определения положения точек, линий или плоскостей совокупности. Ничто не препятствует введению четвертой координатной оси, которую назовем вспомогательной осью и которая проходит через начало координат и узел (—1, —1, —1). Обозначим через e параметр новой оси, l — характеристика ретикулярных плоскостей по отношению к этой оси, s — целочисленная координата узла, отнесенного к этой оси. Следует заменить символ (ghk) символом

($ghkl$). Уравнение ретикулярной плоскости, смежной плоскости, содержащей начало координат, может принять вид:

$$\begin{aligned} gx + hy + kz &= 1, \\ gx + hy + ls &= 1, \\ gx + kz + ls &= 1, \\ hy + kz + ls &= 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Оси x, y, z, s сопряжены по три. Заметим, что g, h, k, l связаны отношением

$$g + h + k + l = 0 \tag{11}$$

(формула (59) мемуара о системах точек).

Вместо вспомогательной оси можно выбрать ряд, идущий из начала координат в точку (—1, —1, 0). C — параметр этой новой оси, t — координаты узлов, измеренных относительно этой оси, и i — характеристика ретикулярных плоскостей относительно этой оси. Тогда следует заменить символ (ghk) символом ($ghik$). Уравнение ретикулярной плоскости, смежной плоскости, содержащей начало координат, запишется в виде одной из трех следующих форм:

$$\left.\begin{aligned} gx + hy + kz &= 1, \\ gx + it + kz &= 1, \\ hy + it + kz &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Заметим, что g, h, i связаны соотношением

$$g + h + i = 0, \tag{13}$$

которое является формулой (21) мемуара о системах точек.

Оси x, y, z образуют тогда три попарно сопряженных ряда на плоскости xy.

Обозначение четырьмя характеристиками в тричетверной системе. Когда надо применить это обозначение к системе, необходимо предположить, что совокупность является гексаэдрического вида и ей отвечают четыре тройные оси. Возьмем за координатные оси четыре ряда, идущие из начала координат в точки $(1, 1, \bar{1})$, $(1, \bar{1}, 1)$, $(\bar{1}, 1, 1)$, $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. По общим формулам преобразования символов (задача XXVII) плоскость (ghk) в новой системе осей примет вид:

$$(g + h - k, g - h + k, -g + h + k, -g - h - k) = (GHKL).$$

Прямая полуформа, соответствующая грани ($GHKL$), будет состоять тогда из 24 граней, полученных путем перестановок четырех характеристик. Изменяя одновременно все знаки, получим соответствующую обратную полуформу обозначений:

шесть граней куба — $\{1\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}\}$,

восемь граней правильного октаэдра — $\{1\ 1\ 1\ \bar{3}\}$,

двенадцать граней ромбического додекаэдра — $\{1\ 0\ 0\ \bar{1}\}$,
двадцать четыре грани тетракисгексаэдра — $\{GH\bar{G}\bar{H}\}$.

Обозначение четырьмя характеристиками в шестерной системе. Шестерную ось Oz (рис. 1) примем за ось z и предположим, что она вертикальна. Среди шести вершин правильного шестиугольника $GI'HG'IH'$, который окружает начало O, выберем три чередующиеся вершины G, H, I; OG примем за положительную ось x, OH — за положительную ось y и OI — за вспомогательную ось, или ось координаты t. Эти линии являются двойными осями первого рода совокупности, а их параметры обозначаются через a.

В этой системе осей символом некоторой ретикулярной плоскости будет $(ghik)$. Характеристики g, h, i подчинены соотношению (13).

Чтобы найти все грани, принадлежащие той же форме, что и определяющая грань $(ghik)$, заметим, что при повороте на 60° вокруг Oz от Ox к Oy отрезки $\frac{a}{g}$, $\frac{a}{h}$, $\frac{a}{i}$ перейдут в OG, OH, OI на прямых OI', OG', OH', откуда ясно, что таким образом получена грань $(\bar{h}\bar{i}\bar{g}k)$. Все грани, гомологичные $(ghik)$ относительно шестерной оси, выводятся перестановкой первой и третьей характеристик и одновременной переменой трех первых знаков.

Далее, если повернуть $(ghik)$ на 180° вокруг оси x, получим грань $(gih\bar{k})$, и так же $(ihg\bar{k})$, $(hgi\bar{k})$ при повороте той же грани на 180° вокруг осей y и z. Так получена система граней, гомологичных $(ghik)$ по отношению к двойным осям первого рода.

То же самое мы получаем для осей второго рода.

Из двенадцати граней прямой полуформы, изменяя одновременно все знаки, получим двенадцать граней обратной полуформы. Полная диаграмма 24 граней формы, наиболее общей для шестерной системы, задана формулами:

$$\left.\begin{array}{r} \begin{array}{rllll} & ghik & \bar{h}\bar{i}\bar{g}k & gih\bar{k} & \bar{h}\bar{g}\bar{i}\bar{k} \\ \varkappa\{ghik\} = & ighk & \bar{g}\bar{h}\bar{i}k & ihg\bar{k} & \bar{g}\bar{i}\bar{h}k \\ & higk & \bar{i}\bar{g}\bar{h}k & hgi\bar{k} & \bar{i}\bar{h}\bar{g}\bar{k}, \\ & \bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k} & hig\bar{k} & \bar{g}\bar{i}\bar{h}k & hgik \\ \varkappa\{\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}\} = & \bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k} & ghi\bar{k} & \bar{i}\bar{h}\bar{g}k & gihk \\ & \bar{h}\bar{i}\bar{g}\bar{k} & igh\bar{k} & \bar{h}\bar{g}\bar{i}k & ihgk. \end{array} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Мы возвратимся к этому вопросу при изучении влияния, оказываемого молекулярными многогранниками на фигуры кристаллических форм.

Обозначение четырьмя характеристиками в тройной системе. Среди всех граней, прямо подобных $(ghik)$ по предыдущей диаграмме, надо сохранить те, которые получены поворотом на 120° вокруг главной оси, т. е. $(ighk)$ и $(higk)$, а также те, которые получены поворотом на 180° во-

круг прямых OG, OH, OI (рис. 1), т. е. прямых, которые в тройной совокупности остаются двойными осями.

Отсюда следует, что, принимая эти прямые за оси x, y, t, для диаграммы формы, содержащей все грани того же рода, что и $(ghik)$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{matrix} & ghik & gih\bar{k} \\ \varkappa\{ghik\} = & ighk & ihg\bar{k} \\ & higk & hgi\bar{k}, \end{matrix} \\ &\begin{matrix} & \bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k} & \bar{g}\bar{i}\bar{h}k \\ \varkappa\{\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}\} = & \bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k} & \bar{i}\bar{h}\bar{g}k \\ & \bar{h}\bar{i}\bar{g}\bar{k} & \bar{h}\bar{g}\bar{i}k. \end{matrix} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Здесь форма $\{ghik\}$ существенно отличается от формы $\{ghi\bar{k}\}$. При перестановке между собой трех первых характеристик следует иметь в виду, что если желательно остаться в пределах той же кристаллической формы, то всякая не круговая перестановка * трех первых характеристик должна сочетаться с изменением знака этих характеристик или последней характеристики. И наоборот: всякое изменение знака или трех характеристик одновременно или только одной третьей должно сочетаться с не круговой перестановкой трех первых характеристик. Из этого легко заключить, что всякая форма тройной системы может быть представлена символическим выражением $\{g, h, \overline{g+h}, k\}$, в котором g, h, k — положительные числа, в крайнем случае равные нулю. Грань $(g, h, \overline{g+h}, k)$ будет называться о п р е д е л я ю щ е й г р а н ь ю ф о р м ы.

Форма $\{h, g, \overline{g+h}, k\}$ может быть названа г е м и т р о п н о й от формы $\{g, h, \overline{g+h}, k\}$, ибо от одной к другой можно перейти поворотом на 180° вокруг главной оси, и $(h, g, \overline{g+h}, k)$ будет ее определяющей гранью.

Имея заданную грань с символом (ghk) в системе координатных осей, введенных Миллером для ромбоэдрических кристаллов, можно определить, какой вид приобретает этот символ в обозначениях с четырьмя характеристиками.

Пусть (рис. 2) O — начало координат, OGx, OHy, OIt — три координатные оси, x, y, t — двойные оси совокупности и XYZ — элементарный треугольник в плоскости, наиболее близкой к плоскости GHI. Наклонные прямые OX, OY, OZ являются осями x, y, z в системе Миллера. Возьмем Ox, Oy, Ot перпендикулярными к OX, OY, OZ.

Пусть (m, n, p) — координаты G в системе Миллера, (m', n', p') — координаты H, (m'', n'', p'') — координаты I, (m''', n''', p''') — выход тройной оси, нормальной плоскости.

* Перестановка n букв называется к р у г о в о й, если буквы расположены в вершинах правильного n-угольника и считывание ведется от произвольно взятой вершины в натуральном порядке.

Соединив ZG и отметив, что $OYZG$ — параллелограмм, легко находим

$$\begin{array}{lll} m=0, & n=-1, & p=1, \\ m'=1, & n'=0, & p'=-1, \\ m''=-1, & n''=1, & p''=0, \\ m'''=1, & n'''=1, & p'''=1. \end{array}$$

Следовательно, в силу общих формул преобразований (уравнения (58) в мемуаре о системах точек), новыми символами будут

$$(k-h,\ g-k,\ h-g,\ g+h+k).$$

Это можно обозначить так:

$$(ghk)=(k-h,\ g-k,\ h-g,\ g+h+k). \tag{16}$$

Если взять OG', OH', OI' за положительные координатные оси, то получим

$$(ghk)=(h-k,\ k-g,\ g-h,\ g+h+k). \tag{17}$$

Наоборот, легко находится, что обозначению $(ghik)$ в системе, образованной Ox, Oy, Ot и тройной осью, соответствует в системе осей Миллера эквивалентный символ

$$(k\pm(h-i),\ k\pm(i-g),\ k\pm(g-h))=(ghik). \tag{18}$$

Верхний знак здесь соответствует случаю, когда новые координатные оси, поднимаясь над плоскостью рисунка, совпадают с OX, OY, OZ, а нижние знаки соответствуют случаю, когда новые оси совпадают с OX', OY', OZ'.

Важно отметить, что оси x и y не образуют систему осей, которая сопряжена с осью z. Можно все же рассматривать ее как таковую, если мысленно уничтожить все узлы, содержащиеся в параллельных xy ретикулярных плоскостях, порядковый номер которых не имеет сомножителя три. Мною доказано (теорема LXII мемуара о системах точек), что это уничтожение не меняет направления ретикулярных плоскостей совокупностей.

Обозначение четырьмя характеристиками в двойной системе. Продолжаем предполагать, что совокупность построена по гексаэдрическому виду. Двойная ось, расположенная вертикально, будет принята за ось z. В ретикулярной плоскости, нормальной этой оси, построим элементарный треугольник OGI (рис. 1), имеющий одну из своих вершин в начале координат O. Одна из двух сторон, охватывающих угол O, например OG, будет взята за ось x, OH, параллельная GI', будет взята за ось y и OI, продолжение OI', — за вспомогательную ось. Три угла GOH, GOI, HOI будут дополнительными к OGI', GOI', $OI'G$. Наконец, будем иметь $OG=a$, $OH=GI'=b$, $OI=OI'=c$.

Обозначение грани (ghk) примет вид ($ghik$) из-за вспомогательной оси, расположенной на плоскости xy.

Соответствующая полная форма этой грани будет задана формулами:

$$\varkappa\{ghik\} = \frac{ghik}{\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}}, \quad \varkappa\{\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}\} = \frac{\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}}{ghik}. \tag{19}$$

Всегда можно предположить, что OGI' — основной треугольник сетки, и тогда углы GOH, GOI, HOI будут тупыми.

Более того, мы допустим, что

$$a < b < c. \tag{20}$$

Тогда берем за ось x ряд с наименьшим параметром в сетке и за ось y — второй по малости параметра ряд.

Если в кристалле мы переходим от OG к OH и от OH к OI путем вращения с востока на запад через юг, то говорим, что кристалл п р а в ы й. Если вращение осуществляется с востока на запад через север, то кристалл л е в ы й. Для того чтобы в этом случае правильно установить кристалл, достаточно повернуть его на 180° вокруг некоторой прямой, расположенной в плоскости xy. Стало быть, всегда можно предположить, что кристалл установлен перед наблюдателем в правом положении. Тогда различие между внутренней и внешней частями кристалла устанавливается легко.

Отметим, что кристалл повернут вокруг своей вертикальной оси так, что линия OGx направлена на восток, т. е. слева направо от наблюдателя, глядящего на север.* Вертикаль на плоскость, проведенная через HI', получит тогда символ $(01\bar{1}0)$ и будет обращена к наблюдателю, но почти всегда на кристалле найдется хорошо развитая грань, параллельная этой плоскости. Положительная ось y будет тогда заключена в юго-западном квадранте, а вспомогательная ось — в северо-западном квадранте. Эти условия облегчают изучение кристаллов двойной системы. Подобным же образом они применимы к кристаллам тройной и шестерной систем. Будем всегда предполагать, что $(01\bar{1}0)$ — это грань, обращенная к наблюдателю в кристаллах этих систем. Все грани формы $(01\bar{1}\,k)$ будут выглядеть сходным образом, не будучи вертикальными.

§ VI. Сокращенные формы и число их граней

Объединение однородных граней, параллельных или одной оси симметрии системы, или различным осям одного рода, будем называть п а р а л л е л ь н о й формой. Для этого достаточно, чтобы одна из граней формы была параллельна оси симметрии. В случае оси четного порядка параллельная ей грань будет перпендикулярна к плоскости симметрии,

* Это используется при ориентации географических карт.

которая нормальна этой оси в совокупности. Форма будет тогда называться ортопараллельной.

Форму, каждая грань которой вынуждена быть нормальной одной из осей одного рода, будем называть нормальной. Нормальная форма может быть в то же время параллельной оси или четного, или нечетного порядка. В первом случае она будет называться нормальной ортопараллельной формой.

Параллельные формы. Если ось нечетного порядка, то параллельная ей форма сохраняет все свои грани. Примерами этого является форма $\{ghio\}$ в тройной системе и форма $\{g,\ h,\ g\pm h\}$ в тричетверной системе. Если γ — коэффициент приведения числа сторон, то в этом случае

$$\gamma=1. \tag{21}$$

Если ось четного порядка (форма ортопараллельна), то при повороте на 180° (ghk) вокруг этой оси таким образом полученная грань $(g'h'k')$ одновременно прямо сходна (ghk) по отношению к этой оси и обратно сходна (ghk), как ей параллельная. Стало быть, прямая полуформа $\varkappa\,\{ghk\}$ и обратная полуформа $\varkappa\,\{\bar{g}\bar{h}\bar{k}\}$ совпадают, число граней вполовину уменьшится и для ортопараллельной формы будем иметь

$$\gamma=\frac{1}{2}. \tag{22}$$

Это — следствие теоремы LXXXIX мемуара о системах точек. Ниже дан список ортопараллельных форм в различных кристаллических системах.

Тричетверная система: два рода осей четного порядка, два рода ортопараллельных форм. Форма, параллельная четверной оси с общим символом $\{gho\}$, — тетракисгексаэдр минералогов. Форма, параллельная двойным осям с общими символами $\{ghh\}$ или $\{ggk\}$, — триакисоктаэдр минералогов, содержащий как простую разновидность трапецоэдр. Эти две формы имеют 24 грани. Форма $\{g,\ h,\ g\pm h\}$ параллельна тройным осям. Многогранник, порожденный всеми этими гранями, имеет их 48.

Шестерная система: три рода осей четного порядка, три рода ортопараллельных форм. Форма, параллельная шестерной оси с общим символом $\{ghio\}$, — додекаэдрическая бесконечная призма. Форма, параллельная двойным осям первого рода с символом $\{g\bar{o}gk\}$, — биромбоэдр первого рода минералогов. Форма, параллельная двойным осям второго рода с символом $\{g,\ g,\ \overline{2g},\ k\}$, — биромбоэдр второго рода минералогов. Эти три формы имеют по 12 граней.

Четверная система: как и в предыдущей системе. Форма, параллельная четверной оси с символом $\{gho\}$, — октаэдрическая бесконечная призма. Форма, параллельная двойным осям первого рода с символом $\{gok\}$, — квадратооктаэдр первого рода минералогов. Форма, параллельная двойным осям второго рода с символом $\{ggk\}$, — квадратооктаэдр второго рода. Эти три формы имеют по 8 граней.

Тройная система: единственного рода ось четного порядка и единственного рода ортопараллельная форма. Форма, параллельная двойным осям с символом $\{go\bar{g}k\}$, — ромбоэдр минералогов. Эта форма имеет шесть граней, тогда как общая форма имеет их 12. Форма $\{ghio\}$, параллельная тройной оси, должна, стало быть, иметь 12 граней; додекаэдрическая призма минералогов. Полученное тело отличается от скаленоэдра наиболее общей косой формы тем, что все его 12 граней параллельны тройной оси. Скаленоэдр содержит, как частный случай, биромбоэдрическую форму $\{g,\ g2\bar{g}k\}$, которая не является параллельной формой в тройной системе и имеет 12 граней.

Тридвойная система: три рода осей четного порядка, три рода ортопараллельных форм. Форма, параллельная x, имеет символ $\{ohk\}$; форма, параллельная y, — $\{gok\}$, форма параллельная z, — $\{gho\}$. Это — ромбические бесконечные призмы.

Двойная система: единственная ось четного порядка, одна ортопараллельная форма. Параллельная форма с символом $\{ghio\}$ состоит из двух граней, параллельных между собой и параллельных оси симметрии системы. Если ортопараллельная грань в то же время параллельна другой оси нечетного порядка, то эта особенность не изменяет числа граней формы.

Если ортопараллельная грань в то же время параллельна другой оси четного порядка, то (теорема XII мемуара о симметричных многогранниках) прямая, нормальная плоскости двух осей четного порядка, обязательно является осью симметрии совокупности. Форма, перпендикулярная этой прямой, будет нормальной формой.

Нормальные формы. Пусть L^q — ось, по отношению к которой форма нормальна, Q — число осей такого рода в совокупности.

Сначала предположим, что никакая плоскость симметрии не проходит через эту ось.

В тот момент, когда грань (ghk) станет нормальной L^q, $q - 1$ гомологичных по отношению к этой оси граней совместятся с ней (теорема XC мемуара о системах точек). Отсюда ясно, что общее число граней находится в пределах от N до $\frac{N}{q}$. Для нормальных форм будем иметь

$$\gamma = \frac{1}{q}. \tag{23}$$

Прямые и обратные полуформы остаются различными: число граней каждой из этих полуформ равно $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$.

Перед тем как перейти к дальнейшему изложению материала, заметим, что число граней нормальной формы может выражаться числом $2Q$, ибо каждой оси L^q соответствует грань (ghk) и другая, обратно параллельная ей грань. Отсюда выводим уравнение

$$Qq = \frac{N}{2}$$

и следующую теорему.

Теорема III. Номер порядка оси, которая не содержится ни в одной из плоскостей симметрии заданной совокупности, будучи умноженной на число осей ее рода, даст в произведении число, равное половине числа граней косой формы.

Если плоскость симметрии проходит через ось L^q, то нормаль к P является осью четного порядка и образует угол 90° с осью L^q. Стало быть, нормальная к L^q форма в то же время параллельна оси четного порядка, т. е. ортопараллельна. В этом случае не только число $\frac{1}{2}N$ граней каждой прямой и обратной полуформ равны $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$, но, более того, эти две полуформы совпадают так, что общее число граней равно $\frac{1}{2}\frac{N}{q}$. Стало быть, для нормальных ортопараллельных форм имеем

$$\gamma = \frac{1}{2q}. \tag{24}$$

Так как число граней формы равно $2Q$, справедлива следующая теорема.

Теорема IV. Если номер порядка оси, содержащейся в плоскости симметрии совокупности, умножить на число осей этого рода, то получится постоянное число, равное одной четвертой от числа граней косой формы системы.

Уравнения (21), (22), (23) и (24) полностью разрешают задачу сокращения, которое может претерпевать сокращенная форма в числе своих граней.

Ниже дан перечень нормальных форм в различных кристаллических системах. Исключение составляют формы, нормальные к двойным осям в двойной и тройной системах, они все ортопараллельны.

Тричетверная система: оси трех родов, три нормальные формы. Форма, нормальная четверным осям; символ $\{100\}$ — куб. Форма, нормальная к тройным осям; символ $\{111\}$ — правильный октаэдр. Форма, нормальная к двойным осям; символ $\{110\}$ — ромбический додекаэдр.

Шестерная система: оси трех родов, три нормальные формы. Форма, нормальная шестерной оси; символ $\{0001\}$ — две параллельные грани или основания. Форма, нормальная к двойным осям первого рода; символ $\{11\bar{2}0\}$ — гексаэдрическая призма второго рода. Форма, нормальная двойным осям второго рода; символ $\{10\bar{1}0\}$ — гексаэдрическая призма второго рода.

Четверная система: три рода осей, три нормальные формы. Форма, нормальная четверной оси; символ $\{001\}$ — две параллельные грани или основания. Форма, нормальная двойным осям первого рода; символ

{100} — квадратная призма первого рода. Форма, нормальная двойным осям второго рода; символ {110} — квадратная призма второго рода.

Тройная система: два рода осей, две нормальные формы. Форма, нормальная тройной оси; символ {0001} — две параллельные грани или основания. Форма, нормальная двойным осям; символ $\{11\bar{2}0\}$ — гексаэдрическая призма второго рода. Форма $\{10\bar{1}0\}$ не есть нормальная форма, но просто частный случай параллельной формы $\{go\bar{g}k\}$, которая является ромбоэдром, — это гексаэдрическая призма первого рода.

Тридвойная система: три рода осей, три нормальные формы. Формы, нормальные осям первого, второго и третьего родов, будут иметь, соответственно, символы {100}, {010}, {001}. Каждой из этих форм соответствуют две параллельные грани.

Двойная система: единственная ось, одна нормальная форма. Форма нормальна двойной оси; символ {0001}; она состоит из двух параллельных граней — основания кристалла.

§ VII. Применение теории полярных совокупностей к методу зон

Определения. Кристаллографы называют з о н о й систему граней, параллельных одной прямой, называемой о с ь ю з о н ы. Другими словами, зона — это множество ретикулярных плоскостей, проходящих через определенный ряд совокупности.

Плоскость, содержащая нормали, опущенные из произвольной точки внутри кристалла на грани, слагающие зону, будет называться п л о с к о с т ь ю к р у г а з о н ы. Продолженная до поверхности сферы проекций, в которой кристалл занимает центр, эта плоскость пересечет сферу по большому кругу, который будет называться к р у г о м з о н ы. Он содержит полюсы всех больших кругов всех составляющих зону граней. Каждый такой полюс — это точка пересечения сферы с нормалью, опущенной из центра кристалла на его грань и продолженной до бесконечности. Его называют п о л ю с о м г р а н и.

Мы будем предполагать, что центр сферы проекций находится в одном из узлов совокупности. Этот узел, взятый за начало координат, будет также началом координат в полярной совокупности, соответствующей заданной совокупности.

Мысленно построим эту полярную совокупность, свойства которой были изложены в § VI мемуара о системах точек. Надо напомнить, что всякая плоскость, нормальная ряду *mnp*, будет иметь символ [(*mnp*)] и что всякая прямая, нормальная ретикулярной плоскости (*ghk*), имеет символ [*ghk*]. Тогда легко доказываются следующие теоремы.

Теорема V. Всякая ось зоны — это ряд совокупности, слагающей кристалл.

Это — следствие следствий теоремы XXXI предыдущей работы. Обычно оси зоны в то же время и ребра кристалла.

Теорема VI. Всякий круг зоны есть ретикулярная плоскость полярной совокупности, и наоборот.

Круг зоны нормален оси зоны: стало быть, он принадлежит полярной совокупности, в которой является одной из ретикулярных плоскостей (теорема CVII мемуара о системах точек).

Теорема VII. Если ось зоны имеет символ ghk, то ее круг зоны будет иметь символ $[(ghk)]$.

Это — следствие теоремы CVII. Ясно, что два символа оси зоны и круга зоны образованы одними и теми же характеристиками. Зона определена, когда известен символ оси зоны, или, что сводится к тому же, символ круга зоны.

Задача I. Определить зону, если известны две грани (ghk), $(g'h'k')$.

Это сводится к нахождению оси зоны mnp или круга зоны $[(mnp)]$. Так как точка (m, n, p) должна принадлежать двум граням (ghk), $(g'h'k')$, то

$$gm + hn + kp = 0,$$
$$g'm + h'n + k'p = 0,$$

откуда

$$m = \frac{hk' - kh'}{D}, \quad n = \frac{kg' - gk'}{D}, \quad p = \frac{gh' - hg'}{D}, \tag{25}$$

D — наибольший общий делитель трех числителей. Стало быть, символ круга зоны будет $[(hk'-kh',\ kg'-gk',\ gh'-hg')]$. Запомним, что его надо сократить на общий множитель трех характеристик.

Задача II. Найти грань, зная, что она принадлежит двум зонам, оси которых mnp, $m'n'p'$.

Пусть (ghk) — символ грани. Для ее определения имеем два уравнения

$$gm + hn + kp = 0,$$
$$gm' + hn' + kp' = 0,$$

откуда

$$g = \frac{np' - pn'}{D}, \quad h = \frac{pm' - mp'}{D}, \quad k = \frac{mn' - nm'}{D}. \tag{26}$$

Это будут уравнения (35) мемуара о системах точек. Символ грани можно записать следующим образом $(np'-pn',\ pm'-mp',\ mn'-nm')$, если только его сократить на общий множитель трех характеристик.

Задача III. Найти характеристики грани, находящейся в той же зоне, что и грани (ghk), $(g'h'k')$, и в той же зоне, что и грани $(g''h''k'')$, $(g'''h'''k''')$.

Ось первой зоны будет иметь символ $hk'-kh'$, $kg'-gk'$, $gh'-hg'$; а ось второй зоны — символ $h''k'''-k''h'''$, $k''g'''-g''k'''$, $g''h'''-h''g'''$. Образовав разности между их перекрестными произведениями, находим символ грани.

Теорема VIII. Ретикулярная плоскость (ghk), проходящая через начало координат и содержащая ряды mnp, $m'n'p'$, содержит также все ряды с символами в виде $jm+j'm'$, $jn+j'n'$, $jp+j'p'$, где j и j' — некоторые целые числа.

Так как плоскость (ghk) содержит узлы (m, n, p), (m', n', p'), то

$$gm+hn+kp=0,$$

$$gm'+hn'+kp'=0.$$

Следовательно,

$$g(jm+j'm')+h(jn+j'n')+k(jp+j'p')=0.$$

Стало быть, эта плоскость содержит узлы с координатами $jm+j'm'$, $jn+j'n'$, $jp+j'p'$.

Теорема IX. Наоборот, символ всякого ряда MNP, расположенного в ретикулярной плоскости, содержащей ряды mnp, $m'n'p'$, может быть представлен в виде $mj+m'j'$, $nj+n'j'$, $pj+p'j'$, где j и j' — надлежащим образом выбранные целые числа.

В самом деле, пусть задан некоторый произвольный ряд вне данной плоскости. Обозначим для краткости

$$mn'p''-mp'n''+pm'n''-nm'p''+np'm''-pn'm''=(mn'p''),$$

$$mn'-nm'=(mn'),\ (nm''-mn'')=(nm''),\ (m'n''-n'm'')=(m'n''),$$

$$pm'-mp'=(pm'),\ mp''-pm''=(mp''),\ (p'm''-m'p'')=(p'm''),$$

$$np'-pn'=(np'),\ (pn''-np'')=(pn''),\ (n'p''-p'n'')=(n'p''),$$

или

$$M=\frac{m(n'p'')+m'(pn'')+m''(np')}{(mn'p'')}M+\frac{m(p'm'')+m'(mp'')+m''(pm')}{(mn'p'')}N+$$

$$+\frac{m(m'n'')+m'(nm'')+m''(mn')}{(mn'p'')}P.$$

Разрешим эти выражения относительно m, m', m'', отметив, что

$$M(np')+N(pm')+P(mn')=0.$$

Учитывая, что ряд MNP расположен в данной плоскости, обозначим выражения следующим образом:

$$M(n'p'')+N(p'm'')+P(m'n'')=j,$$

$$M(pn'')+N(mp'')+P(nm'')=j'.$$

В результате получим

$$M=\frac{mj+m'j'}{(mn'p'')}.$$

Проделав то же самое с характеристиками N, P, найдем

$$N=\frac{nj+n'j'}{(mn'p'')}, \quad P=\frac{pj+p'j'}{(mn'p'')}.$$

Стало быть, ряд с символом $mj+m'j'$, $nj+n'j'$, $pj+p'j'$ отличается от ряда MNP множителем $(mn'p'')$.

Задача IV. Найти все ряды, содержащиеся в плоскости (ghk).

Пусть MNP — такой ряд, $gM+hN+kP=0$ — условие того, что узел (M, N, D) принадлежит плоскости. Если иметь два различных решения (m, n, p), (m', n', p') вышенаписанного уравнения, то все другие решения будут, в силу предыдущей теоремы, содержаться в формулах

$$\begin{aligned} M &= jm+j'm', \\ N &= jn+j'n', \\ P &= jp+j'p', \end{aligned} \tag{27}$$

где j и j' — произвольно выбранные целые числа.

Задача V. Найти все грани, содержащиеся в зоне mnp.

Иными словами, надо найти в полярной совокупности все ряды, содержащиеся в круге зоны $[(mnp)]$.

Пусть $[GHK]$ — такой ряд. При этом должно выполняться соотношение

$$Gm+Hn+Kp=0.$$

Если иметь два решения выше написанного уравнения, т. е. две грани (ghk), $(g'h'k')$, принадлежащие зоне mnp, то все остальные задаются формулами:

$$\begin{aligned} G &= jg+j'g', \\ H &= jh+j'h', \\ K &= jk+j'k', \end{aligned} \tag{28}$$

где j и j' — подходящим образом выбранные целые числа.

Теорема X. Всякий ряд MNP, удовлетворяющий неравенству $M^2+N^2+P^2>2$, может рассматриваться как пересечение двух различных ретикулярных плоскостей, одна из которых содержит ряды mnp, $m'n'p'$, а другая — ряды $m''n''p''$, $m'''n'''p'''$. Эти четыре ряда будут такими, что все четыре суммы квадратов $m^2+n^2+p^2$, $m'^2+n'^2+p'^2$, $m''^2+n''^2+p''^2$, $m'''^2+n'''^2+p'''^2$ должны быть меньше суммы $M^2+N^2+P^2$.

Первый случай. Ни одна из характеристик не равна 0. Тогда ряд MNP расположен в плоскости, содержащей ряды MNO и 001, ибо при подстановке $j=1$, $j'=P$ (решение задачи IV) получится символ MNP.

Аналогично этому ряд MNP расположен в плоскости, содержащей MoP, 010, также в плоскости, содержащей oNP, 100. Эти две плоскости, так же как и предыдущая, существенно различны. Более того, сумма квадратов характеристик, очевидно, меньше $M^2+N^2+P^2$.

Второй случай. Одна из характеристик равна нулю, остальные превосходят 1 по абсолютному значению. Будем предполагать, что третья характеристика равна нулю и является символом заданного ряда MNo. Предыдущее решение становится ошибочным, и надо действовать следующим образом.

За первую ретикулярную плоскость, содержащую заданный ряд MNo, примем плоскость xy, которая содержит ряды 010, 100. За вторую ретикулярную плоскость — ту, которая содержит ряды Mo1 и o$N\bar{1}$. Складывая попарно характеристики, получим MNo. Это достаточно для доказательства того, что данный ряд содержится в этой плоскости (теорема VIII). Суммы M^2+1, N^2+1 меньше M^2+N^2, исключая случай, когда одна из характеристик равна ± 1.

Третий случай. Одна из характеристик равна 0, другая ± 1. Предположим, что $N=\pm 1$. Если при этом M отрицательна, то всегда можно сменить знаки трех характеристик. Следовательно, в $M\overset{\pm}{1}$o всегда можно M считать положительным, не ограничивая общности доказательства. Кроме того, зададим $M=1+M'$, где M' — строго положительное число.

По-прежнему за первую примем плоскость xy, за отличную от предыдущей вторую возьмем ретикулярную плоскость, проходящую через $M'\bar{1}1$ и $10\bar{1}$. Эта плоскость содержит ряд $M\overset{\pm}{1}$o. Это ясно, если сложить попарно характеристики одного ранга. Но так как $M'+1=M$, то $M'^2+1+1 < M^2+1$. Стало быть, четыре суммы квадратов характеристик меньше M^2+1. Наконец, $M^2+N^2+P^2$ равно 2, когда одна из характеристик равна нулю, а другие равны по абсолютному значению единице. Сумма квадратов характеристик не способна к дальнейшему уменьшению.

Следствие. Ряд MNP можно получить из четырех рядов с более простыми характеристиками посредством пересечения плоскостей, содержащих эти последние ряды. Их можно произвести из других, еще более простых, и так до тех пор, пока сумма квадратов характеристик станет равной 1 или 2. Соответственно ряды 100, 010, 001 являются ребрами порождающего параллелепипеда совокупности, а ряды 110, $1\bar{1}0$, 101, $10\bar{1}$, 011, $01\bar{1}$ представляют диагонали его граней.

Теорема XI. Всякая грань (GHK), удовлетворяющая неравенству $G^2+H^2+K^2 > 2$, может быть определена как пересечение двух различных зон, одна из которых содержит грани (ghk), $(g'h'k')$, а другая — грани $(g''h''k'')$, $(g'''h'''k''')$. Все четыре суммы $g^2+h^2+k^2$, $g'^2+h'^2+k'^2$; $g''^2+h''^2+k''^2$; $g'''^2+h'''^2+k'''^2$ будут меньше $G^2+H^2+K^2$.

Это — следствие теоремы X. Нормаль к грани (GHK) есть ряд с символом $[GHK]$ в полярной совокупности. Его можно заменить двумя ретикулярными плоскостями, содержащими $[GHK]$. Одна из них проходит через $[ghk]$, $[g'h'k']$, а другая — через $[g''h''k'']$, $[g'''h'''k''']$. Четыре суммы квадратов характеристик этих рядов меньше квадрата характеристики ряда $[GHK]$. Эти ретикулярные плоскости представляют два круга

зоны. Одна из них содержит нормали к граням (GHK), (ghk), $(g'h'k')$, а другая — нормали к граням (GHK), $(g''h''k'')$, $(g'''h'''k''')$. Стало быть, (GHK) принадлежит одновременно двум зонам и может быть определена их пересечением.

Следствие. При пересечении двух зон можно определить грань (GHK) из четырех других граней с более простыми характеристиками. Эти грани в свою очередь можно выразить через более простые, пока не дойдем до граней (100), (010), (001) элементарного параллелепипеда или до граней (110), $(1\bar{1}0)$, (101), (101), (011), $(01\bar{1})$, параллельных шести диагональным плоскостям этого параллелепипеда. На рис. 3 в проекциях на плоскость, нормальную оси z, изображены положения полюсов этих девяти граней.

Теорема XII.* На сфере проекций полюс некоторой грани (ghk) может быть определен последовательным пересечением кругов зон, полученных попарным соединением других полюсов с предварительным известным положением, если только заранее указаны места полюсов четырех граней (100), (010), (001), (111).

В силу предыдущего следствия, всегда можно установить положение полюса через положение полюсов, квадраты характеристик которых образуют сумму, меньшую трех. Остается удостовериться, как эти последние можно выразить через четыре полюса (100), (010), (001), (111).

Полюс (011) (рис. 3) помещается в точке пересечения круга зоны, проходящей через (001) и (010), с кругом зоны, проходящей через (100) и (111). Полюс (101) — пересечение двух кругов зон, проходящих через (001), (100) и (010), (111). Полюс (110), так же как $(\bar{1}\bar{1}0)$, является пересечением кругов зон, проходящих через (100) и (010) и через (001) и (111).

Исходя из этих трех полюсов, получим полюс $(0\bar{1}1)$ как пересечение круга зоны, проходящей через (001), (010), с кругом зоны, проходящей через (101) и (110). Полюс $(\bar{1}01)$ является пересечением кругов зон, проходящих через (001), (100) и через (011), (110). Наконец, полюсы $(1\bar{1}0)$, (110) соответствуют пересечению кругов зон, проходящих через (010), (100) и через (011), (101). Эти различные случаи изображены на рис. 3.

Не следует забывать, что всякому полюсу на сфере проекций соответствует диаметрально противоположный, характеристики которого точно такие же, но с противоположным знаком. Следовательно, посредством четырех первоначально заданных полюсов шаг за шагом, путем последовательных пересечений можно получить всякий другой полюс.

Примечание. Эта теорема — одна из наиболее важных в кристаллографии. В ней используется метод зон для определения характеристик граней. Важно знать заранее, что любая грань кристалла подчинена этому методу.

Задача VI. Зная относительные положения ребер кристалла, найти его порождающий параллелепипед.

* Эта теорема уже доказана Миллером в работе: «Traité de Cristallographie». XXXIV[e] cahier.

Решение поставленной задачи представляет пример замечательной обратной взаимности, существующей между совокупностью и полярной ей совокупностью. Проведя касательно к сфере единичного радиуса плоскости, нормальные заданным ребрам, получим замкнутый со всех сторон многогранник, который можно рассматривать как вырезанное в полярной совокупности множество молекул кристалла. Определим его кристаллическую систему и форму его порождающего параллелепипеда обычными в кристаллографии методами и, наконец, найдем соответствующую полярную совокупность методом, изложенным в решении задачи XXXII мемуара о системах точек.

§ VIII. Вычисление углов кристалла

При исследовании кристалла можно определять или угол между ребрами, или наклон ребра к грани, или двугранный угол между двумя гранями. Особое место в кристаллографии занимает определение двугранных углов ввиду своей исключительной важности на практике.

Интересно отметить то, что все предложенные формулы можно свести к единственной формуле, которая на основе определенных постоянных с помощью трех логарифмов дает значение двугранного угла любого кристалла.

По-прежнему будем называть a, b, d параметрами осей x, y, z, α, β, δ — плоскими углами, μ, ν, ω — двугранными углами этих осей, E — средний интервал узлов или молекул, наконец, $[a]$, $[b]$, $[d]$ — параметры осей $[x]$, $[y]$, $[z]$ в соответствующей полярной совокупности. Напомним, что, в силу построения этой совокупности, мы имеем

$$[a]=\frac{bd\sin\alpha}{E},\quad [b]=\frac{ad\sin\beta}{E},\quad [d]=\frac{ab\sin\delta}{E}, \tag{29}$$

$$E^3=abd\sin\alpha\sin\beta\sin\omega=abd\sin\alpha\sin\delta\sin\nu=abd\sin\beta\sin\delta\sin\mu. \tag{30}$$

Задача VII. Найти угол между двумя рядами с символами mnp, $m'n'p'$.

Пусть OT, OT', (рис. 4) — два заданных ряда. Уравнение плоскости OTT' (уравнение (34) из мемуара о системах точек) имеет вид:

$$(np'-pn')x+(pm'-mp')y+(mn'-nm')z=0.$$

Пусть D — общий множитель этих трех двучленов. Обозначим их через (np'), (pm'), (mn'). Если g, h, k — частное от деления их на D, то получим

$$(np')=gD,\quad (pm')=hD,\quad (mn')=kD.$$

Здесь (ghk) будет символом плоскости OTT'; $S(ghk)$ является площадью элементарного параллелограмма сетки этой плоскости. Если мы достроим параллелограм $OTT'T''$, то будем иметь, в силу уравнения (45) мемуара о системах точек,

$$\text{площадь } OTT'T''=DS(ghk).$$

С другой стороны, обозначив $(\widehat{P, P'})$ угол TOT' и через P_{mnp}, $P_{m'n'p'}$ параметры OT, OT', получим

$$\text{площадь } OTT'T'' = P_{mnp}P_{m'n'p'} \sin(\widehat{P, P'}),$$

откуда

$$\sin(\widehat{P, P'}) = \frac{DS\,(ghk)}{P_{mnp}P_{m'n'p'}}. \tag{31}$$

По этой формуле можно вычислить угол $(\widehat{P, P'})$, но надо найти два дополнительных значения. Обойдем эту трудность, учтя то обстоятельство, что треугольники OTT'', OTT' дают нам

$$OT''^2 = OT^2 + OT'^2 + 2OT \cdot OT' \cos(\widehat{P, P'}),$$
$$TT'^2 = OT^2 + OT'^2 - 2OT \cdot OT' \cos(\widehat{P, P'}),$$

откуда

$$\cos(\widehat{P, P'}) = \frac{\frac{1}{4}(OT''^2 - OT'^2)}{-OT \cdot PT'}.$$

При этом имеем

$$OT'' = P_{m+m',\, n+n',\, p+p'},$$
$$TT' = P_{m-m',\, n-n',\, p-p'}.$$

В итоге получим

$$\cos(\widehat{P, P'}) = \frac{\frac{1}{4}\left(P^2_{m+m',\, n+n',\, p+p'} - P^2_{m-m',\, n-n',\, p-p'}\right)}{P_{mnp}P_{m'n'p'}}. \tag{32}$$

Разделив (31) на (32), найдем

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, P'}) = \frac{DS\,(ghk)}{\frac{1}{4}\left(P^2_{m+m',\, n+n',\, p+p'} - P^2_{m-m',\, n-n',\, p-p'}\right)}. \tag{33}$$

Формула (33) наиболее применима в практике, потому что она использует только три логарифма вместо четырех и множитель $S\,(ghk)$ постоянен для всех ребер, принадлежащих одной грани.

Если теперь представить уравнение (73) мемуара о системах точек в виде

$$S^2(ghk) = E^2[g^2[a]^2 + h^2[b]^2 + k^2[d]^2 - 2gh[a][b]\cos\omega -$$
$$- 2gk[a][d]\cos\nu - 2hk[b][d]\cos\mu] \tag{34}$$

и если припомнить, что

$$P^2_{mnp} = m^2a^2 + n^2b^2 + p^2d^2 + 2mnab\cos\delta + 2mpad\cos\beta + 2npbd\cos\alpha, \tag{35}$$

то, раскрыв числитель (33) и заменив в знаменателе Dg, Dh, Dk через (np'), (pm'), (mn'), получим

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, P'}) = \frac{E\sqrt{(np')^2[a]^2 + (pm')^2[b]^2 + (mn')^2[d]^2 - 2(np')(pm')[a][b]\cos\omega - 2(np')(mn')[a][d]\cos\nu - 2(pm')(mn')[b][d]\cos\mu}}{mm'a^2 + nn'b^2 + pp'd^2 + (mn' + nm')ab\cos\delta + (mp' + pm')ad\cos\beta + (np' + pn')bd\cos\alpha}. \qquad (36)$$

Когда 12 коэффициентов

$$E^2[a]^2,\ E^2[b]^2,\ E^2[d]^2,\ 2E^2[a][b]\cos\omega,\ 2E^2[a][d]\cos\nu,\ 2E^2[b][d]\cos\mu,$$
$$a^2,\ b^2,\ d^2,\ ab\cos\delta,\ ad\cos\beta,\ bd\cos\alpha$$

будут вычислены раз и навсегда, то, умножив их на всегда целое достаточно простое число, найдем угол $(\widehat{P, P'})$ с помощью трех логарифмов.

Задача VIII. Найти угол между двумя гранями (ghk), $(g'h'k')$.

Это — угол между двумя нормалями к граням. Данные нормали имеют символы $[ghk]$, $[g'h'k']$ в полярной совокупности. Можно пользоваться формулой (36), обозначив

m, n, p, m', n', p' через g, h, k, g', h', k',
$a, b, d, [a], [b], [d]$ через $[a], [b], [d], a, b, d$,
α, β, δ через $180^\circ - \mu,\ 180^\circ - \nu,\ 180^\circ - \omega$,
μ, ν, ω через $180^\circ - \alpha,\ 180^\circ - \beta,\ 180^\circ - \delta$,
$(\widehat{P, P'})$ через $180^\circ - (\widehat{F, F'})$.

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-E\sqrt{(hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + (gh')^2d^2 + 2(hk')(kg')ab\cos\delta + 2(hk')(gh')ad\cos\beta + 2(kg')(gh')bd\cos\alpha}}{gg'[a]^2 + hh'[b]^2 + kk'[d]^2 - (gh' - hg')[a][b]\cos\omega - (gk' - kg')[a][d]\cos\nu - (hk' - kh')[b][d]\cos\mu}. \qquad (37)$$

Величина под корнем, деленная на квадрат общего множителя многочленов (gh'), (hk'), (kg'), представляет квадрат параметра оси зоны, содержащей грани (ghk), $(g'h'k')$. Это частное остается на протяжении всей зоны.

Вычислив раз и навсегда 12 коэффициентов:

$$E^2a^2,\ E^2b^2,\ E^2d^2,\ 2E^2ab\cos\delta,\ 2E^2ad\cos\beta,\ 2E^2bd\cos\alpha,\ [a]^2,\ [b]^2,\ [d]^2,$$
$$[a][b]\cos\omega,\ [a][d]\cos\nu,\ [b][d]\cos\mu,$$

легко найти двугранный угол $(\widehat{F, F'})$ с помощью трех логарифмов.

Полезно заметить, что формула (37) может быть записана в виде:

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-EP\,(hk'),\ (kg'),\ (gh')}{gg'[a]^2 + hh'[b]^2 + kk'[d]^2 - (gh' - hg')[a][b]\cos\omega - (gk' - kg')[a][d]\cos\nu - (hk' + kh')[b][d]\cos\mu},$$

где символ $P(hk')$, (kg'), (gh') есть параметр оси зоны, содержащей грани F и F' или один из сомножителей этого параметра.

Определим, во что перейдет формула (37) в двойной системе, когда обозначения граней содержат четыре характеристики.

Задача IX. Найти угол между двумя гранями $(ghik)$, $(g'h'i'k')$ в двойной системе.

Если ограничиться рассмотрением трех осей x, y, z, из которых третья нормальна плоскости, содержащей две другие, то характеристики i и i' исчезают. Поскольку $\alpha=\beta=90^\circ$, $\mu=\nu=90^\circ$, $\omega=\delta$, то

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-F\sqrt{(gh')^2 d^2 + (hk')^2 a^2 + (kg')^2 b^2 + 2(hk')(kg')\,ab\cos\delta}}{kk'[d]^2 gg'[a]^2 + hh'[b]^2 - (gh' - hg')[a][b]\cos\delta}. \quad (38)$$

Пусть m, n, p — ось зоны граней F и F', так что

$$m = \frac{(hk')}{D} = \frac{-(kh')}{D}, \quad n = \frac{(kg')}{D}, \quad p = \frac{(gh')}{D};$$

величина под корнем будет иметь значение D^2P^2mnp.

Однако если спроектировать узел (m, n, p) на плоскость xy в $(m, n, 0)$, то, очевидно,

$$P^2_{mnp} = p^2d^2 + P^2_{mn0}. \quad (39)$$

Установим теперь вспомогательную ось параметра c, удовлетворяющую сформулированным условиям (стр. 155), и восстановим характеристики i и i'.

Ряд mno может принадлежать сетке плоскости xy, не зависящей от совокупности. Он может иметь символ (gh) — оси x и y остаются теми же (мемуар о системах точек, стр. 48). Не учитывая общего множителя, который может существовать между m и n, этот символ будет $(-n, m)$, ибо ряд проходит через начало координат и узел с координатами (m, n). Его можно заменить символом (ghi) (тот же мемуар, стр. 53), и тогда новый символ будет $(-n, m, -m+n)$, так как сумма трех характеристик должна равняться 0. Тогда, в силу формулы (22) мемуара о системах точек,

$$P^2_{mn0} = -m(-m+n)a^2 + n(-m+n)b^2 + mnc^2.$$

Однако, с другой стороны,

$$-m + n = \frac{(kh') + (kg')}{D} = \frac{-(ki')}{D}$$

при учете, что суммы $g+h+i$, $g'+h'+i'$ равны нулю.

Если подставить значения m, n в предыдущую формулу, то

$$P^2_{mn0} = \frac{-(kh')(ki')a^2 - (kg')(ki')b^2 - (kg')(kh')c^2}{D^2}.$$

Подставив его в уравнение (39) и умножив на D^2, заметив, что Dp равно (gh'), найдем

$$D^2P^2_{mnp} = (gh')^2d^2 - (kh')(ki')a^2 - (kg')(ki')b^2 - (kg')(kh')c^2. \quad (40)$$

Это — величина, содержащаяся под корнем выражения $\operatorname{tang}(\widehat{F, F'})$.

Величину $(gh')^2$ можно заменить на эквивалентные величины $(gi')^2$ или $(hi')^2$.

Над знаменателем можно осуществить аналогичное преобразование. В самом деле, по формулам стр. 128 мемуара о системах точек

$$[a]=\frac{db}{E},\ [b]=\frac{da}{E}.$$

Однако треугольник GOI' на рис. 1, в котором

$$OG=a,\ GI=b,\ OI'=c,\ OGI'=180^\circ-\delta,$$

дает соотношение

$$2ab\cos\delta=c^2-a^2-b^2.$$

Стало быть,

$$[a][b]\cos\delta=\frac{d^2}{2E^2}(c^2-a^2-b^2).$$

Если в знаменатель (38) подставить эти значения, то он примет вид:

$$kk'[d]^2+\frac{d^2}{2E^2}[2gg'b^2+2hh'a^2-(gh'+hg')(c^2-a^2-b^2)].$$

Раскрыв и заменив $g+h$ на $-i$, $g'+h'$ на $-i'$, получим

$$kk'[d]^2+\frac{d^2}{2E^2}[-(hi'+ih')a^2-(gi'+ig')b^2-(gh'+hg')c^2].$$

Отсюда ясно, что формула (38) после умножения числителя и знаменателя на E^2 примет вид:

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'})=$$

$$=\frac{-E^3\sqrt{(gh')^2d^2-(kh')(ki')a^2-(kg')(ki')b^2-(kg')(kh')c^2}}{kk'[d]^2E^2-\left(\frac{hi'+ih'}{2}\right)a^2d^2-\left(\frac{gi'+ig'}{2}\right)b^2d^2-\left(\frac{gh'+hg'}{2}\right)c^2d^2}. \quad (41)$$

Теперь можно заменить параметры a, b, c, d тригонометрическими линиями, зависящими от непосредственно наблюдаемых на кристалле углов. Разделим числитель и знаменатель на $[d]^2E^2$ и примем $\frac{d}{[d]E}=\Phi$. Далее, в силу $[d]=\frac{E^2}{d}$ (стр. 128 мемуара о системах точек), примем

$$\Phi=\frac{d^2}{E^3}=\frac{E}{[d]^2} \quad (42)$$

и заменим тогда (41) на

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \\ = \frac{-\sqrt{(gh')^2 \Phi^2 d^2 - (kh')(ki')\Phi^2 a^2 - (kg')(ki')\Phi^2 b^2 - (kg')(kh')\Phi^2 c^2}}{kk' - \left(\frac{hi' + ih'}{2}\right)\Phi^2 a^2 - \left(\frac{gi' + ig'}{2}\right)\Phi^2 b^2 - \left(\frac{gh' + hg'}{2}\right)\Phi^2 c^2}. \quad (43)$$

Полученная формула требует предварительного вычисления всего лишь четырех коэффициентов $\Phi^2 a^2$, $\Phi^2 b^2$, $\Phi^2 c^2$ и $\Phi^2 d^2$.

Обозначим теперь угол GOH (рис. 1) через $(\widehat{x, y})$; угол GOI — через $(\widehat{x, t})$; угол HOI — через $(\widehat{y, t})$ и возьмем за единицу длины диаметр круга, описанного вокруг треугольника GOI'; OG, $GI' = OH$, $OI' = OI$ — три параметра a, b, d.

Будем иметь

$$a = \sin(\widehat{y, t}),\ b = \sin(\widehat{x, t}),\ c = \sin(\widehat{x, y}),\ E^3 = ab\sin(\widehat{x, y})\, d = abcd. \quad (44)$$

Пусть U — двугранный угол, содержащийся между гранью $(01\bar{1}1)$, параллельной оси x, и плоскостью xy, или (0001); V — двугранный угол, содержащийся между $(10\bar{1}1)$, параллельной оси y, и (0001); наконец, W — двугранный угол, содержащийся между $(1\bar{1}01)$, параллельной дополнительной оси, и (0001). Легко найдем

$$\operatorname{tg} U = -\Phi a,\ \operatorname{tg} V = -\Phi b,\ \operatorname{tg} W = -\Phi c. \quad (45)$$

Из этого выводим дополнительное значение Φ для одного из трех уравнений

$$\Phi = -\frac{\operatorname{tang} U}{\sin(\widehat{y, t})} = -\frac{\operatorname{tang} V}{\sin(\widehat{x, t})} = -\frac{\operatorname{tang} W}{\sin(\widehat{x, y})}. \quad (46)$$

Углы $(\widehat{y, t})$, $(\widehat{x, t})$, $(\widehat{x, y})$ должны быть замерены на гониометре так же, как, по меньшей мере, **один** из углов U, V, W.

Зная Φ и, следовательно,

$$\Phi^2 d^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \operatorname{tang}^2 W}{\Phi^2} = \operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \sin^2(\widehat{x, y}), \quad (47)$$

получим

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \\ = \frac{-\sqrt{(gh')^2 \operatorname{tg}^2 U \operatorname{tg}^2 V \sin^2(\widehat{x, y}) - (kh')(ki')\operatorname{tg}^2 U - (kg')(ki')\operatorname{tg}^2 V - (kg')(kh')\operatorname{tg}^2 W}}{kk' - \frac{hi' + ih'}{2}\operatorname{tg}^2 U - \frac{gi' + ig'}{2}\operatorname{tg}^2 V - \frac{gh' + hg'}{2}\operatorname{tg}^2 W}. \quad (48)$$

Эта формула дает углы граней как функцию непосредственно измеряемых углов, что мне кажется наиболее удобным на практике. Можно обоз-

начить $\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \sin^2 (\widehat{x_1, y})$ через $\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 W \sin^2 (\widehat{x, t})$ или через $\operatorname{tang}^2 V \operatorname{tang}^2 W \sin^2 (\widehat{y, t})$.

Линейные параметры a, b, c заданы формулами (44), а d — уравнением:

$$d = \operatorname{tg} U \sin (\widehat{x, t}) \sin (\widehat{x, y}) = \operatorname{tg} V \sin (\widehat{y, t}) \sin (\widehat{x, y}) = \\ = \operatorname{tg} W \sin (\widehat{y, t}) \sin (\widehat{x, t}) = \Phi abc. \quad (49)$$

Возьмем в качестве примера нейтральный нитрат ртути, углы которого измерены Мариньяком* (рис. 5). Шесть граней, обозначенных в работе Мариньяка τ, t, T, L, M, l, могут быть представлены следующими четырьмя характеристиками:

$\tau = (01\bar{1}0)$ — грань, параллельная оси x и оси z,
$t = (10\bar{1}0)$ — грань, параллельная оси y и оси z,
$T = (1\bar{1}00)$ — грань, параллельная оси t и оси z,
$L = (0001)$ — грань, нормальная оси,
$M = (1\bar{1}01)$, $l = (11\bar{2}1)$.

Гониометрическое наблюдение дало:

$$(\widehat{x, y}) = (01\bar{1}0), \widehat{\ }(10\bar{1}0) = \tau \text{ на } t = 108°40',$$
$$(\widehat{x, t}) = (01\bar{1}0), \widehat{\ }(1\bar{1}00) = \tau \text{ на } T = 116°35',$$
$$(\widehat{y, t}) = (10\bar{1}0), \widehat{\ }(1\bar{1}00) = t \text{ на } T = 134°45',$$
$$W = (1\bar{1}01), \widehat{\ }(0001) = M \text{ на } L = 138°10'.$$

Формулы (44) и (49) приводят к следующим значениям для основных элементов элементарной призмы совокупности:

$$a = 0.7102,\ b = 0.8943,\ c = 0.9474,\ d = 0.5685,\ E = 0.6994.$$

Далее имеем для постоянных уравнения (48)

$$\operatorname{tang}^2 U = 0.4503,\ \operatorname{tang}^2 V = 0.7140,\ \operatorname{tang}^2 W = 0.8010,$$
$$\operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V \sin^2 (\widehat{x, y}) = 0.2886.\ U_{\text{выч}} = 146°8',\ V_{\text{выч}} = 139°48'.$$

Находим наклон L к l. Так как $(g'h'i'k') = (0001)$, то общая формула приобретает вид:

$$\operatorname{tang} (\widehat{L, l}) = \frac{-\sqrt{-hi \operatorname{tang}^2 U - gi \operatorname{tang}^2 V - gh \operatorname{tang}^2 W}}{k} = \\ = -\sqrt{2 \operatorname{tang}^2 U + 2 \operatorname{tang}^2 V - \operatorname{tang}^2 W},$$
$$(\widehat{L, l}) = 128°59'.6.$$

* Annales de Chimie et Physique. 3-e serie, t. XXVII, p. 323. Повернуть кристалл на рис. 3 мемуара Мариньяка так, чтобы привести его ось симметрии в вертикальное положение.

Аналогично этому $(\widehat{L, \mu}) = 126°31'.4$, μ будет гранью $(02\bar{2}1)$, которая появляется иногда на ребре, отделяющем L от τ.

Одна из формул (41), (43), (48) полностью решает задачу IX. Если использовать формулу (43), то надо помнить, что $\Phi = \frac{d^2}{E^3}$. Общая формула (37) значительно упрощается, если оси взаимно перпендикулярны, что имеет место в тридвойной системе. То же справедливо для формулы (41), если углы между тремя положительными полуосями x, y, t равны 120°, что соответствует шестерной системе. Последовательно изучим эти два случая.

Задача X. Найти угол между гранями (ghk), $(g'h'k')$ в тридвойной и четверной системах.

Имеем $a = \beta = \delta = 90°$, $\mu = \nu - \omega = 90°$,

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-E\sqrt{(hk')^2 a^2 + (kg')^2 b^2 + (gh') d^2}}{gg' [a]^2 + hh' [b] + kk' [d]^2} =$$

$$= \frac{-E^3\sqrt{(hk')^2 a^2 + (kg')^2 b^2 + (gh')^2 d^2}}{gg' b^2 d^2 + hh' a^2 d^2 + kk' a^2 b^2}. \tag{50}$$

Если числитель и знаменатель разделить на $a^2b^2d^2$, то уравнение приобретет вид:

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = -\sqrt{\frac{(gh')^2}{a^2b^2} + \frac{(kg')^2}{a^2d^2} + \frac{(hk')^2}{b^2d^2}} : \frac{gg'}{a^2} + \frac{hh'}{b^2} + \frac{kk'}{d^2}.$$

В таком виде оно уже было задано Нейманном.* Его можно упростить, приняв, как и в предыдущей задаче,

$$\left.\begin{aligned} U &= (\widehat{011), (001}), \\ V &= (\widehat{101), (001}). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Тогда легко находим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} U &= -\frac{d}{b} = -\frac{d^2}{E^3} a, \\ \operatorname{tang} V &= -\frac{d}{a} = -\frac{d^2}{E^3} b. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Если разделить числитель и знаменатель третьего члена формулы (50) на a^2b^2, учитывая уравнение (52), то получим

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(hk')^2 \operatorname{tang}^2 U + (kg')^2 \operatorname{tang}^2 V + (gh')^2 \operatorname{tang}^2 U \operatorname{tang}^2 V}}{gg' \operatorname{tang}^2 U + hh' \operatorname{tang}^2 V + kk'}. \tag{53}$$

В этой формуле надо вычислять вместо шести коэффициентов только три.

---

* Beitrœge zur Krystallonomie. Berlin, 1823.

В четверной системе имеем $U = V$. Если разделить числитель и знаменатель на $\operatorname{tang}^2 U$, то формула примет вид:

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2 + \{(hk')^2 + (kg')^2\}\cot^2 U}}{gg' + hh' + kk'\cot^2 U}. \qquad (54)$$

Задача XI. Найти угол между гранями $(ghik)$, $(g'h'i'k')$ в шестерной и тройной системах.

В этом случае имеем $(\widehat{x, y}) = (\widehat{x, t}) = (\widehat{y, t}) = 120°$, $a = b = c$. Если возвести в квадрат $(kg') + (kh') + (ki') = 0$, то получим

$$-(kh')(ki') - (kg')(ki') - (kg')(kh') = \frac{1}{2}\{(kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\}.$$

С другой стороны,

$$-(hi' + ih') - (gi' + ig') - (gh' + hg') = gg' + hh' + ii'.$$

Если подставить эти значения в формулу (43), то найдем

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{(gh')^2\,\Phi^2 d^2 + \frac{1}{2}\{kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\}\,\Phi^2 a^2}}{kk' + \frac{1}{2}(gg' + hh' + ii')\,\Phi^2 a^2}, \qquad (55)$$

$$\Phi^2 a^2 = \operatorname{tang}^2 U,$$

$$\Phi^2 d^2 = \operatorname{tang}^4 U \sin^2(\widehat{x, y}) = \frac{3}{4}\operatorname{tang}^4 U.$$

Если числитель и знаменатель в (55) умножить на $2\cot^2 U$, то

$$\operatorname{tang}(\widehat{F, F'}) = \frac{-\sqrt{3(gh')^2 + \{(kg')^2 + (kh')^2 + (ki')^2\}\,2\cot^2 U}}{gg' + hh' + kk'\,2\cot^2 U}. \qquad (56)$$

В полученной формуле $2\cot^2 U$ можно заменить на $\frac{3a^2}{2d^2}$.

Это уравнение будет давать с помощью единственной постоянной $2\cot^2 U$, вычисленной раз и навсегда, значения двугранных углов между гранями в шестерной и тройной совокупностях.

Вопросы нахождения углов между гранями, различных в кристаллических системах, детально исследованы по причине важности их для практики. То же самое надо проделать и для углов между ребрами. Это — цель следующих задач.

Задача XII. Найти углы между двумя рядами mnp, $m'n'p'$ в двойной системе.

Пусть a, b, d — параметры и δ — угол, заключенный между a и b. Рассмотрим в полярной совокупности параметры $[a]$, $[b]$, $[d]$ и угол $[\delta] = 180° - \delta$, содержащийся между $[a]$ и $[b]$.

В этой совокупности плоскости, нормальные mnp, $m'n'p'$, имеют символы $[(mnp)]$, $[(m'n'p')]$. Если добавить дополнительные характеристики o, o', так что

$$m+n+o=0,\ m'+n'+o'=0,$$

то можно определить угол между гранями $[(mnop)]$, $[(m'n'o'p')]$ и ему дополнительный. Заменим в формуле (41) буквы g, h, i, k на m, n, o, p; a, b, c, d, $[d]$ — на $[a]$, $[b]$, $[c]$, $[d]$, d; $(\widehat{F, F'})$ на $180^\circ-(\widehat{P, P'})$. Дополнительный параметр $[c]$ задается формулой

$$2[a][b]\cos(180^\circ-\delta)=[c]^2-[a]^2-[b]^2. \tag{57}$$

Тогда

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, P'})=$$
$$=\frac{E^3\sqrt{(mn')^2[d]^2-(pn')(po')[a]^2-(pm')(po')[b]^2-(pm')(pn')[c]^2}}{pp'd^2E^3-\left(\frac{no'+on'}{2}\right)[a]^2[d]^2-\left(\frac{mo'+om'}{2}\right)[b]^2[d]^2-\left(\frac{mn'+nm'}{2}\right)[c]^2[d]^2}. \tag{58}$$

Этому выражению легко можно придать форму уравнений (43) или (48). Значения $[a]$, $[b]$, $[d]$ заданы уравнениями

$$[a]=\frac{bd}{E},\ [b]=\frac{ad}{E},\ [d]=\frac{E^2}{d},$$

а c — уравнением (57).

Задача XIII. Найти угол между двумя рядами mnp, $m'n'p'$ в тридвойной системе.

Пусть $(\widehat{P, P'})$ — угол между двумя рядами, равный дополнению к углу, образованному плоскостями $[(mnp)]$, $[(m'n'p')]$ полярной совокупности. Следовательно, если в формуле (50) заменить буквы g, h, k на m, n, p, a — на $[a]$, b — на $[b]$, d — на $[d]$, то получим

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, P'})=\frac{E\sqrt{(np')^2[a]^2+(pm')^2[b]^2+(mn')^2[d]^2}}{mm'a^2+nn'b^2+pp'd^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{(np')^2b^2d^2+(pm')^2a^2d^2+(mn')^2a^2b^2}}{mm'a^2+nn'b^2+pp'd^2}. \tag{59}$$

В этой формуле число неизвестных сводится к трем, если числитель и знаменатель разделить на d^2.

Задача XIV. Найти угол между двумя рядами mnp, $m'n'p'$ в шестерной системе.

Чтобы приспособить формулы (55) и (56) к решению этой задачи, следует предположить, что положительные полуоси x и y образуют между собой угол 60, но не 120°. Пусть в системе соответствующих осей существуют ряды, пересекающиеся под углом 120°. Чтобы привести эту систему к осям, пересекающимся под углом в 60°, достаточно заменить mnp на $m-n$, n, p или на m, $n-m$, p.

После этой замены становится ясно, что $[mnp]$, $[m'n'p]$ будут ретикулярными плоскостями полярной совокупности, и эта последняя будет иметь четыре оси, из которых три внутренние, горизонтальные, разделены одна от другой углами в 120°.

Таким образом, введя вспомогательные оси o, o', для которых

$$\begin{aligned} m+n+o&=0,\\ m'+n'+o'&=0, \end{aligned} \tag{60}$$

и заменив $2\cot^2 U$ на $2\cot^2[U]$, g, h, i, k на m, n, o, p, будем иметь

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, P'})=\frac{\sqrt{3(mn')^2+\{(pm')^2+(pn')^2+(po')^2\}\,2\cot^2[U]}}{mm'+nn'+oo'+pp'2\cot^2[U]}. \tag{61}$$

Здесь $[U]$ — значение угла, дополнительного U в полярной совокупности. Для его определения имеем соотношение:

$$2\cot^2[U]=\frac{3}{2}\frac{[a]^2}{[d]^2}.$$

В силу уравнения (94) мемуара о системах точек,

$$2\cot^2[U]=2\frac{d^2}{a^2}. \tag{62}$$

В качестве примера определим угол между mnp и 001, т. е. с осью z. Тогда имеем $m'=n'=0'=0$, $P'=1$, откуда

$$\operatorname{tang}(\widehat{P, \text{ось } z})=\frac{\sqrt{(m^2+n^2+o^2)\,2\frac{d^2}{a^2}}}{p2\frac{d^2}{a^2}}=\frac{a\sqrt{\frac{m^2+n^2+o^2}{2}}}{pd}=\frac{a\sqrt{m^2+n^2+mn}}{pd}.$$

Эта формула легко вычисляется непосредственно. Формулы (60), (61) и (62) дают полное решение задачи.

Задача XV. Найти ретикулярную плоскость, нормальную ряду mnp.

Пусть $m'n'p'$ — некоторый ряд, нормальный ряду mnp. Формула (36) показывает, что характеристики m', n', p' будут удовлетворять следующему условию:

$$mm'a^2+nn'b^2+pp'd^2+(mn'+nm')ab\cos\delta+(mp'+pm')ad\cos\beta+$$
$$+(np'+pn')bd\cos\alpha=0.$$

Для краткости обозначим

$$\left.\begin{aligned} ma^2+nab\cos\delta+pad\cos\beta&=g,\\ mab\cos\delta+nb^2+pbd\cos\alpha&=h,\\ mad\cos\beta+nbd\cos\alpha+pd^2&=k, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

тогда уравнение перейдет в следующее:

$$gm'+hn'+kp'=0.$$

При этом ряд $m'n'p'$ содержится в плоскости (ghk). Можно, стало быть, рассматривать g, h, k как характеристики нормальной плоскости, если только выбрать единицу длины, которая делает целочисленными a, b и d, ибо необходимо, чтобы g, h, k могли рассматриваться как целые числа.

Величины g, h, k, в общем, не будут простыми, но можно рассматривать их как, по меньшей мере, целые числа. Всегда можно умножить g, h, k на один и тот же множитель, значительно больший нуля и кратный единице, так чтобы уничтожить десятичную часть их разложения.

Задача XVI. Найти ряд, нормальный плоскости (ghk).

Приравнивая нулю знаменатель второго члена уравнения (37), имеем условие того, что плоскость $(g'h'k')$ будет нормальна заданной плоскости. Обозначив

$$\begin{aligned} g[a]^2 - h[a][b]\cos\omega - k[a][d]\cos\nu &= m, \\ -g[a][b]\cos\omega + h[b]^2 - k[b][d]\cos\mu &= n, \\ -g[a][d]\cos\nu - h[b][d]\cos\mu + k[d]^2 &= p, \end{aligned} \qquad (64)$$

увидим, что искомый нормальный ряд имеет символ mnp. Заметим, далее, что $[a]$, $[b]$, $[d]$ должны рассматриваться как целочисленные.

Числа m, n, p могут быть дробными и даже несоизмеримыми. Однако нет никакого неудобства, если сохранить их значения, указанные формулами (64).

Задача XVII. Найти угол между рядом mnp и ретикулярной плоскостью (ghk).

Первое решение. Представим, что на порождающем параллелограмме сетки заданной плоскости построен параллелепипед, основание которого имеет площадь $S\,(ghk)$, а боковые ребра совпадают по величине и направлению с параметром системы рядов mnp.

Число слоев, параллельных (ghk) и пересеченных этим параллелепипедом, будет равно (задача XX мемуара о системах точек)

$$\pm\,(mg + hn + pk).$$

Знак выбирается с таким расчетом, чтобы выражение было положительным. Следовательно, объем этого параллелепипеда будет равен

$$\pm\,(mg + nh + pk)\,E^3,$$

но если, с другой стороны, $(\widehat{P, F})$ — угол между рядом mnp и гранью (ghk), то объем параллелепипеда равен

$$P_{mnp} S\,(ghk) \sin(\widehat{P, F}),$$

отсюда

$$\sin(\widehat{P, F}) = \frac{\pm\,(mg + nh + pk)\,E^3}{P_{mnp} S\,(ghk)} = \frac{\pm\,(mg + nh + pk)\,E^2}{P_{mnp} P\,[ghk]}. \qquad (65)$$

Здесь не остается ничего другого, как заменить P_{mnp}, $S(ghk)$ их значениями из уравнений (34) и (35).

Второе решение. Зададим

$$\frac{1}{E^2}(g[a]^2 - h[a][b]\cos\omega - k[a][d]\cos\nu) = m',$$

$$\frac{1}{E^2}(-g[a][b]\cos\omega + h[b]^2 - k[b][d]\cos\mu) = n',$$

$$\frac{1}{E^2}(-g[a][d]\cos\nu + h[b][d]\cos\mu + k[d]^2) = p',$$

$m'n'p'$ — символы ряда, нормального плоскости (ghk).

Подставив эти значения в формулу (36), получим после приведения

$$\operatorname{cotang}(\widehat{P, F}) = \frac{\sqrt{(np')^2[a]^2 + (pm')^2[b]^2 + [mn']^2[d]^2 - 2(np')(pm')[a][b]\cos\omega - 2(np')(mn')[a][d]\cos\nu - 2(pm')(mn')[b][d]\cos\mu}}{(mg + nh + pk)E}. \quad (66)$$

Пусть

$$\frac{1}{E^2}(ma^2 + nab\cos\delta + pad\cos\beta) = g',$$

$$\frac{1}{E^2}(mab\cos\delta + nb^2 + pbd\cos\alpha) = h',$$

$$\frac{1}{E^2}(mad\cos\beta + nbd\cos\alpha + pd^2) = k'.$$

Здесь $(g'h'k')$ — символы ретикулярной плоскости, нормальной ряду mnp. Подставив значения g', h', k' в формулу (37), получим после приведения знаменателя

$$\operatorname{cotang}(\widehat{P, F}) = \frac{\sqrt{(hk')^2a^2 + (kg')^2b^2 + (gh')^2d^2 + 2(hk')(kg')ab\cos\delta + 2(hk')(gh')ab\cos\beta + 2(kg')(gh')bd\cos\alpha}}{(mg + nh + pk)E}. \quad (67)$$

Это уравнение может быть использовано в случае, когда $(\widehat{P, F})$ немного отличается от 90°, ибо тогда не только угол будет плохо определен по своему синусу (формула (65)), но также будем иметь недостоверность между двумя дополнительными значениями, заданными по этой формуле. Рассмотрение значений g', h', k', которые незначительно отличаются от g, h, k, не устраняет двойственности, которая отсюда следует.

Представим, например, что в шестерной системе, где $a=b$, $\alpha=\beta=90°$, $\delta=120°$, надо найти угол между ребром, проходящим через узлы $(\bar{1}, \bar{1}, 0)$, $(0, 0, 1)$, и плоскостью, проходящей через узлы $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

Этот угол должен быть заключен внутри тетраэдра, образованного этими четырьмя точками. Тогда имеем

$$a = b,\ \alpha = \beta = 90°,\ \delta = 120°,\ mnp = 111,\ (ghk) = (111),$$

откуда

$$g' = \frac{a^2}{2E^2},\ h' = \frac{a^2}{2E^2},\ k' = \frac{d^2}{E^2}.$$

Символ плоскостей, нормальных ряду 111, может быть записан в следующем виде:

$$\left(\frac{a^2}{2d^2}\ \frac{a^2}{2d^2}\ 1\right).$$

Эти плоскости, проходящие через узел (0, 0, 1), будут пересекать оси x, на расстоянии от начала координат, равном a, деленному на $\frac{a^2}{2d^2}$. Стало быть, искомый угол будет острым, если $\frac{a^2}{2d^2} < 1$, и будет тупым, если $\frac{a^2}{2d^2} > 1$. Имеем далее

$$P_{111}^2 = a^2 + d^2, \quad P^2[111] = 3[a]^2 + [d]^2.$$

Следовательно, учитывая уравнение (93) мемуара о системах точек, получаем

$$\sin[111\widehat{,\ }(111)] = \frac{3E^2}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{3[a]^2+[d]^2}} = \frac{3}{\sqrt{(a^2+d^2)\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{d^2}\right)}},$$

$$\operatorname{tang}[111\widehat{,\ }(111)] = \frac{3ad}{2d^2 - a^2}.$$

Эти формулы легко вычисляются непосредственно.

§ IX. Методы вычисления ретикулярной плотности граней кристалла

Ретикулярной плотностью * грани (ghk) назовем среднее число узлов, содержащихся в единице ее поверхности. Этот физический феномен имеет большое влияние как на внешнюю форму кристалла, так и на его спайность. Следовательно, важно определить его как функцию линейных или угловых параметров совокупности и характеристик g, h, k. Это является целью настоящего параграфа.

Если площадь поверхности порождающего параллелограмма плоскости (ghk) по-прежнему обозначить через $S(ghk)$, то плотность ρ сетки этой плоскости (мемуар о системах точек, стр. 55) будет иметь значение

$$\rho = \frac{1}{S(ghk)}. \tag{68}$$

* Это понятие уже определено в мемуаре о системах точек, стр. 55.

Задача, состоящая в измерении $S(ghk)$, находит решение по следующей общей формуле (там же, стр. 75, 120):

$$S^2(ghk) = g^2S^2(100) + h^2S^2(010) + k^2S^2(001) - 2ghS(100)S(010)\cos\omega - \\ - 2gkS(100)S(001)\cos\nu - 2hkS(010)S(001)\cos\mu. \quad (69)$$

Остается исследовать, как эта формула преобразуется для различных классов совокупностей и различных видов (гексаэдральный, октаэдральный...) этих классов.

Асимметричная система. Формула не упрощается.

Двойная система, гексаэдральный вид. Имеем $\mu = 90°$, $\nu = 90°$, $\omega = \delta$,

$$S^2(ghk) = g^2S^2(100) + h^2S^2(010) + k^2S(001) - 2ghS(100)S(010)\cos\delta.$$

В системе обозначений с четырьмя характеристиками g, h, i, k эта формула примет другой вид. Пусть c — параметр новой оси. Сначала будем иметь

$$S^2(ghik) = g^2S^2(10\bar{1}0) + h^2S^2(01\bar{1}0) + k^2S^2(0001) - 2ghS(10\bar{1}0)S(01\bar{1}0)\cos\delta,$$

далее

$$S(01\bar{1}0) = ad, \ S(10\bar{1}0) = bd, \ S(1\bar{1}00) = cd,$$

$$2S(10\bar{1}0)S(01\bar{1}0)\cos\delta = 2abd^2\cos\delta = d^2(c^2 - a^2 - b^2) = S^2(1\bar{1}00) - \\ - S^2(10\bar{1}0) - S^2(01\bar{1}0).$$

Подставляя второе выражение в первое и учитывая, что $g + h + i = 0$, найдем

$$S^2(ghik) = -ghS^2(1\bar{1}00) - giS^2(10\bar{1}0) - hiS^2(01\bar{1}0) + k^2S^2(0001). \quad (70)$$

В эту формулу можно ввести угловые постоянные U, V, W (стр. 171). В самом деле, из уравнений (42) и (45) легко выводим

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(01\bar{1}0)}{S(0001)}, \ \operatorname{tang} V = -\frac{S(10\bar{1}0)}{S(0001)}, \ \operatorname{tang} W = -\frac{S(1\bar{1}01)}{S(0001)}.$$

Следовательно,

$$S^2(ghik) = (-hi\operatorname{tang}^2 U - gi\operatorname{tang}^2 V - gh\operatorname{tang}^2 W + k^2)S^2(0001). \quad (71)$$

Заметим, что из формулы (48) можно получить

$$\operatorname{tang}\{\widehat{(ghik), (0001)}\} = \frac{-\sqrt{-hi\operatorname{tang}^2 U - gi\operatorname{tang}^2 V - gh\operatorname{tang}^2 W}}{k}.$$

Стало быть, имеем

$$S^2(ghik) = k^2\sec^2\{\widehat{(ghik), (0001)}\}S^2(0001). \quad (72)$$

Эта очень простая формула дает одну из двух величин

$$S(ghik), \quad \{\widehat{(ghik), (0001)}\},$$

когда другая известна. Данное отношение имеет место для всех следующих систем, которые представляют только четные случаи двойной системы.

Тридвойная система, прямоугольно-гексаэдральный вид. В этом случае, очевидно, $\mu = 90°$, $\nu = 90°$, $\omega = 90°$,

$$S^2(ghk) = g^2S^2(100) + h^2S^2(010) + k^2S^2(001). \qquad (73)$$

В эту формулу можно ввести угловые постоянные U, V (стр. 173). В самом деле, (см. формулу (52))

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(010)}{S(001)}, \quad \operatorname{tang} V = -\frac{S(100)}{S(001)}.$$

Следовательно,

$$S^2(ghk) = (g^2 \operatorname{tang}^2 V + h^2 \operatorname{tang}^2 U + k^2)\, S^2(001). \qquad (74)$$

Четверная система, гексаэдральный вид. Формула (73) дает

$$S^2(ghk) = (g^2 + h^2)\, S^2(100) + k^2S^2(001). \qquad (75)$$

Чтобы ввести угловую постоянную U, примем

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(010)}{S(001)} = -\frac{S(100)}{S(001)}.$$

Стало быть,

$$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2 \cot^2 U)\, S^2(100). \qquad (76)$$

Шестерная система. Зададим в формуле (70) $S(1\bar{1}00) = S(10\bar{1}0) = S(01\bar{1}0)$. В результате будем иметь

$$S^2(ghik) = -(gh + gi + hi)\, S^2(01\bar{1}0) + k^2S^2(0001) = \\ = \left(\frac{g^2 + h^2 + i^2}{2}\right) S^2(01\bar{1}0) + k^2S^2(0001). \qquad (77)$$

Чтобы ввести постоянную U, запишем

$$\operatorname{tang} U = -\frac{S(01\bar{1}0)}{S(0001)},$$

тогда

$$S^2(ghik) = \left(\frac{g^2 + h^2 + i^2}{2} + k^2 \cot^2 U\right) S^2(01\bar{1}0). \qquad (78)$$

Тричетверная система, гексаэдральный вид. Формула (75) дает

$$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2)\, S^2(001). \qquad (79)$$

В этом не изученном случае тройной системы и различных октаэдральных, додекаэдральных или гексаэдрально-ромбическом видах, производимых из предыдущих подходящим центрированием *, значения

* В мемуаре о системах точек (стр. 109) можно найти сведения о центрировании, с помощью которого одни кристаллические виды можно переводить в другие.

S (ghk), S $(ghik)$ сведутся к предыдущим формулам с помощью следующей теоремы.

Теорема XIII. При центрировании всех порождающих параллелепипедов совокупности грань (ghk) будет сохранять площадь своего порождающего параллелограмма, если алгебраическая сумма $g+h+k$ — нечетная, но площадь станет в половину меньше, если сумма — четная.

Целочисленные координаты узлов, введенных центрированием, будут дробными числами вида:

$$x=m+\frac{1}{2},\quad y=n+\frac{1}{2},\quad z=p+\frac{1}{2},$$

где m, n, p — целые числа.

Условие, согласно которому ретикулярная плоскость (ghk), проведенная через начало координат, содержит несколько новых узлов, будет

$$gm+hn+kp+\frac{g+h+k}{2}=0. \qquad (80)$$

Если $g+h+k$ — нечетное число, то плоскость (ghk) не может содержать ни одного из этих узлов. Если обозначить через S_c (ghk) значение, которое получает S (ghk) после центрирования, то получим

$$S_c(g,\ h,\ k=2j+1-g-h)=S\,(ghk). \qquad (81)$$

Если $g+h+k$ — четное число, то уравнение (80) может быть всегда удовлетворено целыми значениями m, n, p, ибо оно представляет одну из ретикулярных плоскостей системы (ghk), проходящую или не проходящую через начало координат. Через несколько новых узлов, удовлетворяющих уравнению (80), проведем плоскость, параллельную плоскости xz. Плоскость (ghk) пересечет плоскость $y=n+\frac{1}{2}$ по ряду из новых узлов, расположенных на равных расстояниях между двумя старыми параллельными рядами, расположенными на пересечении той же плоскости (ghk) с плоскостями $y=0$, $y=2n+1$. Стало быть, число рядов, параллельных пересечению (ghk) с плоскостью xz, будет удваиваться центрированием. Плотность сетки увеличится в два раза

$$S_c(g,\ h,\ k=2j-g-h)=\frac{1}{2}\,S\,(ghk). \qquad (82)$$

В формулах (81) и (82) g, h, k — три взаимно простых целых числа, а j — некоторое целое число.

Теорема XIV. При центрировании плоскостей $z=0$, $z=1$ и т. д. оснований порождающих параллелепипедов совокупности грань (ghk) сохранит площадь своего порождающего параллелограмма, если алгебраическая сумма $g+h$ — нечетная, но эта площадь станет вдвое меньше, если $g+h$ — четное число.

Целочисленные координаты узлов, вводимых центрированием, будут

$$x = m + \frac{1}{2}, \quad y = n + \frac{1}{2}, \quad z = p,$$

где m, n, p — целые числа.

Тогда, если рассуждать, как в предыдущем случае, возвращаясь к рассмотрению дополнительной плоскости $y = n + \frac{1}{2}$ и обозначая через $S_{xy}(ghk)$ величину, в которую перейдет $S(ghk)$ после центрирования, найдем

$$S_{xy}(g,\ h = 2j + 1 - g,\ k) = S(ghk), \tag{83}$$

$$S_{xy}(g,\ h = 2j - g,\ k) = \frac{1}{2} S(ghk). \tag{84}$$

Примечание. В последнем случае параметр ряда, являющегося следом (ghk) на плоскости xy, станет вдвое меньше в результате центрирования.

Следствие. Если центрировать порождающие параллелограммы граней, параллельных плоскости xz, то получим

$$S_{xz}(g,\ h,\ k = 2j + 1 - g) = S(ghk). \tag{85}$$

$$S_{xz}(g,\ h,\ k = 2j - g) = \frac{1}{2} S(ghk). \tag{86}$$

Если центрирование проведено на гранях, параллельных плоскости yz,

$$S_{yz}(g,\ h,\ k = 2j + 1 - h) = S(ghk), \tag{87}$$

$$S_{yz}(g,\ h,\ k = 2j - h) = \frac{1}{2} S(ghk). \tag{88}$$

Теорема XV. При центрировании шести граней порождающих параллелепипедов совокупности площадь порождающего параллелограмма грани (ghk) станет вдвое меньше, если произведение ghk — четное, и в четыре раза меньше, если произведение ghk — нечетное число.

Условие, при котором плоскость (ghk), проведенная через начало координат, содержит узлы, появившиеся вследствие центрирования граней, параллельных плоскости xy, имеет вид:

$$g + h = 2j. \tag{89}$$

Условие, при котором та же плоскость заключает в себе узлы, появившиеся в результате центрирования граней, параллельных xz, таково:

$$g + k = 2j'. \tag{90}$$

Аналогичное условие для плоскости, параллельной yz,

$$h + k = 2j''. \tag{91}$$

Однако в то же время

$$\left.\begin{aligned} g+h&=2j+1,\\ g+k&=2j'+1,\\ h+k&=2j''+1.\end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Следовательно, по меньшей мере, одно из уравнений (89), (90), (91) будет всегда удовлетворяться, и в дальнейшем можно предположить, что это — уравнение (89). Тогда можно представить себе два случая.

Первый случай: $g+k=2j'+1$. Одна из двух характеристик g, k будет четной. Сложив уравнение (89) со вторым из уравнений (92), получим

$$2g+h+k=2j+2j'+1.$$

Тогда уравнения (90) и (91) удовлетворяются одновременно, и мы приходим к случаю теоремы XIV и уравнения (84). Величина $S\,(ghk)$ после центрирования вполовину уменьшается.

Второй случай: $g+k=2j'$. Уравнения (89), (90), (91) удовлетворяются одновременно. Стало быть, если одна из характеристик — четная, то две другие — тоже четные, и наоборот. Но три характеристики не могут быть четными одновременно. Следовательно, они все нечетные. Получаем $ghk=2j+1$. В этом случае, в силу примечания к теореме XIV, параметр следа (ghk) на плоскости xy в результате центрирования становится в два раза меньше. Более того, очевидно, что (ghk) содержит новые узлы, координаты которых имеют вид:

$$x=m,\quad y=n+\frac{1}{2},\quad z=p+\frac{1}{2},$$

где m, n, p — выбраны надлежащим образом. След на плоскости $z=p+\frac{1}{2}$ будет рядом, содержащимся между двумя рядами, определяемыми пересечением той же плоскости (ghk) с плоскостями $z=0$ и $z=2p+1$. Таких рядов будет вдвое больше, чем до центрирования. Плотность сетки станет в четыре раза больше, а площадь порождающего параллелограмма — в четыре раза меньше. Если представить через $S_f\,(ghk)$ новое значение $S\,(ghk)$ после центрирования, то в первом случае будем иметь

$$S_f\left(g,\ h,\ k=\frac{2j}{gh}\right)=\frac{1}{2}\,S\,(ghk). \qquad (93)$$

Во втором случае

$$S_f\left(g,\ h,\ k=\frac{2j+1}{gh}\right)=\frac{1}{4}\,S\,(ghk). \qquad (94)$$

Теорема XVI. Пусть шестерная совокупность отнесена к основной оси, взятой за ось z, и двум двойным осям первого рода, взятым за оси x и y. Добавим на плоскостях с уравнением $z=p\pm\frac{1}{3}$ узлы, необходимые для

превращения совокупности в тройную. Узел с координатами $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ является общим. Тогда порождающий параллелограмм не изменится для грани (ghk), если $g-h+k=3j\pm 1$. Он уменьшится втрое, если $g-h+k=3j$. Однако если новая совокупность содержит узел $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, то $S(ghk)$ уменьшится втрое при условии, что $-g+h+k=3j$.

Пусть XYZ (рис. 2) — треугольник, образованный на плоскости $z=\frac{1}{3}$ тремя узлами, наиболее близкими к началу координат. На рисунке этот треугольник виден в ортогональной проекции на плоскость $z=0$. Ox, Oy — две из трех двойных осей первого рода в совокупности. Координаты вершины X, очевидно, будут таковы:

$$x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3},\quad z=\frac{1}{3}.$$

Координаты добавочных узлов, введенных на плоскости, следующие:

$$x=m+\frac{1}{3},\quad y=n-\frac{1}{3},\quad z=\frac{1}{3}.$$

На плоскости $z=\frac{2}{3}$ получим

$$x=m'+\frac{2}{3},\quad y=n'-\frac{2}{3},\quad z=\frac{2}{3}.$$

Условия, при которых плоскость (ghk), проведенная через начало координат, содержит часть этих новых узлов, следующие:

$$\left.\begin{aligned} gm+hn+\frac{(g-h+k)}{3}&=0,\\ gm'+hn'+\frac{2(g-h+k)}{3}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Если $g-h+k=3j\pm 1$, то плоскость (ghk), проведенная через начало координат, не может содержать таких узлов. Если величину площади $S(ghk)$ после утроения числа узлов совокупности обозначить через $S_r(ghk)$, то будем иметь

$$S_r(g,\ h,\ k=3j\pm 1-g+h)=S(ghk). \tag{96}$$

Но если $g-h+k$ делится на три, то следы плоскости (ghk) на плоскостях $z=\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ будут рядами новых узлов в новой совокупности. Плотность сетки утроится и

$$S_r(g,\ h,\ k=3j-g+h)=\frac{1}{3}S(ghk). \tag{97}$$

Если принять обратную ромбоэдрическую форму (мемуар о системах точек, стр. 93), соответствующую треугольнику $X'Y'Z'$ (рис. 2), то новая совокупность будет содержать новый узел Y' с координатами $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Координаты новых узлов будут содержаться в двух системах формул

$$x = m + \frac{1}{3}, \quad y = n + \frac{1}{3}, \quad z = p + \frac{1}{3},$$

$$x = m' + \frac{2}{3}, \quad y = n' + \frac{2}{3}, \quad z = p' + \frac{2}{3}.$$

Уравнения (96) и (97) сменятся на следующие:

$$S_{r'}(g,\ h,\ k = 3j \pm 1 + g - h) = S(ghk), \qquad (98)$$

$$S_r(g,\ h,\ k = 3j + g - h) = \frac{1}{3} S(ghk). \qquad (99)$$

Теорема XVII. Когда в шестерной совокупности, отнесенной к основной оси, как оси z, и двум из своих двойных осей первого рода, как осям x и y, центрировать все равносторонние треугольники ретикулярной плоскости, параллельной xy, то грань (ghk) сохраняет площадь своего порождающего параллелограмма, если $g - h$ не делится на три. В противоположном случае площадь уменьшается втрое.

Пусть X, Y', Z, X' (рис. 2) — новые узлы, введенные этим видом центрирования и расположенные на плоскости $z = 0$. Эти узлы делятся на две группы, в одной из которых координаты выражаются следующим образом:

$$x = m - \frac{1}{3}, \quad y = n + \frac{1}{3}, \quad z = 0.$$

В другой — координаты таковы:

$$x = m + \frac{1}{3}, \quad y = n - \frac{1}{3}, \quad z = 0.$$

Условие, при котором плоскость (ghk), проведенная через начало координат, содержит часть этих узлов, имеет вид:

$$gm + hn \pm \frac{g - h}{3} = 0. \qquad (100)$$

Если, стало быть, $g - h = 3j \pm 1$, то плоскость (ghk) не может содержать ни одного из этих узлов. Обозначив через $S_b(ghk)$ площадь, в которую перейдет $S(ghk)$ после центрирования, получим

$$S_b(g,\ h = 3j \pm 1 - g,\ k) = S(ghk). \qquad (101)$$

Но если $g - h$ делится на три, то след (ghk) на плоскости $z = 0$ будет содержать узлы, принадлежащие двум новым группам. Легко видеть, что параметр этого ряда уменьшается втрое, площадь $S(ghk)$ уменьшается в той же пропорции. Следовательно, будем иметь

$$S_b(g,\ h = 3j - g,\ k) = \frac{1}{3} S(ghk). \qquad (102)$$

§ X. Определение кристаллического вида и примитивной формы минерального рода

Если известна кристаллическая система данного минерального рода, то можно определить частный вид, к которому он принадлежит, и линейные параметры, которые определяют форму порождающего тела его совокупности.

За этим телом можно сохранить прежде принятое название «примитивная форма». Ее грани всегда будут параллельны граням одной или нескольким кристаллическим формам вещества. Предполагается, что молекула расположена в каждой вершине многогранника, образующего примитивную форму. Кроме того, некоторые молекулы могут быть в центре фигуры или в центрах всех ее граней.

Две примитивные формы, или, что то же самое, два порождающих тела, эквивалентны, если они порождают одну и ту же совокупность. Тогда имеется одно решение задачи определения примитивной формы, но представляемое двумя различными способами.

Для кристаллов, принадлежащих к правильной или тричетверной системе, этот вопрос является решенным, когда установлена принадлежность совокупности к гексаэдральному, октаэдральному или додекаэдральному видам.

В шестерной, четверной и тройной системах существует лишь два различных параметра, один из которых может быть принят за 1. Другой параметр является единственным неизвестным.

В тридвойной системе минералоги должны сначала остановить свой выбор на одном из четырех видов, принадлежащих этой системе. Здесь надо определить два из трех линейных параметров a, b, d, третий — предполагается равным 1.

Двойная система характеризуется четырьмя параметрами a, b, c, d. Если предположить, что $d=1$, то останется вычислить a, b, c, т. е. три стороны основного треугольника сетки, нормальной двойной оси системы. Здесь надо сделать выбор между двумя кристаллическими видами, которые имеются в этой системе. Если принять октаэдральный вид, то, следуя замечанию на стр. 110 мемуара о системах точек, надо определить, на какую из трех сторон основного треугольника сетки, нормальной оси, спроектируется узел — центр порождающей призмы.

Наконец, в асимметричной системе число существенно различных параметров равно 5. Это, например, пять ребер основного тетраэдра, шестое принимается за 1.

Для получения значений параметров мы имеем в своем распоряжении углы между гранями, ограничивающими кристалл, а также индексы символов, полученных из расположения плоскостей спайности. Отсюда следует, что для определения системы трех линейных параметров a, b, d, удовлетворяющих условиям, извлеченным из этих индексов, мы можем, несомненно с учетом внешней структуры, заменить a, b, d тремя другими

параметрами *ma*, *nb*, *pd* с тем же относительным направлением, но иными отношениями величин. Здесь *m*, *n*, *p* — произвольные целые числа, за исключением случая, когда симметрия требует равенства двух или трех этих параметров.

Чтобы устранить, насколько возможно, неопределенность относительно целочисленных сомножителей *m*, *n*, *p*, Гаюи и его последователями было установлено следующее правило: отношения между параметрами величин, которые дают символы наиболее часто повторяющихся граней кристалла, должны быть по возможности наиболее простыми.

Так, например, Гаюи, говоря о своих исследованиях эвклаза, писал: «Я искал такое отношение между тремя параметрами призмы, при котором законы убывания наименее уклонялись бы от простоты обычных законов».*

Однако применение такого правила оставляет широкое место для произвола, ибо кристаллографы не находятся в согласии между собой относительно символов граней. Обозначения одной и той же грани, простые у одного автора, чрезвычайно громоздки в системе другого автора. Минералоги имеют обыкновение доводить решение вопроса до того момента, когда одна, две или три системы значений *m*, *n*, *p* достаточно просто характеризуют внешнее строение. Однако двум или трем решениям, которые могут быть получены таким образом, соответствует в природе только одно. Для того чтобы по возможности исключить эту неопределенность, я прибегну к одной гипотезе. Правда, она не отличается строгостью результатов, как те ,которыми мы ранее пользовались, но она имеет то преимущество, что имеет теоретическую основу, оставляя незначительную часть для произвола вычислителя. Кроме того, она позволяет использовать более разнообразные методы контроля.

Допустим, что в кристаллической совокупности наиболее легко отделяются друг от друга по спайности те смежные плоские сетки, которые ограничивают слои с наибольшей толщиной.

Ниже следует теоретическое рассуждение, обосновывающее эту точку зрения. Две соседние плоские сетки отделяются друг от друга по спайности. Рассмотрим, с одной стороны, силу, с которой молекулы, лежащие в одной плоскости, удерживаются друг другом. Это — тангенциальное сцепление в плоскости, или сопротивление разрыву по линиям, проведенным в этой плоскости. С другой стороны, сила, связывающая молекулы смежных плоскостей, может быть названа сцеплением, нормальным плоскости, или сопротивлением разрыву по направлению, параллельному этой плоскости.

Однако в общем известно, что сила сцепления тел тем больше, чем меньше средние интервалы, разделяющие молекулы.

Исходя из этого можно предположить, что тангенциальное сцепление будет тем больше, чем больше плотность сетки плоскости, и нормальное

---

* Hauy. Cristallographie. 2-e édition, t. II, p. 155.

сцепление будет тем слабее, чем значительнее расстояние между двумя смежными плоскостями.

При последовательном изучении различных систем ретикулярных плоскостей кристалла следует иметь в виду, что плотность сетки и расстояние между двумя смежными плоскостями для каждой из этих систем являются величинами, которые возрастают и убывают вместе, оставаясь всегда пропорциональными друг другу. В самом деле, в силу уравнения (51) мемуара о системах точек,

$$\Delta S\,(ghk) = \Omega = \text{const}.$$

Следовательно, (уравнение (68) настоящей работы),

$$\Delta = \Omega\rho.$$

Стало быть, при рассмотрении граней с возрастающей ретикулярной плоскостью тангенциальное сцепление будет возрастать, а нормальное — убывать. Следовательно, спайность по плоскостям, параллельным этим граням, будет все более ярко выраженной, ибо тангенциальное сцепление способствует ее проявлению, а нормальное сцепление — препятствует. Итак, наиболее совершенная спайность параллельна ретикулярной плоскости с наибольшей плотностью. Если кристалл раскалывается параллельно двум или трем кристаллическим формам, то степень совершенства спайности соответствует порядку убывающих плотностей соответствующих ретикулярных сеток.

Почти так же можно доказать, что грани, наиболее часто образующиеся на кристалле в процессе кристаллизации, или, другими словами, плоские сетки, наиболее пригодные для огранения кристалла, являются, в общем, теми, ретикулярная плотность которых наиболее значительна. В самом деле, внутренние движения, действующие непрерывно на поверхности кристаллической массы в процессе образования этой массы до некоторого момента, играют роль внешних сил, которые стремятся расщепить кристалл. Они должны, следовательно, предпочтительно избирать молекулярные цепочки в ретикулярных плоскостях с наиболее плотными сетками.

В этом отношении вероятность естественного огранения, которой обладает каждая возможная грань кристалла, должна быть хотя бы отчасти пропорциональна плотности ее сетки. Однако этот критерий кажется менее достоверным, чем тот, который выводится из рассмотрения спайности. Образование естественных граней в процессе кристаллизации подчиняется множеству посторонних сил, которые трудно проанализировать. Они могут благоприятствовать тем или иным кристаллическим формам, или, что то же, не могут воздействовать одинаково на различные грани кристалла. Наоборот, проявление спайности на окончательно сформировавшемся кристалле совершенно не зависит от действия сил, влиявших на его внешнее строение. Тем самым спайность дает представление о независимых параметрах начального состояния кристаллической формы.

Изложим вкратце четкое правило, заменяющее эмпирический закон «менее сложных обозначений». В дальнейшем это правило будет служить нам для определения кристаллического вида минерала, также и отношения его параметров. В каждом частном случае мы должны выбирать среди бесконечного числа решений, допускаемых при определении примитивной формы, те, которые позволяют приписать возможным граням кристалла ретикулярные плотности, образующие убывающий ряд. Этот ряд должен по возможности точно представлять убывающую способность появления на кристалле естественной (в процессе кристаллизации) или искусственной (по спайности) последовательности соответствующих граней.

Здесь подразумевается, что способность естественного образования граней устанавливается путем внимательного изучения весьма большого числа образцов одного и того же минерального вида, образовавшихся в самых разнообразных условиях.

В случае, когда индексы, выведенные из спайности, не согласуются полностью с индексами, полученными при изучении внешних доминирующих форм, наше правило будет до некоторой степени произвольным. Дальнейшее применение метода позволит судить о степени достоверности, которой заслуживают эти различные индексы.

Согласованность спайности с отношениями длин линейных параметров была замечена еще Франкенгеймом. Он обратил внимание на то, что в четверных кристаллах апофиллита и уранита, где $a < d$, спайность параллельна базису. Ретикулярная плотность грани равна $\frac{1}{S\,(ghk)}$. Вместо расположения граней по убыванию значения этого выражения мы можем расположить их в порядке возрастания элементарной площади $S\,(ghk)$, или, скорее, квадрата площади, во избежание появления квадратного корня.

Если в $S\,(ghk)$ или в $S^2\,(ghk)$ имеются множители, не зависящие от g, h, k, то мы можем их сократить без изменения порядка, следуя которому, располагаются кристаллические формы.

Обозначим $\Sigma^2\,(ghk)$, т. е. то, во что перейдут значения $S\,(ghk)$, $S^2\,(ghk)$, освобожденные от подобных множителей, через $\Sigma\,(ghk)$. После замены в уравнениях (69)—(102) S, S^2 на $\Sigma\Sigma^2$ мы сможем уничтожать или ввести в их вторые члены некоторый множитель при условии, чтобы он не был функцией характеристик. Применим формулы § IX к каждому из 14 кристаллических видов.

Тричетверная система, гексаэдральный вид. Три четверные оси взяты за оси координат с параметрами a, a, a. Имеем (формула (79))

$$S^2(ghk) = (g^2 + h^2 + k^2)\,S^2(001).$$

Если заменить S^2 на Σ^2, то

$$\Sigma^2(ghk) = g^2 + h^2 + k^2. \tag{103}$$

Второй столбец табл. 1 подсчитан по этой формуле.

Тричетверная система, октаэдральный вид. Этот вид происходит из предыдущего путем центрирования шести граней куба. Возведем в квадрат уравнения (93) и (94). Заменив S^2 на Σ^2, величину $\Sigma^2\,(ghk)$ — ее значением, извлеченным из уравнения (103), и умножив вторые члены на 16, в результате получим

$$\Sigma^2\left(g,\ h,\ k=\frac{2j+1}{gh}\right)=g^2+h^2+k^2,$$

$$\Sigma_f^2\left(g,\ h,\ k=\frac{2j}{gh}\right)=4\,(g^2+h^2+k^2).$$

Эти формулы можно объединить в одну и записать в виде:

$$\Sigma_f^2\,(g,\ h=2j-g,\ k=2j'-g)=g^2+h^2+k^2. \tag{104}$$

В случае, когда отношения $h=2j-g$, $k=2j'-g$ не имеют места, они могут быть получены умножением трех характеристик g, h, k на 2. С этой оговоркой уравнение (104) заменяет два предыдущих. Оно служит для вычисления четвертой колонки табл. 1.

Тричетверная система, додекаэдральный вид. Этот вид получается из гексаэдрального вида объемным центрированием каждого куба.

Возведем в квадрат уравнения (81) и (82), заменим S^2 на Σ^2, величину $\Sigma^2\,(ghk)$ — значением, извлеченным из (103), и умножим вторые члены на 4. В результате получим

$$\Sigma_c^2\,(g,\ h,\ k=2j-g-h)=g^2+h^2+k^2, \tag{105}$$
$$\Sigma_c^2\,(g,\ h,\ k=2j+1-g-h)=4\,(g^2+h^2+k^2).$$

Первая из этих двух формул справедлива, если подразумевать, что в случае, когда отношение $k=2j-g-h$ не будет выполняться, его устанавливают умножением g, h, k на 2. Шестая колонка табл. 1 вычислена с помощью этого уравнения.

Замечания к тричетверной системе. В гексаэдральном виде преобладающей формой является куб, а затем ромбододекаэдр 110. Каменная соль, сернистый свинец кажутся мне принадлежащими к этому виду.

В октаэдральном виде доминирует октаэдр {111}, а затем куб (100). Алмаз, шпинель, квасцы, большинство самородных металлов принадлежат к этому виду. Груда ядер являет пример такого расположения. В додекаэдральном виде основная форма — ромбододекаэдр (110), октаэдрическая форма занимает только пятое место. Гранаты, теннантит должны отвечать этому виду. Иногда кристаллы имеют спайность по октаэдру, тогда как доминирующей формой является куб, например висмут, плавиковый шпат. Мне кажется, что эти вещества должны относиться к октаэдрическим веществам.

Шестерная система. Шестерную ось принимаем за ось z с параметром d, двойные оси первого рода OG, OH (рис. 2) — за оси x и y; OI — дополнительная ось, отвечающая дополнительной характеристике. Их па-

раметры a, a, a. Обозначение имеет четыре характеристики, поэтому получим (формула 78)

$$S^2(ghik) = (g^2 + h^2 + i^2 + k^2 \cdot 2\cot^2 U)\frac{1}{2}\Sigma^2(01\bar{1}0).$$

В этом уравнении заменим S^2 на Σ^2, уничтожим множитель $\frac{1}{2}\Sigma^2(01\bar{1}0)$ и зададим для краткости

$$2\cot^2 U = \lambda, \tag{106}$$

тогда будем иметь

$$\Sigma^2(ghik) = g^2 + h^2 + i^2 + k^2\lambda. \tag{107}$$

Табл. 11 вычислена по этой формуле.

Для биромбоэдра первого рода имеем

$$\Sigma^2(go\bar{g}k) = 2g^2 + k^2\lambda,$$

а для биромбоэдра второго рода —

$$\Sigma^2(gg\overline{2g}k) = 6g^2 + k^2\lambda.$$

Стало быть, свойство воспроизводится в процессе кристаллизации, и характер спайности для параллельных форм первого рода тот же, что и для второго рода. Двойные оси первого рода выбираются с таким расчетом, чтобы они были параллельны доминирующим формам; это замечание снимает неопределенность для направления, которое должно придаваться осям первого и второго родов внутри кристалла.

Среди форм, косо расположенных относительно шестерной оси, доминирующей формой будет биромбоэдр первого рода $\{10\bar{1}1\}$. Угол U определяется или прямым измерением, или с помощью угла, образованного двумя гранями $\{10\bar{1}1\}$.

Можно так же найти угол U и, следовательно, отношение $\frac{a}{d}$ из угла, образованного некоторой косой гранью с плоскостью, нормальной шестерной оси. По формуле (56), примененной к этому случаю, получим

$$\operatorname{tang}[(ghik)\widehat{,}(0001)] = \frac{-\sqrt{(g^2 + h^2 + i^2)\,2\cot^2 U}}{k \cdot 2\cot^2 U},$$

$$2\cot^2 U = \frac{g^2 + h^2 + i^2}{k^2}\cot^2\{(ghik)\widehat{,}(0001)\}. \tag{108}$$

Отношение $\frac{a}{d}$ будем считать окончательно установленным, если порядок теоретического преобладания различных форм находится в соответствии с тем, который устанавливается прямыми наблюдениями большого количества образцов одного минерала.

Приведу следующие примеры.

1. Апатит, по наблюдениям Деклуазо, имеет значения: $a=1$, $d=0.735$, откуда $\lambda=2.78$.

Доминирующей формой является гексаэдрическая призма первого рода $\{10\bar{1}0\}$ ($\Sigma^2=2.00$). Параллельно ее граням проходит главная спайность. Сколы возле $\{0001\}$ ($\Sigma^2=2.78$) указывают на незначительные признаки спайности по:

биромбоэдру первого рода $\{10\bar{1}1\}$ ($\Sigma^2=4.78$),

гексаэдрической призме второго рода $\{11\bar{2}0\}$ ($\Sigma^2=6.00$),

биромбоэдру второго рода $\{11\bar{2}1\}$ ($\Sigma^2=8.78$),

биромбоэдру первого рода $\{20\bar{2}1\}$ ($\Sigma^2=10.78$),

биромбоэдру второго рода $\{10\bar{1}2\}$ ($\Sigma^2=13.12$),

додекаэдрической призме $\{21\bar{3}0\}$ ($\Sigma^2=14.00$) (обычно гемиэдрическая спайность),

дидодекаэдру $\{21\bar{3}1\}$ ($\Sigma^2=16.78$),

редко биромбоэдру второго рода $\{11\bar{2}2\}$ ($\Sigma^2=17.12$).

Отмечалась также новая форма, которую можно отнести к биромбоэдру первого рода $\{30\bar{3}1\}$.

2. Изумруд. Для него $a=1$, $d=1$, откуда $\lambda=1.50$. Эти значения объясняют спайность параллельно его основаниям. Однако последовательность доминирующих форм наиболее полно представляется системой уравнений: $a=1$, $d=0.50$, $\lambda=6.00$. Доминирующие формы, расположенные по значениям Σ^2, следующие: $\{10\bar{1}0\}$, $\{0001\}$, $\{11\bar{2}0\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}1\}$, $\{20\bar{2}1\}$, $\{21\bar{3}0\}$. Эта последовательность достаточно точно согласовывается с наблюдениями над большим числом образцов этого минерала. Здесь индексы, полученные на основании спайности, не согласовываются полностью с индексами, выведенными из внешней структуры. Можно, однако, надеяться, что отмеченная неоднозначность исчезнет при дальнейшем развитии кристаллографических знаний.

3. Фосфорнокислый свинец, арсенид свинца, нефелин, гексагональный хлорит.

4. Сернистая медь, сернистый кадмий. Эти два вещества замечательны тем, что в них преобладают формы первого рода. Отсюда следует расположение граней по трем зонам, имеющим осями двойные оси первого рода кристаллической системы. Отмеченное преобладание может быть объяснено малым значением λ. В самом деле, для сернистого кадмия $a=1$, $d=1.63$, $\lambda=0.565$.

$$\Sigma^2\{10\bar{1}1\}=2.565,\quad \Sigma^2\{10\bar{1}2\}=4.260,\quad \Sigma^2\{10\bar{1}3\}=7.085,$$

для первого биромбоэдра второго рода, Σ^2 $\{11\bar{2}1\}=6.566$.

Для сернистой меди $a=1$, $d=1.708$, $\lambda=0.514$.

$$\Sigma^2\{10\bar{1}1\}=2.514,\quad \Sigma^2\{10\bar{1}2\}=4.056,\quad \Sigma^2\{10\bar{1}3\}=6.626,$$

а для первого биромбоэдра второго рода Σ^2 $\{11\bar{2}1\}=6.514$.

5. Кварц относится к минералам, кристаллизация которых представляет наиболее интересные особенности. Его обычно относят к ромбоэдрической системе. Несмотря на это преобладающее мнение по данному вопросу, мне кажется вероятным, что симметрия соответствующей молекулярной совокупности шестерная. Я возвращусь к этому вопросу при рассмотрении гемиэдрии кварца и вытекающей отсюда гемитропии.

6. Вероятно, существует много других веществ, которые относят к ромбоэдрической системе и которые кажутся ромбоэдрическими только вследствие гемиэдрии.

Четверная система, гексаэдральный вид. Четверная ось принята за ось z с параметром d. Двойные оси первого рода принимаются за оси x и y с параметрами a, a. В формуле (76) заменим S^2 на Σ^2, разделим второй член на Σ^2 (100) и зададим для краткости

$$\cot^2 U = \lambda, \tag{109}$$

тогда получим

$$\Sigma^2 (ghk) = g^2 + h^2 + k^2\lambda. \tag{110}$$

Верхняя половина табл. III вычислена по этой формуле. Биромбоэдры шестерной системы заменяются здесь октаэдрами, которые могут быть первого рода, если их грани параллельны двойным осям первого рода, или второго рода, если они параллельны осям второго рода.

Общий символ октаэдра первого рода $\{gok\}$. Призма $\{100\}$ является его частным случаем.

Общий символ октаэдра второго рода $\{ggk\}$. Призма $\{110\}$ — его частный случай.

Для октаэдра первого рода

$$\Sigma^2 (gok) = g^2 + k^2\lambda,$$

а для октаэдра второго рода

$$\Sigma^2 (ggk) = 2g^2 + k^2\lambda.$$

Таким образом, формы первого рода являются доминирующими. Это обстоятельство позволяет установить положение двойных осей первого рода.

Среди форм, косо расположенных по отношению к четверной оси, доминирующей будет октаэдр $\{101\}$.

Угол, образованный двумя гранями $\{101\}$, наклон U грани (101) к грани (001) определяются непосредственными или косвенными измерениями. Зная U, легко найти отношение $\frac{d}{a}$. Идокраз, мезотип, молибденовокислый свинец мне кажутся принадлежащими к гексаэдральному виду.

Четверная система, октаэдральный вид. Этот вид происходит из предыдущего объемным центрированием прямых призм.

Возведем в квадрат уравнения (81) и (82), заменим S^2 на $\sum^2$, величину $\sum^2$ (ghk) — значением, извлеченным из (110), и умножим вторые члены на 4. В результате получим

$$\begin{aligned} \Sigma_c^2(g,\ h,\ k=2j-g-h)&=g^2+h^2+k^2\lambda,\\ \Sigma_c^2(g,\ h,\ k=2j+1-g-h)&=4\,(g^2+h^2+k^2\lambda). \end{aligned} \tag{111}$$

Первая из этих формул может заменить вторую, если подразумевать, что при невыполнении равенства $k=2j-g-h$ характеристики g, h, k удваиваются.

Нижняя половина табл. III вычислена по формуле (111). В призматических формах, параллельных главной оси, должна преобладать призма второго рода {110}. Среди форм, наклоненных к четверной оси, основной формой будет октаэдр первого рода {101}. Ясно, что в октаэдральном виде преобладающей формой будет комбинация призмы {110} с октаэдрической верхушкой {101}, которые чередуются.

Напротив, в гексаэдральном виде будет преобладать прямая призма {100} с основаниями {001}. Это обстоятельство позволяет различать эти два вида.

В октаэдральном виде двойные оси первого рода должны быть расположены параллельно граням октаэдра {101}.

Кристалл, отнесенный к двойным осям первого рода, можно отнести к его двойным осям второго рода, и наоборот. Если выгодно перейти от осей второго рода к осям первого рода, то надо изменить обозначения граней, заменив (ghk) на $(g+h,\ g-h,\ k)$. В октаэдральном виде, отнесенном к двойным осям первого рода, формы, обладающие четной алгебраической суммой характеристик, встречаются чаще, чем формы с нечетной суммой характеристик. В гексаэдральном виде все наоборот.

Апофиллит, рутил, циркон, как мне кажется, относятся к кристаллам четверной системы октаэдрального вида.

Тройная система. Тройную ось принимаем за ось z с параметром d, двойные оси OG, OH, OI (рис. 2) — за оси x и y и дополнительную ось; их параметры равны a, a, a. Обозначение имеет четыре характеристики.

В тройной системе нет никаких сомнений в расположении трех координатных осей плоскости xy, поскольку не существует двойных осей второго рода; их заменяют пересечения трех плоскостей симметрии с плоскостью xy.

Внешняя симметрия кристалла однозначно показывает расположение двойных осей и плоскостей симметрии.

Тройная совокупность может быть рассмотрена как порождение шестерной совокупности, втрое менее богатой узлами (мемуар о системах точек, стр. 93). Из этой шестерной совокупности выделим совокупность прямой ромбоэдрической формы, для которой порождающий ромбоэдр имеет символ $\{01\bar{1}1\}$. Вводим в уравнения (96) и (97) характеристику i, возведем их в квадрат, заменим S^2 на Σ^2, величину Σ^2 $(ghik)$ — значением,

извлеченным из (107), и, наконец, умножим второй член на 9, тогда получим

$$\begin{aligned} &\Sigma^2_{r'}(g,\ h,\ i,\ k=3j-g+h)=g^2+h^2+i^2+k^2\lambda, \\ &\Sigma^2_{r}(g,\ h,\ i,\ k)=3j\pm 1-g+h)=9\,(g^2+h^2+i^2+k^2\lambda). \end{aligned} \tag{112}$$

Первое из этих уравнений содержит второе как частный случай. При этом следует учесть, что если соотношение $k=3j-g+h$ не имеет места, его получают умножением на 3 четырех характеристик g, h, i, k.

Верхняя половина табл. IV вычислена по уравнению (112) при условии, что грань $(01\bar{1}1)$ принадлежит порождающему ромбоэдру совокупности.

Но если тройная совокупность имеет форму обратного ромбоэдра, т. е. если форма $\{10\bar{1}1\}$ представляет порождающий ромбоэдр, то из уравнений (98) и (99) легко выводим

$$\Sigma^2_{r'}(g,\ h,\ i,\ k=3j+g-h)=g^2+h^2+i^2+k^2\lambda. \tag{113}$$

Нижняя половина табл. IV вычислена по этой формуле.

Для понимания табл. IV следует обратиться к замечанию, сделанному на стр. 154, в силу которого всегда можно предположить, что в символе $\{ghik\}$ кристаллической формы две первые характеристики g и h — положительны, так же как и последняя. Тогда из характеристик g, h, i, k можно получить только две различные формы $\{ghik\}$, $\{hgik\}$. Эти две формы сливаются в одну, если $h=g$ или $k=0$.

Среди форм, косо расположенных относительно шестерной оси, преобладающей будет порождающий ромбоэдр совокупности. Почти всегда эта форма характеризует тройную систему. Когда в исследуемом кристалле найдена эта форма, то надо взять в качестве оси x одну из трех двойных осей и расположить кристалл так, чтобы его тройная ось была вертикальной. Положительная полуось x направляется слева направо, и одна из трех граней верхушки, параллельная оси x, будет повернута к наблюдателю. Эта грань получит символ $(01\bar{1}1)$ и зафиксирует расположение положительной полуоси y согласно правилам (стр. 156).

Если не принимать только что указанные меры предосторожности, то можно встретиться с ромбоэдрической обратной формой. Однако предположим, что кристалл расположен таким образом, что грань $(01\bar{1}1)$ принадлежит порождающему ромбоэдру и ориентирована согласно ранее изложенным правилам.

Определим непосредственными или косвенными методами наклон U грани $(01\bar{1}1)$ к грани (0001) и получим, как для шестерной системы,

$$\lambda=2\cot^2 U=\frac{3a^2}{2d^2}.$$

Сличим это значение λ с гониометрическим и посредством формулы (108) придем к выражению

$$\operatorname{tang}^2(ghik, \widehat{\ } 0001) = \frac{g^2+h^2+i^2}{k^2\lambda}.$$

Тремя преобладающими формами тройной системы являются $\{0001\}$, $\{01\bar{1}1\}$, $\{11\bar{2}0\}$.

Когда λ колеблется между 0 и 0.25, грани $\{0001\}$ будут иметь наибольшую плотность, т. е. спайность должна проходить нормально тройной оси. Этот случай наблюдается для всех ромбоэдров, у которых величина основного двугранного угла расположена между 0 и 70°32′, т. е. для ромбоэдров, более острых, чем правильный тетраэдр, например для ромбоэдра кратонита. Когда $0.25 < \lambda < 4$, гранями наибольшей плотности являются грани порождающего ромбоэдра, и плоскости спайности должны быть им параллельны. Этот случай представляется для всех ромбоэдров, основной двугранный угол которых колеблется между 70°32′ и 120°. У таких ромбоэдров основные вершины менее острые, чем вершины правильного тетраэдра, и менее тупые, чем трехгранные углы ромбододекаэдра. Сюда относится большинство ромбоэдрических кристаллов. Тем самым в тройной системе основные плоскости спайности почти всегда дают ромбоэдрическое ядро.

Наконец, при $\lambda > 4$, когда порождающий ромбоэдр более тупой, чем 120° (например, у турмалина), преобладающей формой является гексаэдрическая призма второго рода $\{11\bar{2}0\}$ (призма касается боковых ребер ромбоэдра). Поскольку эта форма открытая, то не исключается существование формы $\{01\bar{1}1\}$. То же будет в случае $\lambda < 0.25$, где форма $\{0001\}$ открыта и не исключает $\{01\bar{1}1\}$.

Таким образом, в общем можно сказать, что во всяком тройном кристалле грани порождающего ромбоэдра должны теоретически составлять часть общей системы граней, образующих кристалл.

Тройная система по причине легкости, с которой она позволяет определять свою первоначальную форму, очень удобна для нахождения отношений, существующих между ретикулярной плотностью граней и их стремлением к огранению кристалла.

Если принять, так же как Миллер, три ребра порождающего ромбоэдра за координатные оси, то методом преобразования, описанным на стр. 154, можно легко найти следующую формулу:

$$\Sigma^2(ghk) = (k-h)^2 + (g-k)^2 + (h-g)^2 + (g+h+k)^2\lambda. \qquad (114)$$

Табл. V построена по этой формуле.

Номограммы шестерной, четверной и тройной систем. Во всех трех кристаллических системах ретикулярная плотность граней (ghk) или $(ghik)$ зависит от единственной неопределенной λ, которую можно назвать модулем системы:

$$\Sigma^2(ghk \text{ или } ghik) = F + f\lambda,$$

где F и f — целые функции целочисленных характеристик g, h, i, k. Если, стало быть, на плоскости (рис. 7) провести серию прямых, уравнения которых в линейных координатах v, λ будут

$$v = F + f\lambda,\ v = F' + f'\lambda,\ v = F'' + f''\lambda,\ \ldots,$$

то (F, f), (F', f'), (F'', f'') — системы значений, которые для различных кристаллических форм дает уравнение Σ^2 (ghk или $ghik$)$=F+f\lambda$. Если присвоить каждой из этих прямых обозначение кристаллической формы, то будем иметь номограмму рассматриваемого кристаллического вида. На рис. 7 представлена подобная номограмма для шестерной системы, аналогичным образом ее можно построить для гексаэдрального вида четверной системы, для октаэдрального вида четверной системы и для тройной системы.

Изображение этой номограммы следующее: пусть λ_0, λ_1, λ_2, ... — частные значения модуля λ для различных минералов E_0, E_1, E_2, E_3, ... шестерной системы. Параллельно ординатной оси проведем прямые $\lambda=\lambda_0$, $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_z$.

Для минерала E_0 очередность, по которой следуют пересечения прямой $\lambda=\lambda_0$ с каждой из прямых, представляющих формы $\{ghik\}$, будет давать теоретический порядок частоты относительного появления этих форм и легкость деления по спайности.

Аналогичное будет для других минералов той же системы. На номограмме, в самом деле, проведена вертикальная линия, соответствующая некоторому числу этих минералов.

Тридвойная система, гексаэдральный прямоугольный вид. Три двойные оси, положение которых полностью определено внешней симметрией кристалла, принимаем за оси x, y, z с параметрами a, b и d; ось z — вертикальна.

В формуле (74) для кратности заменяем

$$\begin{gathered}\operatorname{tang}^2 U = \frac{d^2}{b^2} = \lambda,\ \operatorname{tang}^2 V = \frac{d^2}{a^2} = \lambda', \\ S^2(ghk) = (g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2)\,S^2(001).\end{gathered} \tag{115}$$

В этом уравнении, заменив S^2 на Σ^2 и разделив второй член на $\Sigma^2(001)$, получим

$$\Sigma^2(ghk) = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2. \tag{116}$$

Первая часть табл. VI вычислена по этой формуле. Для определения λ и λ' будет изучать преобладающие формы, которые принадлежат зоне с общим символом $\{ohk\}$, а также преобладающие формы зон с общими символами $\{gok\}$ или $\{gko\}$.

В зоне $\{ohk\}$ после форм $\{010\}$ и $\{001\}$ следует форма $\{011\}$, которая может служить для определения отношения $b : d$.

Аналогично этому исследуем зоны $\{gok\}$ и $\{gho\}$. Три отношения $b:d$, $a:d$, $a:b$ должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{b}{d}\frac{a}{b}=\frac{a}{d}.$$

Среди закрытых форм наиболее часто должна встречаться форма $\{111\}$; далее ее можно использовать для определения отношения параметров. Формы $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$ являются формами, по которым наиболее легко проявляется спайность.

Бурнонит и перидот, по-видимому, принадлежат к рассматриваемому виду — одному из наиболее бедных в данной кристаллической системе.

Тридвойная система, гексаэдральный ромбический вид. Этот вид получается из предыдущего при центрировании прямоугольных оснований прямых призм, составляющих гексаэдральную совокупность.

Возведем в квадрат (83) и (84), заменим S^2 на Σ^2, величину Σ^2 (ghk) — значением, извлеченным из (116), и умножим вторые члены на 4. В результате получим

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma^2_{xy}\{g,\ h=2j-g,\ k\}=g^2\lambda'+h^2\lambda+k^2,\\ &\Sigma^2_{xy}\{g,\ h=2j+1-g,\ k\}=4\,(g^2\lambda'+h^2\lambda+k^2). \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Первая из этих формул содержит вторую при условии, что если соотношение $h=2j-g$ не удовлетворяется, то достаточно умножить g, h, k на 2.

Формулы (117) служат для вычисления второй части табл. VI. В общем преобладающими формами будут $\{001\}$ и $\{110\}$. Их комбинация породит кристалл в форме прямой призмы с основаниями в виде ромба, подобного основанию порождающей призмы.

Если формы $\{001\}$, $\{110\}$ комбинируются с $\{100\}$, $\{010\}$, элементарная форма которых меньше, т. е. параллельна малой диагонали ромба основания, то их комбинация дает призму с шестью боковыми гранями, имеющую в основании на плоскости xy гексагон $ABB'A'C'C$ (рис. 6). Если угол CAB незначительно отличается от 120°, то эта призма будет по внешнему виду правильной гексагональной призмой шестерной системы. Достаточно часто некоторые минеральные вещества имеют подобную форму.

Топаз, цимофан кажутся мне принадлежащими к этому виду — одному из наиболее богатых минералами среди четырех видов тридвойной системы.

Я предполагал, что центрированы грани, параллельные xy. Если произведено центрирование граней, параллельных xz или yz, то будет иметь место

$$\Sigma^2_{xz}\{g,\ h,\ k=2j-g\}=g^2\lambda'+h^2\lambda+k^2, \qquad (118)$$

$$\Sigma^2_{yz}\{g,\ h,\ k=2j-h\}=g^2\lambda'+h^2\lambda+k^2. \qquad (119)$$

Чаще всего внешняя структура позволяет обнаружить, на какой из трех плоскостей должно располагаться ромбическое основание. Когда

отнесение к a, b, d их предполагаемых значений и приписывание каждой грани ее символического обозначения являются сомнительными, разделим последовательность наблюдавшихся форм на две группы тремя различными способами: по признаку четности или нечетности $g+h$; $g+k$; $h+k$.

Деление, разделяющее последовательность на две наиболее несходные группы с преобладанием форм с четной суммой, будет указывать, на какой из трех координатных плоскостей должно быть расположено ромбическое основание первоначальной формы.

Тридвойная система, прямоугольный октаэдральный вид. Этот вид происходит из гексаэдрального прямоугольного вида при центрировании прямых прямоугольных призм в центре их фигуры.

Возведем в квадрат уравнения (81) и (82), заменим S^2 на Σ^2, величину Σ^2 (ghk) — значением, извлеченным из (116), и умножим вторые члены на 4. В результате получим, как и в случае четверного оксаэдрального вида:

$$\Sigma_c^2 \{g,\ h,\ k = 2j - g - h\} = g^2\lambda' + h^2\lambda + k^2. \qquad (119a)$$

Подразумевается, что если сумма $g+h+k$ — нечетная, то g, h, k надо умножить на 2.

По этой формуле подсчитана третья часть табл. VI. Формы $\{110\}$, $\{101\}$, $\{011\}$ будут преобладающими.

Комбинация двух таких форм позволяет огранить кристалл прямым октаэдром с прямоугольным основанием. Эта комбинация — наиболее обычный облик кристалла, имеющего грани этого кристаллического вида.

Если три такие формы сосуществуют, то они образуют ромбический додекаэдр, аналогичный ромбододекаэдру тричетверной системы, но с неодинаково наклоненными к осям гранями. Достаточно часто та из трех форм $\{110\}$, $\{101\}$, $\{011\}$, которая параллельна оси с наибольшим параметром, выпадает из комбинации и заменяется тремя формами $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$, нормальными данной оси. Отсюда получаем октаэдр с прямоугольным основанием, срезанный параллельно этому основанию.

Так, хлористая медь, где $a=1$, $b=0.882$, $d=1.317$, имеет кристаллы, часто являющиеся комбинацией трех форм $\{101\}$, $\{011\}$, $\{001\}$, которые вместе с $\{110\}$ являются доминирующими формами для этого минерала.

Помимо хлористой меди, можно назвать следующие вещества, также принадлежащие этому виду: фосфорнокислая медь, октаэдрическая мышьяковистая медь и, может быть, также арагонит.

Тридвойная система, ромбический октаэдральный вид. Этот последний вид тридвойной системы получен из гексаэдрального вида с прямоугольным основанием центрированием шести граней порождающих призм.

Преобразуем уравнения (93) и (94) способом, аналогичным тому, о котором шла речь в тричетверном октаэдральном виде. Заменяем $\Sigma^2(ghk)$ значением, извлеченным из уравнения (116), и после умножения вторых членов на 2 находим:

$$\Sigma_f^2(g,\ h = 2j - g,\ k = 2j' - g) = g^2\lambda + h^2\lambda' + k^2. \qquad (120)$$

Если некоторые из двух условий $h=2j-g$, $k=2j'-g$ не удовлетворяются, умножаем g, h и k на 2.

Площади порождающих параллелограммов основных форм этого вида, подсчитанные по формуле (120), приведены в последней четверти табл. VI.

Преобладающей формой является $\{111\}$. Она может ограничить кристалл и придать ему форму прямого октаэдра с ромбическим основанием независимо от того, какая из трех осей занимает вертикальное положение.

Этот октаэдр может быть усечен в 2, 3, 6 вершинах формами $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$. Когда существуют четыре подобных усечения и их грани встречаются, кристалл приобретает вид прямоугольной призмы, надстроенной четырехгранными заострениями, чередующимися с гранями призмы. Наличие формы $\{111\}$ достаточно для определения отношений параметров a, b, d.

Самородная сера, силикат магния (виларсит, по Дюфренуа), флюелит и скородит,* мне кажется, принадлежат к этому виду.

Двойная система, гексаэдральный вид. Двойная ось взята за ось z и расположена вертикально. Ее параметр равен d. Два сопряженных ряда OG, OH (рис. 1), параллельных двум сторонам основного треугольника OGI' сетки, нормальной двойной оси, принимаются за оси x и y. Они образуют между собой тупой угол. Диагональный ряд OI принимается за дополнительную ось. Параметры этих осей $a=OG$, $b=OH$, $c=OI$ удовлетворяют условиям (20). Обозначения имеют четыре характеристики. Если в уравнении (71)

$$\operatorname{tang}^2 U=\lambda,\ \operatorname{tang}^2 V=\lambda',\ \operatorname{tang}^2 W=\lambda'', \tag{121}$$

то получим

$$S^2(ghik)=(-hi\lambda-gi\lambda'-gh\lambda''+k^2)\,S^2(0001). \tag{122}$$

Заменив S^2 на Σ^2 и уничтожив множитель Σ^2 (0001), найдем

$$\Sigma^2(ghik)=-hi\lambda-gi\lambda'-gh\lambda''+k^2. \tag{123}$$

Числа λ, λ', λ'' подчинены неравенству $\lambda<\lambda'<\lambda''$.

Начнем с определения отношения трех параметров a, b, c. Для этого исследуем преобладающие формы в вертикальной зоне, общий символ которых $\{ghio\}$. Эта зона имеет двойную ось системы в качестве оси зоны.

Формы подразделяются на три группы:

1) формы $\{01\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$;
2) формы $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$, $\{1\bar{2}10\}$, $\{11\bar{2}0\}$;
3) формы неопределенного положения $\{ghio\}$.

Получим

$$\Sigma^2\{01\bar{1}0\}=\lambda,\ \ \Sigma^2\{1010\}=\lambda',\ \ \Sigma^2\{1\bar{1}00\}=\lambda'',\ \ \Sigma^2\{2\bar{1}\bar{1}0\}=-\lambda+2\lambda'+2\lambda'',$$
$$\Sigma^2\{1\bar{2}10\}=2\lambda-\lambda'+2\lambda'',\ \Sigma^2\{11\bar{2}0\}=2\lambda+2\lambda'-\lambda''.$$

* Принимая за параметры осей скородита значение $a=1$, $b=0.869$, $d=0.958$, найдем символы основных форм: $\{111\}$, $\{100\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{210\}$, $\{021\}$, $\{112\}$, которые расположены в порядке убывания ретикулярных плотностей их граней.

Важно отметить, что λ, λ', λ'' пропорциональны $\overline{OG}^2$, $\overline{OH}^2$, $\overline{OI}^2$ (рис. 1) и, так как треугольник OGI' является основным треугольником сетки, то

$$\lambda < \lambda' + \lambda'', \quad \lambda' < \lambda + \lambda'', \quad \lambda'' < \lambda + \lambda'.$$

Следовательно, три формы $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$, $\{01\bar{1}0\}$ будут преобладающими формами зоны. Их комбинация порождает неправильную гексаэдральную призму, параллельную двойной оси. Дополнениями двугранных углов попарно смежных граней будут углы O, G, I' основного треугольника OGI'. Отношения их синусов дадут отношения параметров $a : b : c$.

После решения первой задачи надо искать параметр d. Для этого исследуем огранение кристалла у каждого выхода двойной оси. Преобладающими будут здесь еще формы, параллельные координатным осям и имеющие символы $\{o\bar{h}hk\}$, $\{go\bar{g}k\}$, $\{g\bar{g}ok\}$, основными — $\{01\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$. В случае, когда эти три формы свободно развиты у каждой из двух вершин кристалла они образуют заострение из шести граней, надстраивающее неправильную гексаэдральную призму $\{01\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}0\}$, $\{1\bar{1}00\}$.

После измерения наклона этих граней к $\{0001\}$, которая является верхним основанием кристалла, найдем d из формулы (49).

В качестве примера возьмем эпидот, описанный в III томе «Минералогии» Дюфренуа и изображенный на табл. CLIV (рис. 54) атласа этого издания.

Грань M имеет символ $(01\bar{1}0)$ и параллельна оси x; грань M с символом $(10\bar{1}0)$ параллельна оси y, и грань T с символом $(1\bar{1}00)$ параллельна дополнительной оси.

Наблюдения дают следующий результат: наклон T и $g' = 129°39'$, T и $M = 115°41'$, M и $g' = 114°40'$.

Следуя методу, изложенному на стр. 171, примем за единицу диаметр окружности, описанной вокруг основного треугольника сетки плоскости $z=0$. Тогда a, b, c будут равны синусам противолежащих углов: $a = \sin 129°39' = 0.7700$, $b = \sin 115°41' = 0.9012$, $c = \sin 114°40' = 0.9087$, $S\,(0001) = ab \sin (\widehat{x, y}) = abc = 0.6306$.

Далее имеем

грань P (рассматриваемого рисунка) $= (0001)$,
грань $c^1 = (01\bar{1}1)$, c^1 к $P = U = 148°37'$,
грань $e^1 = (10\bar{1}1)$, e^1 к $P = V = 145°6'$,
грань $b^1 = (1\bar{1}01)$, b^1 к $P = W = 145°3'$.

По формулам (45) и (49) находим

$$d = -\text{abc}\,\frac{\operatorname{tang} U}{a} = 0.500,$$

$$d = -\text{abc}\,\frac{\operatorname{tang} V}{b} = 0.488,$$

$$d = -\text{abc}\,\frac{\operatorname{tang} W}{c} = 0.485.$$

Вычислив среднее арифметическое значение, получим $d=0.491$. Находим λ, λ', λ'' из формул (121): $\lambda=0.359$, $\lambda'=0.492$, $\lambda''=0.501$.

С помощью этих чисел и формулы (123) подсчитаем площади порождающих параллелограммов кристаллографических форм эпидота, расставленных в порядке возрастания данных площадей. Далее сравним полученную таким образом последовательность с той, которая выражает частоту появления форм. При этом выявится поразительная согласованность этих последовательностей.

Двойная система, октаэдральный вид. Этот вид происходит из предыдущего центрированием прямоугольников граней, параллельных форме $\{01\bar{1}0\}$, или $\{10\bar{1}0\}$, или $\{1\bar{1}00\}$. Двойная ось принимается за ось z. На плоскости xy мы имеем три координатные оси x, y и дополнительную ось — продолжение геометрической равнодействующей двух других осей. Предположим, что центрированы грани, параллельные xz. В уравнении (86) S^2 заменим на Σ^2, добавим четвертую характеристику i, заменим $\Sigma^2(ghik)$ значением, извлеченным из уравнения (123), наконец, умножим второй член на 4. В результате получим

$$\Sigma^2_{xz}(g,\ h,\ i,\ k=2j-g)=-hi\lambda-gi\lambda'-gh\lambda''+k^2). \qquad (124)$$

В случае, когда соотношение $k=2j-g$ не имеет места, умножаем g, h, i, k на 2, что позволяет прибегнуть к уравнению (85). Если центрировать вертикальные грани, параллельные плоскости yz, то получим

$$\Sigma^2_{yz}(g,\ h,\ i,\ k=2j-h)=-hi\lambda-gi\lambda'-gh\lambda''+k^2). \qquad (125)$$

Если центрировать вертикальные грани, параллельные дополнительной оси, обозначив (см. стр. 152) ординату, параллельную этой оси, то получим

$$\Sigma^2_{tz}(g,\ h,\ i,\ k=2j-i)=-hi\lambda-gi\lambda'-gh\lambda''+k^2). \qquad (126)$$

Вернемся к уравнению (124) и центрированию параллельно xz. В вертикальной зоне этих граней, обозначенных $\{ghio\}$, где характеристики g, h, i рассматриваются как переменные, имеем

$$\Sigma^2\{01\bar{1}0\}=\lambda,\ \Sigma^2\{10\bar{1}0\}=4\lambda',\ \Sigma^2\{1\bar{1}00\}=4\lambda'',\ \Sigma^2\{2\bar{1}\bar{1}0\}=-\lambda+2\lambda'+2\lambda'',$$
$$\Sigma^2\{11\bar{2}0\}=8\lambda+8\lambda'-4\lambda'',\ \Sigma^2\{1\bar{2}10\}=8\lambda-4\lambda'+8\lambda''.$$

Для последовательности форм, нормальных или косых по отношению к двойной оси, для которых характеристика $k=1$, имеем

$$\Sigma^2\{0001\}=4,\ \Sigma^2\{10\bar{1}1\}=\lambda'+1,\ \Sigma^2\{1\bar{1}01\}=\lambda''+1,\ \Sigma^2\{01\bar{1}1\}=4\lambda+4,$$
$$\Sigma^2\{11\bar{2}1\}=2\lambda+2\lambda'-\lambda''+1,\ \ \Sigma^2\{\bar{1}211\}=2\lambda-\lambda'+2\lambda''+1,\ \ \Sigma^2\{2\bar{1}\bar{1}1\}=$$
$$=-4\lambda+8\lambda'+8\lambda''+4.$$

Ясно, что кристалл будет комбинацией вертикальной формы $\{01\bar{1}0\}$ с косыми формами $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$. Вертикальная форма $\{2\bar{1}\bar{1}0\}$ появляется на ребре, разделяющем грани $\{10\bar{1}0\}$ и $\{1\bar{1}00\}$, и приводит к их ис-

чезновению. Наконец, формы, преобладающие в заострениях, ограничивающих два выхода оси z, будут, в общем, чередоваться с формами, преобладающими в зоне, параллельной двойной оси. Это чередование породит вокруг двойной оси зубчатое соединение граней и косые по отношению к плоскости симметрии кристалла ребра их пересечений, тогда как в гексаэдральном виде такие ребра обычно параллельны плоскости симметрии и, следовательно, горизонтальны.

Это — один из наилучших признаков для определения, часто с первого взгляда и без всяких вычислений, к какому из двух видов двойной системы принадлежит кристалл.

Наиболее простой кристалл является комбинацией $\{01\bar{1}0\}$ с одной из форм $\{10\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}01\}$, площадь порождающего параллелограмма которой наименьшая, т. е. с формой $\{10\bar{1}1\}$. Эта призма с горизонтальной геометрической осью имеет основаниями два вертикальных ромба, а боковыми гранями четыре параллелограмма, параллельных средней стороне основного треугольника сетки плоскости xy. В ней легко узнать косую ромбоэдрическую призму, расположенную в положении, отличающемся на 90° от обычного.

Порядок преобладания форм не будет тем же самым, если центрировать грани $\{1\bar{1}00\}$, параллельные дополнительной оси. Тогда, ограничившись наиболее простыми формами, имеем

$$\Sigma^2(01\bar{1}0) = 4\lambda,\quad \Sigma^2(10\bar{1}0) = 4\lambda',\quad \Sigma^2(1\bar{1}00) = \lambda'',\quad \Sigma^2(11\bar{2}0) = 2\lambda + 2\lambda' - \lambda''.$$
$$\Sigma^2(0001) = 4,\ \Sigma^2(01\bar{1}1) = \lambda + 1,\ \Sigma^2(10\bar{1}1) = \lambda' + 1,\ \Sigma^2(1\bar{1}01) = 4\lambda'' + 4.$$

Формы $\{01\bar{1}1\}$, $\{10\bar{1}1\}$ и $\{1\bar{1}00\}$ стремятся преобладать и образуют прямой октаэдр, имеющий в качестве основания параллелограмм, два острых угла которого делятся плоскостями, нормальными этому основанию и параллельными малой диагонали параллелограмма. Может также случиться, что октаэдр появляется без всяких боковых усечений.

Наконец, в случае центрирования прямоугольников граней $\{10\bar{1}0\}$, параллельных оси y, т. е. оси со средним параметром на плоскости xy, получим следующие значения:

$$\Sigma^2(01\bar{1}0) = 4\lambda,\ \Sigma^2(10\bar{1}0) = \lambda',\ \Sigma^2(1\bar{1}00) = 4\lambda'',\ \Sigma^2(1\bar{2}10) = 2\lambda - \lambda' + 2\lambda'',$$
$$\Sigma^2(0001) = 4,\ \Sigma^2(01\bar{1}1) = \lambda + 1, \Sigma^2(10\bar{1}1) = 4\lambda' + 4,\ \Sigma^2(1\bar{1}01) = \lambda'' + 1.$$

В этом случае внешний вид приближается к тем кристаллам, у которых преобладает либо косая ромбоэдрическая призма, либо прямой октаэдр с параллелограммоидальным основанием. Это зависит от того, к чему ближе значение λ': к λ или к λ''.

Параметры a, b, c, d определяются так же, как для кристаллов гексаэдрального вида в том случае, если бы две из четырех боковых граней порождающего параллелепипеда не были центрированы.

К двойному октаэдральному виду отнесем следующие вещества: ортоклаз, сернокислый натрий, амфибол, эвклаз и др. Амфибол и эвклаз

обладают, предположительно, индексом центрирования по плоскости $(1\dot{1}00)$. Я заметил в мемуаре о системах точек, что этот случай имеет место, когда сетка плоскости $z=\frac{1}{2}$ проектируется в середины параметров, образующих большие стороны основных треугольников сетки плоскости $z=0$.

Асимметричная система. В силу большого числа параметров, трудно достичь уверенного определения первоначальных форм.

Выберем четыре непараллельные грани, параллельные спайности, или наиболее часто повторяющиеся грани. Будем рассматривать их как грани, образующие основной тетраэдр совокупности, сложенной из молекул кристалла, или, по меньшей мере, один из самых простых элементарных тетраэдров.

Из четырех граней, входящих в этот тетраэдр, трем, образующим наименее острый телесный угол, т. е. граням, у которых сумма двугранных углов наибольшая, припишем символы (001), (010), (100); четвертой грани — символ (111).

Тогда легко определить параметры системы посредством шести двугранных углов между этими гранями. В самом деле, имеем

$$\mu=(\widehat{(010),(001)}),\quad \nu=(\widehat{(001),(100)}),\quad \omega=(\widehat{(010),(100)}).$$

Если обозначить через μ, ν, ω углы $(\widehat{(111),(100)})$, $(\widehat{(111),(010)})$, $(\widehat{(111),(001)})$, то с помощью формул сферической геометрии от двугранных углов легко перейти к плоским и вывести из этих последних соотношение $a:b:d$.

Всем граням припишем символические обозначения, зависящие от принятой системы осей. Вычисляем площади их порождающих параллелограммов по формуле (69). Если согласование теоретической и практической частот появления граней не удовлетворяется, производим смену осей или параметров, необходимую для установления параллелизма, указанного теорией. Еще раз обращаю внимание на то, что этот параллелизм не должен быть всегда строго точен. Очевидно, ретикулярная плотность не является единственным фактором, влияющим на образование граней в процессе кристаллизации. Здесь даже не приходится прибегать к посторонним силам, которые могут принимать в этом участие. Здесь может воздействовать и способ чередования двух смежных сеток, ограничивающих слой. Действительно, если ортогонально спроектировать эти сетки одна на другую, то неподвижная сетка и проектируемая на нее вторая сетка могут быть в некотором случае почти одинаковыми или же узлы параллелограммов одной сетки могут быть соседями с центрами параллелограммов второй.

Эти различия вытекают из изменения формы основного треугольника при равенстве площади этих треугольников. Главным же образом они вызваны формой молекулярного многогранника, направлением осей основного отталкивания или притяжения. Это те причины, которые в не-

которых границах должны искажать закон расположения граней, следующий непосредственно из плотностей их ретикулярных сеток. Можно предполагать, что эти причины благоприятствуют появлению последовательности целой серии форм в ущерб другой последовательности, что еще более сильно искажает результаты, выводимые из нашей фундаментальной гипотезы. Несмотря на эти ограничения, я не сомневаюсь, что эта гипотеза сыграет некоторую роль в кристаллографии и молекулярной физике. Моя цель будет достигнута, если для некоторых хорошо изученных минеральных видов минералоги попытаются произвести подсчеты ретикулярных плотностей из граней и сравнить с тенденцией к появлению этих граней в процессе кристаллизации.





ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КРИСТАЛЛ, РАССМАТРИВАЕМЫЙ КАК СОВОКУПНОСТЬ МНОГОАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ

§ I. О симметрии молекул кристаллических тел

В предшествующих исследованиях мы занимались исключительно относительным расположением центров тяжести молекул кристаллических тел. В прямом смысле слова такое расположение представляет собой кристаллическую структуру. Теперь наша задача более трудная — рассмотреть вопрос о молекулярной структуре. Эта структура дает понятие о геометрическом расположении элементов, составляющих молекулу, вокруг ее центра тяжести. Внешние признаки, помогающие определить снаружи структуру молекулы, если она простая, или, по крайней мере, ее форму, если она сложная, могут быть порождены только силами притяжения или отталкивания, производимыми молекулой по различным направлениям.

Если бы эти силы действовали, излучаясь сферически из центра, если бы они оставались неизменными на данном расстоянии от центра во всех направлениях, одним словом, если бы все было подобно вокруг этого центра, то молекула действовала бы как сферическая, или, еще лучше, как простая точка, полюс сил.

Ее собственная структура не выразилась бы ни в одном ощутимом явлении и могла бы быть познанной только путем теоретических соображений, например атомистическими законами химии.

Но явления не происходят таким образом; силы, выделяемые молекулой, не являются одинаковыми во всех направлениях. Реакции, действующие на нее, не всегда проходят через центр тяжести молекулы, и последствия этих неравномерностей при надлежащем изучении позволяют проникнуть во внутреннее устройство ее. Попытаемся доказать, что молекула обладает различными центрами, или полюсами сил. Эти полюсы, вероятно, являются атомами, составляющими молекулу. Такая точка зре-

ния, свойственная химии, является несколько чуждой кристаллографии, и я ограничусь обоснованием существования молекулярной полярности, независимо от последствий, которые можно было бы в дальнейшем из этого вывести.

Во-первых, это следует из работ геометров, особенно г.г. Пуассона и Нейманна, о равновесии кристаллических тел. Невозможно объяснить твердость материальных тел, не обращаясь к молекулярной полярности. «В твердых телах, — говорит Пуассон, — причина, которая удерживает молекулы в направлениях, где они более или менее сжаты, может быть только частью их действия, зависящего от их формы и взаимного расположения. . . Когда действие этой вторичной силы становится незаметным, тело переходит в текучее (жидкое) состояние». Кроме того, «совершенная подвижность текучих молекул следует из того, что они являются сферическими или достаточно удаленными друг от друга, так что их форма не имеет ощутимого влияния на их взаимное действие».*

Таково же мнение, высказанное Лапласом в его работе «Изложение системы устройства вселенной» (6-е изд., т. II, стр. 350): «По-видимому, твердое состояние зависит от силы притяжения молекул в сочетании с их формой. Влияние формы, ощутимое в вязких жидкостях, равняется нулю для тех, которые обладают полной текучестью».

Во-вторых, симметрия кристаллической структуры является также следствием влияния, определяющим направление молекулярных сил по их абсолютным значениям.

Когда тело, кристаллизуясь, медленно переходит из жидкого состояния в твердое, каждая молекула в свою очередь закрепляется на внешней поверхности кристалла в период его образования. Она закрепляется на месте, которое отвечает равновесию ее центра. Никакая кинематическая пара не должна вращать ее вокруг этого центра. Принятие той или иной кристаллической системы следует из этих условий равновесия и, по-видимому, может быть объяснено с помощью симметрии молекул. Об этом будет сказано в дальнейшем. Если считать молекулу сферической, то выбор способа кристаллизации становится действием, лишенным достаточного основания.

Наконец, именно молекулярная полярность порождает явление, известное в кристаллографии под названием г е м и э д р и и, на что первым указал Делафосс. ** Это явление вследствие своей важности будет рассмотрено детально.

Обратимся к вышеприведенному определению (стр. 143) граней кристалла одного рода. Пусть заданы две грани одного рода. В ходе их образования вокруг ядра, помещенного внутри жидкой, соответственно составленной среды, все будет подобно для каждой из этих граней при условии, если молекулы являются простыми материальными точками или

* Journal de l'Ecole Polytechnique. XX^e cahier, p. 92, 93.

** Savants e'trangers, t. VIII, p. 641.

действуют как таковые. Необходимым следствием этого предположения было бы то, что грани одного рода должны были бы всегда появляться вместе, за исключением совершенно случайных неудач. Следовательно, каждая кристаллическая форма должна была бы появиться на ограничивающих поверхностях кристалла в полном числе граней, ее характеризующих.

В действительности это происходит часто, но не всегда. В многочисленных случаях часть граней исчезает. И это невозможно объяснить случайными причинами, например скрытым влиянием окружающей среды.

Исчезают только некоторые грани, находящиеся в определенных условиях. Это явление обнаруживается не на всех кристаллических формах. Например, в тричетверной системе оно может изменять форму правильного октаэдра и превращать его в правильный тетраэдр, в то время как ничего подобного не наблюдается для куба или ромбододекаэдра.

Во всех этих случаях абсолютное подобие граней одной и той же формы кажется ошибочным. По меньшей мере, оно не влечет за собой совместного появления граней, как необходимого следствия.

Важно заметить, что мы пришли к закону совместного появления граней, рассматривая молекулы как сферические частицы. Эта гипотеза, следовательно, не может быть точной.

Отныне молекулы кристаллических тел будут для нас многогранниками, вершины которых, распределенные некоторым образом вокруг центра тяжести, будут центрами, или полюсами, сил, исходящих из молекулы. Это предположение имеет желаемую общность. Действительно, если, например, образовать из молекулы конечное и однородное тело, действующее всеми точками своей поверхности или объема, то можно всегда предположить ее разделенной на более мелкие части. Каждая из этих частей действует так, как если бы масса была сконцентрирована в центре фигуры.

Все молекулы одного и того же вещества должны быть идентичными и совместимыми. При кристаллизации гомологические цепочки этих молекул становятся параллельными, на что мы указали в начале первой части этой работы. Следовательно, молекулярная ориентация является одинаковой от одного конца кристалла до другого. Молекулярная полярность и изменчивость сил с направлением является следствием многогранной фигуры молекулы и закона, следуя которому силы, исходящие из каждой вершины, изменяются в зависимости от расстояния. Когда расстояние между двумя молекулами становится достаточно большим, влияние поперечных размеров каждой из них ослабляется и они стремятся все больше и больше действовать как простые точки. Однако расстояния, на которых они расположились во время кристаллизации, меньше той границы, которую мы только что указали. Таким образом, видно, почему взаимные действия в общем случае не проходят через центр тяжести. Понятно, что параллельное направление гомологических цепочек двух соседствующих молекул, связанное со всякой кристаллизацией, должно

следовать из поворотов, которые эти действия стремятся произвести вокруг их центров тяжести.

Установив существование молекулярных многогранников, мы докажем, что они симметричны и обладают, как и кристаллическая совокупность, в узлах которой они закрепились, осями, центром и плоскостями симметрии, характерными для них.

Я называю центром симметрии какого-либо многогранника такую центральную точку, которая при соединении ее с какой-либо вершиной данного многогранника и продолжении соединяющей их прямой в противоположную от вершины сторону на величину, равную ей самой, попадает своим концом также в вершину этого многогранника. Очевидно, что конечный многогранник может иметь только один центр симметрии, совпадающий с его центром тяжести.

Оси симметрии будут прямыми, проходящими через центр тяжести; при повороте многогранника вокруг них на угол, равный делителю 360°, видимое положение вершин не изменяется. Эти оси могут быть двойными, тройными, четверными и т. д., сообразно тому, что вращение, самовосстанавливающее места вершин, равно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... полного поворота.

Наконец, плоскости симметрии, проходящие через центр тяжести многогранника, делят его на две геометрически симметричные половины. Если это так, то для обоснования этих соображений рассмотрим молекулу кристалла, принадлежащего к тричетверной системе. Наиболее общая кристаллографическая форма последней состоит из 48 граней одного рода. Могут представиться два различных случая: либо многогранник будет обладать всеми элементами симметрии соответствующей системы, либо только частью этих элементов.

В первом случае у молекулярного многогранника будут три четверные оси, направленные как четверные оси совокупности, четыре тройные оси и шесть двойных осей, совпадающих с одноименными осями совокупности; он будет также обладать 9 плоскостями симметрии и центром симметрии в центре тяжести.

Пусть F, F' — две прямо подобные грани одной формы. Рассмотрим молекулу M, принадлежащую ретикулярной плоскости F, а также молекулу M', принадлежащую ретикулярной плоскости F'.

Перенесем плоскость F' параллельно самой себе с таким расчетом, чтобы совместить M' с M; затем повернем подвижную совокупность вокруг общего центра тяжести этих совпадающих молекул так, чтобы подвижная сетка F' совпала с неподвижной F. Произведем это наложение угловым вращением $\frac{p}{q}\,360°$ вокруг некоторой оси симметрии L^q совокупности. Здесь q — порядковый номер этой оси и p — целое число, меньшее q. Однако, согласно гипотезе, эта ось принадлежит также молекуле M'. Если эта молекула участвует в движении F' и подвижной совокупности, то после вращения она вновь займет то же видимое положение и совпадет с M.

Отсюда видно, что существует полное подобие между молекулами плоскости F, с одной стороны, и молекулами плоскости F', с другой. Следовательно, две грани F и F' будут при одинаковых условиях образования гранями, ограничивающими кристалл.

То же самое будет, если грань F' обратно подобна грани F по отношению к плоскости симметрии P. Если плоскость, проведенная параллельно P через центр тяжести молекулы, является плоскостью симметрии молекулярного многогранника, то F и F' должны будут совпасть.

Наконец, в случае, если грани F и F' обратно подобны по отношению к центру симметрии совокупности, то они параллельны, но их стороны являются противоположно направленными. Обозначим через C (рис. 8) центр симметрии системы, образованной этими двумя гранями, а через p — один из полюсов молекулы M, центр тяжести которой находится в M. Все будет подобным между верхней поверхностью F и нижней F', если p_1', гомологичное p по отношению к C, тоже является полюсом молекулы M'. Проведем $M'p'$, равную и параллельную Mp, где p' должен быть полюсом M' в силу параллельной ориентации молекул кристаллов. Сосуществование полюсов p', p_1' влечет сосуществование граней F, F', т. е. при этом условии M' является центром симметрии для молекулы M'.

Если молекулярный многогранник обладает таким центром симметрии, то существование F как грани, ограничивающей верхнюю часть кристалла, влечет существование ей параллельной грани F', ограничивающей нижнюю половину кристалла.

Из вышеизложенного следует, что если ограничиться рассмотрением условий сосуществования 24 граней прямой полуформы (см. определение на стр. 145) в тричетверной системе, то будет признано необходимым наличие 13 осей симметрии системы в молекулярном многограннике. При этом обратная полуформа сопутствует прямой полуформе, если молекулярный многогранник обладает, кроме того, центром симметрии.

Рассмотрим теперь второй случай и предположим, что ось L^q, которая осуществляет совпадение F' с F, совершенно не существует как ось симметрии в молекулярном многограннике. Тогда вращение, равное $\frac{p}{q}\,360°$, приведет к совпадению двух сеток граней F и F', и центры тяжести M и M' совпадут, многогранник M' не будет совпадать с M, ибо L^q не является, по предположению, его осью симметрии.

Пусть F и F' — грани, ограничивающие в некоторый момент кристалл, находящийся в процессе образования в жидкой порождающей его массе. Расположение всех полюсов или центров сил под и над плоскостью F не будет точно таким, как положение гомологичных им полюсов под и над плоскостью F'. Равнодействующие силы, привлекающие еще свободную и блуждающую на небольшом расстоянии от плоскости F молекулу, не будут такими же, как силы, действующие на другую молекулу, подобно расположенную по отношению к плоскости F'. Следовательно, процесс кристаллизации может быть различным на двух поверхностях F и F',

отделяющих кристалл от порождающей среды. Отсюда следует, что часть граней формы может не образовываться.

Если многогранник, имеющий 13 осей тричетверной системы, был бы лишен центра симметрии, то 24 грани обратной полуформы могут исчезнуть. В результате образуется только одна прямая полуформа.

Голоэдрическими кристаллами названы такие, общие формы которых всегда полные. Они имеют 48 граней в тричетверной системе, 24 грани — в шестерной, 16 — в четверной и т. д. Из этого следует: во всех голоэдрических кристаллах молекулярный многогранник обладает теми же осями и плоскостями симметрии, что и совокупность, а центр симметрии находится в центре фигуры.*

Гемиэдрическими, тетартоэдрическими названы такие кристаллы, для которых число граней общего положения сокращается наполовину или в четыре раза. Назовем эти кристаллы мериэдрическими.

Для всех мериэдрических кристаллов часть осей, центр или часть плоскостей симметрии совокупности не встречается на их молекулярных многогранниках.

Надлежащее изучение этих кристаллов всегда определит отсутствующие оси и плоскости и позволит расчленить элементы симметрии системы на две группы, одна из которых является общей и для совокупности и для молекулы. Эта группа указывает на одновременное присутствие некоторого числа граней одной формы. Вторая группа, исчезнувшая в молекуле, объясняет отсутствие исчезнувших граней.

Если наложение сеток двух граней одного рода влечет полное совпадение молекулярных многогранников, то грани будут называться не только одного рода, но и идентичными (в соответствии с определением на стр. 142, 143). В противоположном случае грани будут одного рода, но не идентичными.

В результате этого закон, называемый законом симметрии и регулирующий вид распределения граней кристалла, должен быть выражен следующим образом.

Все грани, принадлежащие одной и той же кристаллической форме и, более того, идентичные, должны совпадать.

Теперь рассмотрим молекулярный многогранник, в котором изменена степень симметрии. В принципе этот многогранник будет считаться имеющим полную симметрию, которая характеризует совокупность. В результате уничтожения некоторых осей или плоскостей симметрии она снизится. При этом образуются мериэдрические кристаллы, в которых группы идентичных граней станут все менее и менее сложными, однако без изменения относительного положения. На первый взгляд кажется, что в природе нет границы этому прогрессирующему сокращению симметрии моле-

* Из этих трех элементов симметрии (осей, плоскостей и центра) двух достаточно для существования третьего.

кул для данной кристаллической системы. Казалось бы, можно встретить всевозможные случаи в различных минералах. Но наблюдения показывают, что это не так: молекулярные многогранники с ограниченным числом элементов симметрии не объединяются в кристаллические совокупности весьма высокой симметрии.

В общем можно сказать, что за малым числом исключений не наблюдается форм и комбинаций форм наименее симметричных кристаллических систем, дающих характерные углы и наклоны наиболее симметричных систем.

Отсюда следует, что существует граница обеднения симметрии молекулярного многогранника, кристаллизующегося в заданной системе. Если удалить достаточное число этих единиц симметрии, то и симметрия кристаллизации понизится, хотя и в меньшей степени. Это можно выразить следующим образом.

Многогранники со сложной симметрией кристаллизуются в системах со сложной симметрией, а многогранники с простой симметрией кристаллизуются в системах с простой симметрией.

Такое соответствие не могло бы быть результатом случая, так как данной молекулярной структуре соответствует отвечающая ей кристаллическая структура. Может показаться довольно вероятным, что молекулярная симметрия определяет симметрию кристаллической совокупности.

Можно прийти к тому же выводу путем теоретических соображений, опираясь на условия равновесия кристаллических совокупностей. Возьмем для примера соединение голоэдрических молекул при начинающейся кристаллизации. Попытаемся доказать, что молекулы стремятся навязать свою симметрию образующейся совокупности. Рассмотрим две соседние молекулы M и M', расположенные одна по отношению к другой на расстоянии r. Это расстояние достаточно мало, чтобы взаимное влияние их поперечных размеров было ощутимым. Предположим, что существует ось порядка q в их многогранниках. Если эти две молекулы располагаются конец к концу на продолжении их осей L^q и направлены одинаковым образом по отношению к внешнему пространству, то равнодействующая сила, действующая на каждый из двух центров M и M', обязательно направлена по соединяющей их линии. В противном случае каждое наклонное действие повторилось бы $q—1$ раз вокруг MM', которая является осью симметрии порядка q для группы из этих двух молекул. Равнодействующая этих q сил была бы направлена по MM'. То же можно было бы обнаружить при наличии прямолинейного неограниченного ряда молекул M, M', M'', . . . , ориентированных одинаково, если этот ряд является осью симметрии данных молекул. Можно себе представить, что, изменяя общее расстояние r, разделяющее эти молекулы между собой, можно найти такое взаимное положение, при котором ряд находится в равновесии.

Устойчивость этого равновесия следует из того, что если одна из молекул удаляется от оси ряда, то появляются новые боковые составляющие, стремящиеся ее возвратить на место.

Если, исходя из молекулы M и следуя направлению оси L^q, мы расположили первый ряд молекул, то, следуя направлению других осей, можно образовать другие последовательности молекул M μ μ' μ'', M μ_1 μ_1' μ_1'' и т. д.

Молекулы μ, μ', μ'', ..., μ_1, μ_1', μ_1'', ... станут в свою очередь начальными точками рядов, параллельных $MM'M''$ ... Ясно, что эти новые ряды будут стремиться к симметричному расположению вокруг MM'. Содержащиеся в неподвижной плоскости силы проходят через прямую MM' и, вращаясь вокруг нее, остаются теми же каждый раз, когда углы вращения этой плоскости возрастут на $\frac{360°}{q}$. Это позволяет сделать из MM' ось симметрии для всей системы. Следовательно, наличие новых рядов не может оказать на центр тяжести M никакого косого действия по отношению к MM', потому что каждая равнодействующая сила данного типа повторилась бы $q-1$ раз вокруг этой оси. Она породила бы составляющую, параллельную ее направлению.

Следовательно, понятна возможность стабильности такой системы для подходяще подобранного межмолекулярного пространства. Гораздо более вероятно встретить равновесие в таком расположении, чем в любом другом, вследствие сокращения до нуля нормальных составляющих рассматриваемой оси.

Отсюда следует, что ось симметрии молекулярного многогранника стремится превратиться в подобным образом расположенную ось симметрии того же порядка для совокупности, в которой происходит кристаллизация.

Это же наблюдается для плоскостей симметрии молекулы. Пусть MP (рис. 9) — горизонтальная плоскость симметрии, пересеченная по прямой MP вертикальной плоскостью рисунка. Ясно, что ближайшие к этой плоскости молекулы стремятся занять положение равновесия после присоединения к общей ориентации, ибо они не могут действовать друг на друга перпендикулярно этой плоскости. Более того, если рассматривать ряд $MM^{\text{I}}M^{\text{III}}$... уже в состоянии устойчивого равновесия, то симметрия $MM^{\text{II}}M^{\text{IV}}$, если она существует, окажется точно так же в равновесии. Отсюда видно, что если молекула еще движется в непосредственной близости от M^{IV}, симметричной M^{III} по отношению к плоскости MP, то она должна стремиться занять положение окончательного равновесия в точке M^{IV}. Такова причина стремления плоскости MP стать плоскостью симметрии совокупности. Из вышеизложенного ясно, что структура молекулярного многогранника влияет на строение кристалла и определяет выбор системы. Если отбросить это объяснение и продолжать рассматривать молекулы как точки или сферы, то такой выбор показался бы действием без причин (см. стр. 208). Добавим несколько пояснений по этому поводу.

Известно, что каждая кристаллическая совокупность характеризуется размерами порождающего параллелепипеда или тремя линейными пара-

метрами a, b, d, представляющими ребра, и тремя угловыми параметрами, представляющими плоские углы α, β, δ.

Между тем при предположении о сферичности молекул любая комбинация параметров была бы достаточной для равновесия центральных молекул, ибо каждая из них является центром симметрии для системы молекул, которые ее окружают в узкоограниченной сфере межмолекулярных взаимодействий.

В связи с таким подобием во внутреннем строении принятая комбинация зависела бы исключительно от условия равновесия молекул поверхности и была бы под влиянием внешних воздействий. Например, эти воздействия осуществлялись бы путем обмена параметров между собой при взаимном обмене внешних сил, параллельных данным параметрам, что приводило бы к очевидным следствиям, противоречащим наблюдениям. Кроме того, за исключением чрезвычайно редких случаев кристаллов асимметричной системы, некоторые комбинации равенства или перпендикулярности ребер являлись бы единственными, реализуемыми природой. Например, в случае, когда $a=b=d$, встречаются только две следующие комбинации: 1) $\alpha=90°$, $\beta=90°$, $\delta=90°$, что соответствует кубу; 2) $\alpha=\beta=\delta$, что соответствует ромбоэдру.

Этот выбор, производимый природой, и предпочтение, оказываемое ею некоторым формам порождающих параллелепипедов, остались бы необъясненными и усложняли бы рациональное учение кристаллографии, если бы мы не признавали влияния молекулярной симметрии.

Подводя итог, приходим к выводу, что молекулярный многогранник симметричен и элементы его симметрии, стремясь перейти в соответствующую совокупность, определяют этим структуру.

Правда, можно возразить, что трудность объяснения симметричного состояния кристаллических совокупностей давно минула, и что остается лишь показать, почему молекулярные многогранники являются симметричными. Атомная теория дает совершенно готовый ответ на последний вопрос и показывает, что каждая молекула тела слагается из конечного числа разнородных атомов. Уже в 1814 г. Ампер, исходя из наблюдений совершенно иного порядка, пришел к выводу, что молекулярный многогранник должен быть образован из атомов, симметрично расположенных вокруг его центра тяжести. Этим легко обосновывается внутреннее равновесие молекул.

Здесь возникает другое возражение, связанное с кристаллизацией простых веществ.

При кристаллизации углерода, серы, висмута должны ли мы признать многогранную форму их молекул? Я не колеблюсь в утвердительном ответе и думаю, что до кристаллизации атомы этих веществ группируются так, чтобы образовать многогранник определенной формы.

Установив закон симметрии молекулярных многогранников, мы должны теперь решить следующие задачи.

1. Из известной симметрии многогранника вывести систему, в которой он должен кристаллизоваться.

2. Указать различные случаи мериэдрии (гемиэдрии, тетартоэдрии), которую может породить неполная симметрия этого многогранника.

3. Сравнить полученные теоретические результаты с различными примерами мериэдрии, наблюдавшимися минералогами.

В последней части этой работы к этой теории будут добавлены явления гемитропии и взаимного проникания двух кристаллов.

§ II. О кристаллической системе, в которой должны группироваться молекулы с известной симметрией

В XIV томе «Журнала чистой и прикладной метаматики», издаваемого Лиувиллем, мною дана полная классификация многогранников исходя из их симметрии. Краткое изложение этой классификации имеется в табл. VIII.

Используемые там символы Λ, L, L', C, Π, P, P' уже применялись в моей работе о многогранниках симметричной формы, как и в моей работе о системах точек, от стр. 107 и далее. Буквы P, P', лишенные показателя степени, обозначают плоскости симметрии, не являющиеся нормальными ни к какой из осей симметрии многогранника; знаки OL, OL^2, OC, OP указывают, что многогранник лишен осей, или двойных осей, или центра симметрии, или плоскостей симметрии.

Ось называется г л а в н о й, когда другие оси ей нормальны и, более того, плоскость симметрии ей нормальна или содержит ее в себе. В многогранниках от 4 до 16-го класса включительно q можно придать всевозможные целые значения от $q=1$ до $q=\infty$. Порядковый номер оси обозначает тогда порядок класса. Классы 4—9-й — всегда четного порядка, 10—16-й будут, напротив, нечетного порядка.

Сфероэдрическими многогранниками являются многогранники, обладающие многочисленными осями, из которых ни одна не является главной. Они делятся на две группы — четыреждытройные и десятитройные в соответствии с наличием четырех или десяти тройных осей.

В многогранниках 17—19-го классов оси $4L^3$ параллельны четырем диагоналям куба, оси $3L^4$ — ребрам этого куба, $6P$ параллельны плоскостям, попарно соединяющим середины противолежащих ребер.

В многогранниках 20 и 21-го классов $4L^3$ параллельны четырем диагоналям куба, $3L^4$ параллельны ребрам этого куба, $6L^2$ параллельны прямым, соединяющим попарно середины противолежащих ребер.

В многогранниках 22 и 23-го классов $6L^5$ параллельны прямым, соединяющим попарно центры противоположных граней правильного додекаэдра, $10L^3$ параллельны 10 большим диагоналям этого многогранника, а $15\,L^2$ параллельны прямым, соединяющим попарно середины противоположных ребер.

Что касается более детальных сведений, то их можно найти в моей работе о многогранниках симметричной формы.

Мы видели (стр. 214—215), что когда вещество, молекулярные многогранники которого обладают некоторой симметрией, только что выкристаллизовалось, оси и плоскости молекулярной симметрии стремятся перейти в кристаллическую совокупность, сохраняя свое относительное положение. В соответствии с этим для определения природы кристаллографической системы предлагается следующее правило.

> Среди семи кристаллических систем молекулы только что окристаллизовавшегося вещества примут ту систему, симметрия которой предлагает наибольшее количество элементов, общих с симметрией, свойственной их молекулярному многограннику.

Предполагать, что это правило не имеет ни одного исключения, значило бы идти слишком далеко.

Оно должно, очевидно, распространяться на подавляющее большинство случаев, которые могут представиться, а этого достаточно для его использования. Прежде чем искать его применение, отметим, что рассмотрение центра симметрии не существенно для данного вопроса, ибо этот центр симметрии присутствует в символах наших семи кристаллических систем и является одним из существенных условий всей совокупности. Поэтому нам следует принимать во внимание только оси и плоскости симметрии.

В совокупности возможны только двойные, тройные, четверные и шестерные оси. Стало быть, другие оси, которыми мог бы обладать многогранник, следует рассматривать как асимметричные прямые, не влияющие на симметрию совокупности, если только порядок их симметрии не является кратным 2, 3, 4, 6. Но и в этом случае ось многогранника, перенесенного в совокупность, играет там роль оси одного из этих порядков.

Обозначения и определения. Обозначим через S_c все элементы симметрии, общие для многогранника и его кристаллической совокупности; S_p — элементы симметрии, свойственные только многограннику; S_a — элементы симметрии совокупности, которыми не обладает многогранник. Таким образом, полная симметрия многогранника может быть представлена символом $[S_c, S_p]$, а полная симметрия совокупности — $[S_c, S_a]$.

Многогранником, эквивалентным заданному, будем называть такой многогранник, полная симметрия которого $[S_c]$. Отсюда видно, что эквивалентный многогранник представляет собой простейший многогранник, освобожденный от всех излишних условий симметрии, т. е. от всех элементов симметрии, не способных по своей природе перенестись в совокупность, в которой они должны будут откристаллизоваться.

Может статься, что некоторые из семи кристаллических систем обладают одновременно одной и той же частью S_c полной симметрии многогранника. В этом случае для определения кристаллической системы недостаточно правил, изложенных на стр. 214—215. В качестве примера возьмем молекулярный многогранник $[\Lambda^2, 2L^2, oC, 2P]$, характеризующийся

главной осью Λ^2, двумя двойными осями одного рода L^2, перпендикулярными как главной оси, так и друг другу, двумя плоскостями симметрии, проходящими через Λ^2 и наклоненными под углом 45° к осям L^2. Симметрия, общая как этому многограннику, так и четверной системе, будет [Λ^2, 2 L^2, 2 P]. Симметрия, общая многогранникам и тричетверной системе, тоже будет [Λ^2, 2 L^2, 2 P]. Какую из этих симметрий надо выбрать?

В этом и во всех подобных случаях отметим, что наши две кристаллические системы отличаются числом параметров, которые надо определить в порождающем параллелепипеде. На шесть величин a, $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{a}$, α, β, δ (см. стр. 215) число определенных величин равно:

5 — для тричетверной системы, 4 — для шестерной, четверной и тройной систем, 3 — для тридвойной системы, 2 — для двойной системы, 0 — для асимметричной системы.

Предположим, однако, что две кристаллические системы обладают также симметрией S_c молекулярного многогранника, но пусть число определенных параметров равно j для одной из этих систем и $j' > j$ — для другой. Так как существуют совокупности, имеющие j определенных параметров и обладающие симметрией S_c многогранника, то каково бы ни было значение $6-j$ других параметров, ясно, что не существует ни одного удовлетворительного довода, чтобы заранее определить величину $j'-j$ других параметров. Поэтому предоставим молекулярным силам устанавливать в процессе кристаллизации эту величину. Отсюда выводится второе правило.

> В том случае, когда несколько кристаллических систем обладают элементами симметрии, общими как для их совокупностей, так и для заданного молекулярного многогранника, кристаллизация пойдет по наименее симметричной системе, т. е. по той системе, которая оставляет наибольшее число неопределенных членов из шести основных элементов своего порождающего параллелепипеда.

Применение этого второго правила снимает отмеченную выше неопределенность, за исключением некоторых многогранников с тройными главными осями, которые могут с равным успехом кристаллизоваться как в тройной, так и в шестерной системах. К ним мы еще вернемся. Следующие правила позволяют просто изложить только что сформулированные положения. Надо выбирать такую кристаллическую систему, где S_c было бы как можно большим; S_a стало бы затем по возможности наименьшим.

Эти правила будут служить нам путеводной звездой при последовательном изучении 23 классов многогранников, представленных в табл. VII.

Многогранники 1 и 2-го классов должны кристаллизоваться в асимметричной системе. Хорошо видно, что нет достаточного основания для появления в их совокупности осей или плоскостей симметрии.

Многогранники 3-го класса обладают плоскостью симметрии, которая должна переходить в совокупность. Кроме того, они будут обладать центром симметрии и двойной осью, нормальной этой плоскости, и принадлежать двойной системе. Следующие уравнения дают симметрию для многогранника:

$$S_c = [P],\ S_p = 0$$

и совокупности

$$S_c = [\Pi],\ S_a = [\Lambda^2,\ C].$$

Многогранники 4—9-го классов обладают главной осью порядка $2q$. Необходимо отдельно исследовать три случая: $2q = 12j \pm 2$, $2q = 12j \pm 4$, $2q = 6j$, где j — некоторое целое число, которое может равняться нулю.

Первый случай: $2q = 12j \pm 2$. Многогранник $[\Lambda^{12j\pm2}$, $\text{o}L^2$, $\text{o}C$, $\text{o}P]$ обладает осью, эквивалентной двойной оси. Он, стало быть, будет кристаллизоваться в двойной системе $[\Lambda^2,\ C,\ \Pi]$ и будет иметь

$$S_c = [\Lambda^2].$$

Многогранник $[\Lambda^{12j\pm2},\ \text{o}L^2,\ C,\ \Pi]$ принадлежит тому же случаю, что и предыдущий. Он также кристаллизуется в двойной системе. Общая симметрия $[\Lambda^2,\ C,\ \Pi]$. Образующийся кристалл будет голоэдрическим, ибо молекулярный многогранник обладает всеми элементами симметрии своей совокупности. В многограннике $[\Lambda^{12j\pm2}\ (6j \pm 1)\ L^2,\ (6j \pm 1)\ L'^2,\ \text{o}C,\ \text{o}P]$ каждой двойной оси L^2 соответствует двойная ось L'^2 другого рода, ей перпендикулярная.* Кристаллизация будет осуществляться в тридвойной системе. В результате будем иметь

$$S_c = [\Lambda^2,\ L^2,\ L'^2].$$

В многограннике $[\Lambda^{12j\pm2},\ \text{o}L^2,\ \text{o}C,\ (6j \pm 1)P,\ (6j \pm 1)P']$ каждой плоскости симметрии P, проходящей через главную ось, соответствует другая плоскость симметрии P', ей нормальная. Кристаллизация проходит в тридвойной системе. В результате получим

$$S_c = [\Lambda^2,\ P,\ P'].$$

В многограннике $[\Lambda^{12j\pm2},\ (6j \pm 1)L^2,\ (6j \pm 1)L'^2,\ C,\ \Pi,\ (6j \pm 1)P^2,\ (6j \pm$ $\pm 1)P'^2]$ каждой оси L^2 соответствует L'^2, ей нормальная, и плоскости P^2, P'^2, нормальные этим осям. Следовательно, многогранник содержит все элементы тридвойной симметрии $[\Lambda^2,\ L^2,\ L'^2,\ C,\ \Pi,\ P^2,\ P'^2]$ и будет голоэдрическим.

Наконец, многогранник $[\Lambda^{12j\pm2},\ (12j \pm 2)L^2,\ \text{o}C,\ (12j \pm 2)P]$ для каждой оси L^2 имеет нормальную ось того же рода и две плоскости симметрии P, образующие с ними углы в 45°. Если через $(\widehat{L^2,\ L^2})$ обозначить угол между

* Journal de Mathématiques, t. XIV, p. 156.

двойными осями и через $(\widehat{L^2, P})$ — угол между двойной осью и плоскостью симметрии, то получим

$$(\widehat{L^2, L^2}) = (0,\ 1,\ 2.\ \ldots\ 12j \pm 2 - 1)\frac{180}{12 \pm 2},$$

$$(\widehat{L^2, P}) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \ldots\ 12j \pm 2 - \frac{1}{2}\right)\frac{180}{12j \pm 2}.$$

Взяв множителем второго члена первой формулы число $(6j \pm 1)$, будем иметь $(\widehat{L^2, L^2}) = 90°$. Взяв множителем второго члена второй формулы число $3j + \frac{1}{2}$, получим $(\widehat{L^2, P}) = 45°$.

Отсюда видно, что между нашим многогранником и четверной совокупностью имеется общая часть симметрии

$$S_c = [\Lambda^2,\ 2L^2,\ 2P].$$

Часть симметрии, общая нашему многограннику и тридвойной системе, будет только $[\Lambda^2, L^2, L^2]$, т. е. менее высокая симметрия, чем в предыдущем случае. Кристаллизация проходит в четверной системе.

Второй случай: $2q = 12j \pm 4$. Кристаллизация проходит также в четверной системе. Если выражения $(6j \pm 2)\ L^2$, $(6j \pm 2)\ L'^2$ фигурируют в символе симметрии многогранника, то ясно, что существуют две оси L^2, перпендикулярные между собой, и две оси L'^2, служащие биссектрисами прямых углов, образованных предыдущими осями. Тогда $2L^2$, L'^2 являются элементами симметрии, общими многограннику и его совокупности.

Если многогранник содержит плоскости симметрии $(6j \pm 2)P$, $(6j + +2)P'$, то в нем обнаруживается система $2P$, $2P'$, состоящая из двух нормальных плоскостей одного рода, проходящих через четверную ось и пересекающихся под углом в $45°$ с двумя нормальными плоскостями другого рода. Эта система принадлежит симметрии четверной совокупности.

Если многогранник имеет символ $[\Lambda^{12j \pm 4},\ (12j \pm 4)L^2,\ oC,\ (12j \pm 4)P]$, то он будет принадлежать четверной системе. Однако относительное расположение осей L^2 и плоскостей P не допускает, чтобы эти два элемента входили одновременно в выражение симметрии, общей многограннику и совокупности. Стало быть, возможны два случая:

$$S_c = [\Lambda^2,\ 2L^2,\ 2L^2],$$

т. е. четверная ось пересекается с четырьмя двойными осями, пересекающимися между собой под углом в $45°$;

$$S_c = [\Lambda^2,\ 2P,\ 2P],$$

т. е. имеется четверная ось и четыре плоскости симметрии, проходящие через эту ось и образующие между собой угол $45°$. Оси $2L^2$, $2L^2$ будут одного рода для многогранника, но разных родов в совокупности, аналогично ведут себя плоскости $2P$, $2P$.

Стало быть, имеется два различных априорно одинаково возможных решения. Кристаллизующееся вещество может принадлежать к любой из систем, следуя остальным условиям своего равновесия.

Третий случай: $2q=6j$. Кристаллизация проходит в шестерной системе. Этот случай подобен предыдущему. Элементы симметрии $3jL^2$, $3jL'^2$ сводятся к $3L^2$, $3L'^2$ в шестерной совокупности, аналогично $3jP$, $3jP'$ — к $3P$, $3P'$.

Многогранник $[\Lambda^{6j}\ 6jL^2,\ oC,\ 6jP]$ по отношению к шестерной системе ведет себя так же, как многогранник $[\Lambda^{12j\pm4}\ (12j\pm4)\ L^2,\ oC,\ (12j\pm4)\ P]$ по отношению к четверной системе. В результате приходим к двум решениям:

$$S_c=[\Lambda^6,\ 3L^2,\ 3L^2],$$

$$S_c=[\Lambda^6,\ 3P,\ 3P].$$

Если j — четное, то порядок основной оси делится одновременно на 3, 4, 6. Так как шестерная система обладает более высокой общей симметрией, чем четверная и тройная системы, то по правилу (стр. 217) следует высказаться в пользу шестерной системы.

Многогранники 10—16-го классов обладают главной осью порядка $2q+1$. Изучим по отдельности следующие три случая: $2q+1=6j\pm1$, $2q+1=3$, $2q+1=6j+3$, где j — некоторое целое число, большее нуля.

Первый случай: $2q+1=6j\pm1$. Ось $\Lambda^{6j\pm1}$ не может передаваться совокупности и ее бесполезно рассматривать.

Многогранник $[\Lambda^{6j\pm1},\ oL^2,\ oC,\ oP]$, стало быть, рассматривается как многогранник 1-го класса; многогранник $[\Lambda^{6j\pm1},\ oL^2,\ C,\ oP]$ — как многогранник 2-го класса. Многогранник $[\Lambda^{6j\pm1}\ (6j\pm1)L^2,\ oC,\ oP]$ может сообщить совокупности лишь одну из своих двойных осей. Как только две двойные оси, образующие между собой угол $p\dfrac{360^\circ}{6j\pm1}$, где p — целое число, пройдут в совокупности, то прямая, нормальная плоскости, проходящей через эти двойные оси, будет общей осью. Ее порядок * равен $6j\pm1$ или одному из его делителей. Следовательно, получим числа 2, 3, 4, 6, что невозможно. В результате многогранник будет кристаллизоваться в двойной системе.

Аналогично предыдущему многогранник $[\Lambda^{6j\pm1},\ oL^2,\ oC,\ (6j\pm1)P]$ может передать совокупности только одну из плоскостей симметрии и будет рассматриваться как многогранник 3-го класса. То же получим для многогранника $[\Lambda^{6j\pm1},\ oL^2,\ oC,\ \Pi]$, передающего совокупности плоскость симметрии Π. В многограннике $[\Lambda^{6j\pm1},\ (6j\pm1)L^2,\ C,\ (6j\pm1)P^2]$ элементами симметрии, общими для двойной системы, будут $[L^2,\ C,\ P^2]$, которые превратятся в $[\Lambda^2,\ C,\ \Pi]$ в совокупности. Кристаллизация будет двойной и голоэдрической. Многогранник $[\Lambda^{6j\pm1},\ (6j\pm1)L^2,\ oC,\ \Pi,\ (6j\pm1)P]$ может передать совокупности, им порожденной, одну из этих двойных осей

* Следствие теорем XXIV и XXXII мемуара о системах точках.

L^2, плоскость симметрии P, проходящую через ось L^2, и плоскость Π, нормальную P и тоже проходящую через L^2. Следовательно, в многограннике получим

$$S_c = [L^2, \Pi, P],$$

в совокупности

$$S_c = [\Lambda^2, P, P'].$$

В совокупности L^2 превращается в главную ось системы. Кристаллизация будет следовать тридвойной системе, символ которой $[\Lambda^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$.

Второй случай: $2q+1=3$. Многогранники $[\Lambda^3, \mathrm{o}L^2, \mathrm{o}C, \mathrm{o}P]$, $[\Lambda^3, \mathrm{o}L^2, C, \mathrm{o}P]$, $[\Lambda^3, 3L^2, \mathrm{o}C, \mathrm{o}P]$, $[\Lambda^3, \mathrm{o}L^2, \mathrm{o}C, 3P]$, $[\Lambda^3, 3L^2, C, 3P^2]$ обладают элементами симметрии, включенными в общее выражение симметрии тройных и шестерных совокупностей. Однако тройная и шестерная системы имеют в своих порождающих параллелепипедах то же число неопределенных параметров. Правило на стр. 217 не может снять эту неопределенность.

Кристаллизующееся вещество будет относиться к одной из этих двух систем исходя из иных условий равновесия.

Неопределенность, возникающая при кристаллизации многогранника $[\Lambda^3, \mathrm{o}L^2, \mathrm{o}C, \mathrm{o}P]$, заключается в следующем: что будет иметь этот многогранник своим ядром — ромбоэдр или правильную гексагональную призму. В механическом отношении эта неопределенность того же порядка, что и неопределенность, возникающая для многогранника $[L^4, \mathrm{o}L^2, \mathrm{o}C, \mathrm{o}P]$. Для последнего существен вопрос: сформируется ли он в четверном октаэдральном виде в форме октаэдра с квадратным основанием в качестве ядра или же в четверном гексаэдральном виде в форме призмы с квадратным основанием в качестве порождающего параллелепипеда.

Для многогранников 12 и 16-го классов подобная неопределенность не существует, ибо эти многогранники $[\Lambda^3, \mathrm{o}L^2, \mathrm{o}C, \Pi]$, $[\Lambda^3, 3L^2, \mathrm{o}C, \Pi, 3P]$ содержат плоскость симметрии Π, которая принадлежит шестерной совокупности, но не тройной. Кристаллизация должна проходить в шестерной системе. Для первого из этих многогранников

$$S_c = [\Lambda^3, \Pi],$$

для второго

$$S_c = [\Lambda^3, 3L^2, \Pi, 3P].$$

Третий случай: $2q+1=6j+3$. Этот случай, по сути дела, не отличается от предыдущего. Он отделен от него лишь в целях облегчения изложения. Основная ось Λ^{6j+3} рассматривается как просто тройная.

Кроме того, легко убедиться, что среди $(6j+3)$ двойных осей символа $(6j+3)\, L^2$ существуют три, наклоненные под углом 60° одна к другой. Они, следовательно, находятся в тех же условиях относительного расположения, что и три двойные оси $3L^2$ многогранника с тройной осью того же класса. То же будет для плоскостей симметрии $(6j+3)\, P$. Все эти многогранники будут вести себя как многогранники третьего порядка и того же класса.

В 10, 11, 13—15-м классах кристаллизация будет происходить как в шестерной, так и в тройной системах; в 12 и 16-м классах — в шестерной системе.

Многогранники 17—21-го классов обладают четырьмя тройными осями и тремя взаимно перпендикулярными либо двойными, либо четверными осями. Эти элементы симметрии находятся в тричетверной совокупности. Следовательно, в этой системе и должна происходить кристаллизация. Многогранники 21-го класса дают место голоэдрическим кристаллам, другие классы будут мериэдрическими.

Многогранники 22 и 23-го классов. В работе о многогранниках симметричной формы (теорема VIII) я показал, что многогранники [$6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, оC, оP] обладают осями симметрии многогранников 17-го класса, а многогранники [$6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, C, $15P$] обладают полной симметрией многогранников 18-го класса. Следовательно, эти многогранники будут кристаллизоваться в тричетверной системе.

Для многогранников 22-го класса

$$S_c = [4L^3,\ 3L^2,\ \text{o}C,\ \text{o}P],$$

для многогранников 23-го класса

$$S_c = [4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2].$$

Составим перечень только что приведенных различных случаев и распределим группы многогранников на семь кристаллических систем. Помещая во главе каждой системы все относящиеся сюда многогранные формы, мы получим новую классификацию молекулярных многогранников, распределенных по виду структуры их кристаллических совокупностей.

Табл. VIII содержит результаты этой работы. Объединим все виды многогранников, эквивалентный многогранник которых обладает одной и той же симметрией. Второй столбец таблицы представляет элементы симметрии эквивалентных многогранников, т. е. элементы симметрии, общие многограннику и совокупности. При сравнении символа совокупности и символа эквивалентного многогранника видно, что те же буквы означают те же элементы. Если же сравнивать символ эквивалентного многогранника с символом молекулярного многогранника, то это соответствие не всегда имеет место. Так, многогранник [$\Lambda^{6j\pm1}$, $(6j\pm1)L^2$, оC, Π, $(6j\pm1)\ P$] имеет эквивалентный многогранник [Λ^2, оL^2, оC, P, P']. Элементы L^2, Π, P данного многогранника при переходе в совокупность заменяются на Λ^2, P, P' и фигурируют в этой новой форме во втором символе.

Пусть в первой колонке находится многогранник, обладающий основной осью неопределенного порядка, но принадлежащий одной из форм $6j$, $6j\pm1$, ..., $12j\pm2$, $12j\pm4$, ..., где j — некоторое целое число. Непосредственно за ним в той же колонке всегда добавляем символ наиболее простого многогранника этой последовательности, т. е. многогранника, соответствующего наименьшему значению j. Заметим, что в четверной и шестерной системах вторая колонка содержит несколько случаев двойных решений.

Для объяснения этого напомним, что в четверной системе существуют двойные оси L^2 первого рода, параметр которых равен a, и двойные оси L'^2 второго рода с параметром $a\sqrt{2}$. Плоскости симметрии P^2, P'^2, нормальные этим осям, тоже двух разных родов.

Если молекулярный многогранник обладает осями только одного рода, ничто не указывает на то, какие из них переходят в совокупность: оси первого рода с параметром a или оси второго рода с параметром $a\sqrt{2}$. Симметрия S_c эквивалентного многогранника будет различной в зависимости от рассматриваемого случая. Например, молекулярный многогранник $[\Lambda^2, 2L^2, \text{o}C, 2P]$ может располагаться по отношению к своей четверной совокупности так, что его $2L^2$ совпадут с двумя двойными осями первого или второго рода совокупности. В первом случае будем иметь

$$S_c = [\Lambda^2,\ 2L^2,\ \text{o}C,\ 2P'^2],$$

а во втором —

$$S_c = [\Lambda^2,\ 2L'^2,\ \text{o}C,\ 2P^2].$$

В каждой шестерной совокупности существуют двойные оси $3L^2$ первого рода с параметром a и двойные оси $3L'^2$ второго рода с параметром $a\sqrt{3}$. То же наблюдается для плоскостей симметрии, перпендикулярных этим осям.

Если же молекулярный многогранник будет иметь один из двух родов осей или один из двух родов плоскостей, то возникнут основания для двойных решений, появляющиеся в результате того, что оси и плоскости симметрии молекулы могут совпадать то с элементами первого рода, то с элементами второго рода совокупности. Эти различия, содержащиеся в природе вещей, не следует обходить молчанием, ибо они могут выразиться во внешнем преобладании тех или иных кристаллических форм.

Определения. Впредь о б щ и м и о с я м и, о б щ и м и п л о с к о с т я м и с и м м е т р и и совокупности будем называть те, которые принадлежат также молекулярному многограннику. Н е д о с т а ю щ и м и о с я м и, н е д о с т а ю щ и м и п л о с к о с т я м и с и м м е т р и и совокупности назовем те, которые не существуют в данном многограннике.

Двойные решения, только что рассмотренные нами, будут заключаться в том, что общие оси или плоскости симметрии могут быть то первого, то второго рода.

§ III. Влияние симметрии молекулярного многогранника на облик косых кристаллических форм

Если молекулярный многогранник обладает всеми элементами симметрии совокупности, то все его грани одного рода идентичны. Следовательно, число граней кристаллических форм не уменьшается и кристалл остается голоэдрическим. Это не наблюдается в противоположном случае. Пусть символы симметрии совокупности будут $[QL^q,\ Q'L^{q'},\ Q''L^{q''},\ C,\ pP,\ p'P',\ p''P'']$.

Симметрия, общая совокупности и молекулярному многограннику, следующая:

$$S_c = [Q_1L^{q_1},\ Q_1'L^{q_1'},\ Q_1''L^{q_1''},\ cC,\ p_1P,\ p_1'P',\ p_1''P''].$$

В этом параграфе я ограничусь рассмотрением целочисленного сокращения количества граней, образующих систему граней, гомологичных заданной грани (ghk). В том случае, когда эта грань будет косой, т. е. не будет отличаться никакой особенностью положения, она не параллельна и не нормальна ни одной из осей симметрии системы. Полная, или голоэдрическая, форма по-прежнему обозначается символом $\{ghk\}$; мериэдрическая — $\mu\{ghk\}$. Рассмотрим эффект, порождаемый действием недостающей симметрии молекулярного многогранника на эти косые формы в мериэдрических кристаллах. Случай сокращенных форм рассмотрим в следующем параграфе.

Пусть $[Q_1L^{q_1}, Q_1'L^{q_1'}, Q_1''L^{q_1''}]$ представляет систему осей, общих совокупности и многограннику. Ясно, что каждой грани (ghk) соответствует $q—1$ прямо подобных граней, идентичных (ghk) и расположенных вокруг каждой из осей симметрии L^{q_1}. Следовательно, существует $(q_1—1)\ Q_1$ граней, гомологичных по отношению к осям $Q_1L^{q_1}$, $(q_1'—1)Q_1'$ — к осям $Q_1'L^{q_1'}$, $(q_1''—1)Q_1''$ — к осям $Q_1''L^{q_1''}$. Общее число прямо подобных и идентичных граней определяется по формуле

$$1 + (q_1 - 1)\,Q_1 + (q_1' - 1)\,Q_1' + (q_1'' - 1)\,Q_1''.$$

(аналогичная формула уже была получена на стр. 144).

Сравним это число с числом прямо подобных граней в голоэдрической форме $1+(q—1)Q+(q'—1)Q'+(q''—1)Q''$. Найдем, что их отношение * равно или $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{4}$, исключая, когда

$$q_1 = q, \quad q_1' = q', \quad q_1'' = q'',$$
$$Q_1 = Q, \quad Q_1' = Q', \quad Q_1'' = Q''.$$

* Сравнение второго столбца табл. VIII с символом симметрии семи кристаллических систем показывает, что всякий многогранник, обладающий всеми двойными осями совокупности, обязательно обладает также другими осями. Отсюда следует, что среди недостающих осей всегда находятся двойные оси. Пусть x — число прямо подобных граней мериэдрической формы. Если повернуть систему этих граней вокруг одной из двойных осей S_a, то, объединяя новые положения граней со старыми, получим систему двух прямо подобных граней. Последние идентичны граням молекулярного многогранника, обладающего, кроме осей L^{q_1}, $L^{q_1'}$, $L^{q_1''}$, еще осью вращения в виде двойной оси симметрии. Пусть этот многогранник все еще не содержит все двойные оси совокупности и $S_{a'}$ будет его новой недостающей симметрией. Повернем многогранник вокруг одной из двойных осей $S_{a'}$. В результате получим систему из 4 граней и т. д. до тех пор, пока не придем к многограннику, обладающему всеми осями симметрии голоэдрического многогранника. Следовательно, общее число полученных таким образом граней будет $\frac{1}{2}N$. Отсюда $x = \frac{1}{2}N$, или $2x = \frac{1}{2}N$, или $4x = \frac{1}{2}N$ и т. д.

Это отношение равно 1. Зададим

$$\frac{1+(q_1-1)Q_1+(q_1'-1)Q_1'+(q_1''-1)Q_1''}{1+(q-1)Q+(q'-1)Q'+(q''-1)Q''}=\gamma',$$

тогда γ' — отношение числа этих граней — может принять значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. N — число граней косой голоэдрической формы $\{ghk\}$, заданной известным уравнением

$$N=2\{1+(q-1)Q+(q'-1)Q'+(q''-1)Q''\}.$$

Число прямо подобных граней мериэдрической формы $\mu\{ghk\}$ будет равно $\frac{1}{2}N\gamma'$.

Определение. При $\gamma'=1$ многогранник называется голоосным и обладает всеми осями симметрии совокупности. Если $\gamma'=\frac{1}{2}$, то многогранник называется гемиосным. Голоосный многогранник с основной осью становится гемиосным, если он или теряет неосновные оси, или номер порядка его основной оси вдвое уменьшается. Голоосный сфероэдрический многогранник становится гемиосным, когда номера порядков его четных осей также вдвое уменьшаются. Может случиться, что гемиосность уничтожит оси симметрии. Так, многогранник [oL, oC, P] можно рассматривать как гемиосный многогранник двойной системы [Λ^2, C, Π].

Если $\gamma'=\frac{1}{4}$, то многогранник называется тетартоосным. Голоосный многогранник с основной осью становится тетартоосным при исчезновении его двойных осей и уменьшении вполовину номера порядка его основной оси. Так, [Λ^3, oL^2, oC, oP] является тетартоосным относительно многогранника [Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, oC, oP].

Если мериэдрическую форму $\mu\{ghk\}$ повернуть на 180° вокруг одной из недостающих осей совокупности, то получим новую форму $\mu'\{ghk\}$, которую назовем формой, сопряженной с $\mu\{ghk\}$.

В голоосных многогранниках кристаллические формы не имеют сопряженных форм. В гемиосных многогранниках каждой кристаллической форме соответствует сопряженная. Их объединение дает голоосную форму. Наконец, тетартоосным многогранникам каждой кристаллической форме соответствуют три различные сопряженные формы, а объединение четырех сопряженных форм воспроизводит голоосную форму.

Существуют ли обратно подобные грани в мериэдрической форме $\mu\{ghk\}$? Если $c=p_1=p_1'=p_1''=0$, то ясно, что не может существовать обратно подобной грани,* идентичной (ghk). Следовательно, в этом случае общее число граней формы $\mu\{ghk\}$ равно $\frac{1}{2}N\gamma'$.

---

* Случай четверной системы рассмотрен на стр. 233.

Если, наоборот, $c=1$ или p_1, p'_1, $p''_1 > 0$, т. е. если существует центр симметрии или одна или несколько плоскостей симметрии в многогранниках, то грань (ghk) будет иметь хотя бы одну обратно подобную идентичную ей грань. Однако этой последней отвечает $\frac{1}{2} N\gamma' - 1$ гомологичных граней, которые ей идентичны и прямо подобны. Следовательно, существует и $\frac{1}{2} N\gamma'$ идентичных граней, обратно подобных (ghk). Общее число граней равно $N\gamma'$.

Отсюда ясно, что число граней $\mu\{ghk\}$ равно $N\gamma'\gamma''$. Коэффициент γ'' равен единице, если c или p_1, или p'_1, или $p''_1 > 0$, и равен $\frac{1}{2}$, если $c=p_1=p'_1=p''_1=0$.

Молекулярный многогранник, не обладающий ни центром, ни плоскостями симметрии, но имеющий одну или несколько осей симметрии, называется гемисимметричным. Кристаллические формы, порождаемые таким многогранником, будут состоять только из прямо подобных между собой граней.

Каждый молекулярный многогранник, обладающий центром симметрии, называется центрированным многогранником. Если в многограннике существуют оси четного порядка, то центр симметрии всегда будет сопровождаться плоскостями симметрии. Наконец, каждый многогранник, лишенный центра, но обладающий одной или многими плоскостями симметрии, называется дихосимметричным многогранником. Кристаллические формы, основой которых служат центрированные или дихосимметричные многогранники, всегда состоят из равного количества прямо и обратно подобных граней.

Отсюда вытекает следующая классификация молекулярных многогранников:

1. голоосный центрированный, или голоэдрический;
2. голоосный гемисимметричный;
3. гемиосный центрированный;
4. гемиосный дихосимметричный;
5. гемиосный гемисимметричный;
6. тетартоосный центрированный;
7. тетартоосный дихосимметричный;
8. тетартоосный гемисимметричный.

Те же обозначения могут быть применены к кристаллам, порожденным этими многогранниками.

В кристаллах 2, 3, и 4 пунктов всякая косая форма $\mu\{ghk\}$ является гемиэдрической и имеет только половину соответствующих граней.

В кристаллах 5, 6 и 7 пунктов всякая косая форма $\mu\{ghk\}$ является тетартоэдрической и содержит только четверть соответствующих граней.

В кристаллах 8 пункта всякая косая форма $\mu\{ghk\}$ является гемитетартоэдрической и содержит только $\frac{1}{8}$ часть граней голоэдрической формы.

Приведенная классификация под собирательным названием мериэдрические кристаллы объединяет кристаллы, обладающие общими геометрическими и физическими свойствами. В третьей части работы мы увидим, что гемиосные кристаллы дают начало явлениям сочленения, наблюдаемым на голоосных кристаллах. Известные до сего дня кристаллы, вращающие плоскость поляризации, принадлежат к категории гемисимметричных.

Кристаллы, обладающие пироэлектрическими свойствами (за исключением малоизученных кристаллов мезотипа и пренита), являются гемиосными дихосимметричными.

Гемиэдрия с параллельными гранями, описанная немецкими кристаллографами, соответствует случаю центрированных многогранников, а гемиэдрия с наклонными гранями — случаю дихосимметричных, или гемисимметричных многогранников.

Продемонстрируем далее действия мериэдрии на косые кристаллические формы в различных кристаллических системах. Этот анализ приведет нас к классификации мериэдрических кристаллов, по сути дела, идентичной классификации, предложенной Франкенгеймом в Acta Academioe naturoe Curiosorum, t. XIX, 2^e parti.

Чтобы получить всевозможные случаи мериэдрии, разделим N граней голоэдрической формы, поставив во главу такие грани, которые всегда остаются объединенными между собой, какова бы ни была недостающая симметрия молекулярного многогранника. В следующих таблицах вверху первой колонки стоят элементы симметрии, производящие грани этой первой колонки от исходной грани (ghk) или $(ghik)$. Вверху каждой из следующих колонок стоят элементы симметрии, производящие грани соответственной колонки из граней первой колонки. Этот способ размещения граней совершенно подобен способу, употребленному Миллером в «Трактате о кристаллографии» и позже Франкенгеймом в «Системе кристаллов».

Для составления этой таблицы разделим сначала $\{ghk\}$ на две полуформы — прямую и обратную. Далее объединим в первой колонке 12 прямо подобных между собой граней по отношению к осям $3L^2$, $4L^3$. Эти оси составляют минимальную симметрию молекулярного многогранника, способного кристаллизоваться в данной системе.

Грани $(g\bar{h}\bar{k})$, $(\bar{g}\bar{h}k)$, $(\bar{g}h\bar{k})$ гомологичны (ghk) по отношению к осям $3L^2$, которые являются тремя взаимно перпендикулярными координатными осями совокупности. Если взять четыре первые гомологичные грани по отношению к тройным осям, то посредством круговой перестановки характеристик получим колонку I, в начале которой стоит символ $[3L^2$, $4L^3]$, указывающий, каким образом содержащиеся в нем грани происходят одна из другой.

Колонка II происходит из I перестановкой двух последних характеристик и последующим изменением знака последней. Геометрически это эквивалентно повороту на 90° вокруг координатной оси, которой отвечает первая характеристика. Вверху этой колонки стоит символ $3L^{2 \cdot 2}, 6L'^2$, ко-

48 граней $\{ghk\}$ в тричетверной системе

Колонка			
I	II	III	IV
$3L^2$, $4L^3$	$3L^{2 \cdot 2}$, $6'^2$	C, $3P^2$	$6P$
ghk	$gk\bar{h}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{g}\bar{k}h$
$g\bar{h}\bar{k}$	$g\bar{k}h$	$\bar{g}hk$	$\bar{g}k\bar{h}$
$\bar{g}h\bar{k}$	$\bar{g}kh$	$d\bar{h}k$	$g\bar{k}\bar{h}$
$\bar{g}\bar{h}k$	$\bar{g}\bar{k}\bar{h}$	$gh\bar{k}$	gkh
hkg	$hg\bar{k}$	$\bar{h}\bar{k}\bar{g}$	$\bar{h}\bar{g}k$
$h\bar{k}\bar{g}$	$h\bar{g}k$	$\bar{h}kg$	$\bar{h}g\bar{k}$
$\bar{h}k\bar{g}$	$\bar{h}gk$	$h\bar{k}g$	$h\bar{g}\bar{k}$
$\bar{h}\bar{k}g$	$\bar{h}\bar{g}\bar{k}$	$hk\bar{g}$	hgk
kgh	$kh\bar{g}$	$\bar{k}\bar{g}\bar{h}$	$\bar{k}\bar{h}g$
$k\bar{g}\bar{h}$	$k\bar{h}g$	$\bar{k}gh$	$\bar{k}h\bar{g}$
$\bar{k}g\bar{h}$	$\bar{k}hg$	$k\bar{g}h$	$k\bar{h}\bar{g}$
$\bar{k}\bar{g}h$	$\bar{k}\bar{h}\bar{g}$	$kg\bar{h}$	khg

торый указывает, что оси $3L^2$ становятся четверными и что молекулярный многогранник приобретает шесть двойных осей $6L'^2$.

Колонка III происходит из I при изменении знаков всех характеристик. При этом получаются грани, параллельные и противолежащие аналогичным граням колонки I. Это указывает на то, что молекулярный многогранник обладает теперь центром симметрии. Так как плоскости $3P^2$ всегда сопровождают этот центр, то вверху колонки стоит C, $3P^2$.

Аналогично этому колонка IV происходит из колонки II изменением знаков характеристик. Однако грани колонки IV можно получить из колонки I посредством добавления плоскостей симметрии $6P$. Этот последний символ и возглавляет IV колонку.

Вышеприведенные различные виды геометрического вывода легко проследить на рис. 10, представляющем в ортогональных проекциях распределение полюсов граней, т. е. точек касания этих граней с вписанной в форму сферой. Дана лишь верхняя половина сферы, которую делит надвое плоскость, нормальная одной из трех четверных осей совокупности. Эта ось принимается за ось z и проектируется ортогонально в точку O; OX, OY — положительные половины двух других четверных осей; плоскость XOY будет плоскостью симметрии системы, полюсы граней нижней полусферы имеют те же проекции, что и аналогичные грани верхней полусферы. От одних к другим можно перейти, меняя знак третьей ха-

рактеристики. Полюсы 111, $1\bar{1}1$, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}1$ будут верхними окончаниями четырех тройных осей системы.

Если задан молекулярный многогранник с известной симметрией, то для получения граней его мериэдрической формы μ $\{ghk\}$ достаточно объединить между собой колонки, заголовки которых, будучи объединенными, дают символ полной его симметрии. Последнее мы увидим, последовательно рассматривая различные многогранники, кристаллизующиеся в тричетверной системе.

Многогранник [$3L^2$, $4L^3$, oC, oP] — форма, ограниченная гранями колонки I, будет мериэдрической формой. Она имеет 12 граней, т. е. является тетартоэдрической. Ее можно назвать **гемиосной гемисимметричной формой.**

Многогранник [$3L^2$, $4L^3$, C, $3P^2$] — форма ограничена гранями колонок I и III; ее можно назвать **гемиосной центрированной формой.**

Многогранник [$3L^2$, $4L^3$, oC, $6P$] — форма образована всеми гранями колонок I и IV — **гемиосная дихосимметричная форма.**

Многогранник [$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP] — форма образована всеми гранями колонок I и II — **голоосная гемисимметричная форма.** Объединяя заглавные символы колонок, надо заменить $3L^{2-2}$ на $3L^4$.

Три последние формы гемиэдричные.

Многогранник [$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$] имеет голоэдрическую форму, содержащую 48 граней таблицы. Объединяя заглавные символы, надо заменить $3P^2$ на $3P^4$ и $6P$ на $6P^2$.

Гемиосная гемисимметричная, гемиосная дихосимметричная, голоосная гемисимметричная формы называются немецкими кристаллографами гемиэдрическими формами с косыми гранями. Гемиосная центрированная форма является гемиэдрической формой с параллельными гранями.

24 грани $\{ghik\}$ в шестерной системе

Колонка							
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Λ^3	$\Lambda^{3\cdot 2}$	$3L^2$	$3L'^2$	C	Π	$3P$	$3P'$
$ghik$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$	$gih\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$	$ghi\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}k$	$gihk$
$higk$	$\bar{h}\bar{i}\bar{g}k$	$igh\bar{k}$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{h}\bar{i}\bar{g}\bar{k}$	$hig\bar{k}$	$\bar{i}\bar{h}\bar{g}k$	$ihgk$
$ighk$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}k$	$hgi\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}\bar{k}$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$igh\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}k$	$hgik$

Чтобы составить эту таблицу, разделим сначала $\{ghik\}$ на две полуформы, прямую и обратную, затем объединим в колонке I определяющую

грань ($ghik$) с двумя гранями, прямо ей подобными и полученными вращением ($ghik$) на 120° вокруг основной оси. Последняя рассматривается в качестве простой тройной оси. Для этого достаточно осуществить круговую перестановку характеристик g, h и i. Символом Λ^3 озаглавим колонку I.

Колонка II содержит две новые грани, прямо подобные ($ghik$), которые выводятся из предыдущих при рассмотрении Λ^3 как двойной и тройной оси одновременно, т. е. при замене Λ^3 на Λ^6.

Колонки III и IV содержат грани, гомологичные по отношению к осям $3L^2$ и $3L'^2$ совокупности.

Прямые полуформы исчерпаны: колонки V, VI, VII, VIII можно получить заменой всех знаков характеристик в колонках I, II, III, IV. В начале этих новых колонок стоят элементы симметрии, способные вывести грани каждой из этих колонок из граней колонки I.

На рис. 11 представлены положения полюсов граней на верхней полусфере в ортогональной проекции. При этом сфера разделена надвое плоскостью, нормальной шестерной оси. Плоскость проекции содержит двойные оси первого рода OX, OY, OT; $10\bar{1}0$, $\bar{1}100$, $01\bar{1}0$, $\bar{1}010$, $0\bar{1}10$, $1\bar{1}00$ будут выходами двойных осей второго рода.

Плоскость XYT является плоскостью симметрии системы, полюсы граней нижней полусферы имеют те же проекции, что и грани верхней полусферы. Перейти от одной к другой можно путем замены знака k.

Чтобы узнать, какими гранями обладает форма μ $\{ghik\}$ для одного из молекулярных многогранников, кристаллизующихся в шестерной системе (их общий список приведен в табл. VIII), достаточно объединить между собой колонки, заглавные символы которых совпадают с различными элементами симметрии S_c многогранника. Далее следует результат этого анализа.

Многогранник [Λ^3, oL^2, oC ,oP] — форма ограничена тремя гранями колонки I — тетартоосная гемисимметричная форма; гемитетартоэдрическая.

Многогранник [Λ^3, oL^2, C, oP] — форма ограничена гранями колонок I и V — тетартоосная центрированная форма.

Многогранник [Λ^3, oL^2, oC, Π] — форма ограничена гранями колонки I и VI — основная тетартоосная дихосимметричная форма.

Многогранник [Λ^3, oL^2, oC, $3P$] — форма ограничена гранями колонок I и VIII — тетартоосная дихосимметричная форма первого рода.

Многогранник [Λ^3, oL^2, oC, $3P'$] — форма ограничена гранями колонок I и VIII — тетартоосная дихосимметричная форма второго рода.

Многогранник [Λ^6, oL^2, oC, oP] — форма ограничена 6 гранями колонок I и II — основная гемиосная гемисимметричная форма.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, oC, oP] — форма ограничена гранями колонок I и III — гемиосная гемисимметричная форма первого рода.

Многогранник [Λ^3, $3L'^2$, oC, oP] — форма ограничена гранями колонок I и IV — гемиосная гемисимметричная форма второго рода.

Все эти формы тетартоэдрические.

Многогранник [Λ^6, oL^2, C, Π] — форма ограничена 12 гранями колонок I, II, V, VI — основная центрированная гемиосная форма.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$] — форма ограничена 12 гранями колонок I III, V, VIII — центрированная гемиосная форма первого рода. Она не является голоэдрической формой тройной системы.

Многогранник [Λ^3, $3L'^2$, C, $3P'^2$] — форма ограничена 12 гранями колонок I, IV, V, VIII — центрированная гемиосная форма второго рода.

Многогранник [Λ^6, oL^2, oC, $3P$, $3P'$] — форма ограничена 12 гранями колонок I, II, VII, VIII — основная гемиосная дихосимметричная форма.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, oC, Π, $3P'$] — форма ограничена 12 гранями колонок I, III, VI, VIII — гемиосная дихосимметричная форма второго рода.

Многогранник [Λ^3, $3L'^2$, oC, $3P$] — форма образована 12 гранями колонок I, IV, VI, VII — гемиосная дихосимметричная форма второго рода.

Многогранник [Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, oC, oP] — форма ограничена 12 гранями колонок I, II, III, IV — голоосная гемисимметричная форма.

Многогранник [Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P^2$, $3P'^2$] — форма ограничена 24 гранями таблицы — голоосная центрированная форма. Это — голоэдрическая форма шестерной системы.

Некоторые из этих форм воспроизводят либо голоэдрическую, либо мериэдрическую форму тройной системы. Однако определить, в какой си-

16 граней $\{ghk\}$ в четверной системе

Колонка							
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
λ^2	$\lambda^{2\cdot 2}$	$2L^2$	$2L'^2$	C, Π	—	$2P$	$2P'$
ghk	$h\bar{g}k$	$g\bar{h}\bar{k}$	$hg\bar{k}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{h}g\bar{k}$	$\bar{g}hk$	$\bar{h}\bar{g}k$
$\bar{g}\bar{h}k$	$\bar{h}gk$	$\bar{g}h\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{k}$	$gh\bar{k}$	$h\bar{g}\bar{k}$	$g\bar{h}k$	hgk

стеме (в тройной или шестерной) произошла кристаллизация, можно только с учетом спайности и ретикулярной плотности преобладающих граней.

Эта таблица составлена по тем же принципам, которые были использованы для составления таблицы шестерной системы, с той лишь разницей, что грани группируются не через три, а через две и знак плоскости симметрии *П*, всегда сопровождающий *C*, должен перейти из шестого в пятый столбец. Чтобы знать, в каком случае грани шестого столбца должны будут принадлежать к мериэдрической форме $\mu\{ghk\}$ данного молекулярного многогранника, достаточно помнить, что число граней всегда равно 4, 8 или 16, а число объединяющихся столбцов всегда должно быть четным. Рис. 12 показывает ортогональную проекцию полюсов граней верхней полусферы, полученной при делении сферы пополам плоскостью, нормальной основной оси. Прямые *OX* и *OY* — двойные оси первого рода совокупности; 110, $\bar{1}\bar{1}0$, $\bar{1}10$, $1\bar{1}0$ — выходы осей второго рода. Полюсы граней нижней полусферы имеют те же проекции, что и верхние. Переход от одних к другим осуществляется изменением знака характеристики *k*.

Многогранник [Λ^4, oL^2, o*C*, o*P*] — форма ограничена четырьмя гранями колонок I и II. Объединяя заглавные символы этих колонок, заменим $\Lambda^{2\cdot 2}$ на Λ^4. Это — г е м и о с н а я г е м и с и м м е т р и ч н а я ф о р м а; тетартоэдрическая.

Многогранник [Λ^4, oL^2, o*C*, *П*] — форма ограничена 8 гранями колонок I, II, V и VI — ц е н т р и р о в а н н а я г е м и о с н а я ф о р м а.

Многогранник [Λ^4, oL^2, o*C*, 2*P*, 2*P'*] — форма ограничена 8 гранями колонок I, II, VII, VIII — о с н о в н а я г е м и о с н а я д и х о с и м м е т р и ч н а я ф о р м а.

Многогранник [Λ^2, 2L^2, o*C*, 2*P'*] — форма ограничена 8 гранями колонок I, III, VI и VIII — г е м и о с н а я д и х о с и м м е т р и ч н а я ф о р м а п е р в о г о р о д а.

Многогранник [Λ^2, 2L'^2, o*C*, 2*P*] — форма ограничена 8 гранями колонок I, IV, VI, VII — г е м и о с н а я д и х о с и м м е т р и ч н а я ф о р м а в т о р о г о р о д а.

Многогранник [Λ^4, 2L^2, 2L'^2, o*C*, o*P*] — форма ограничена 8 гранями колонок I, II, III, IV — г о л о о с н а я г е м и с и м м е т р и ч н а я ф о р м а.

Это гемиэдрические формы.

Многогранник [Λ^4, 2L^2, 2L'^2, *C*, *П*, 2P^2, 2P'^2] — форма ограничена 16 гранями таблицы — г о л о о с н а я ц е н т р и р о в а н н а я ф о р м а. Это — голоэдрическая форма четверной системы.

Возможно, что в природе встретится молекулярный многогранник, гомологичные вершины которого расположены по четыре вокруг центральной двойной оси. На рис. 12 показаны полюсы ghk, $\bar{g}\bar{h}k$, $\bar{h}g\bar{k}$, $h\bar{g}\bar{k}$, расположенные вокруг оси, нормальной плоскости проекций. Такой многогранник подчинялся бы законам, отличным от рассмотренных мною в работе

о многогранниках симметричной формы. Хотя символом его симметрии является $[\Lambda^2, oC, oP]$, он мог бы кристаллизоваться в четверной системе.

Мериэдрическая форма, соответствующая этому виду молекулярной симметрии, включала бы четыре грани колонки I и IV таблицы. Такие многогранники достойны того, чтобы их выделить. Две обратно подобные грани (ghk) и $(\bar{h}g\bar{k})$ могут быть идентичными, хотя молекулярный многогранник не обладает ни плоскостью, ни центром симметрии.

Ничего подобного не наблюдается в молекулярных многогранниках, изучением которых мы до сих пор ограничивались, а также и в тех, которые мы рассмотрим в дальнейшем.

Из общего учения о симметричных многогранниках я без всяких колебаний исключил многогранники, представляющие этот странный вид симметрии, ибо он, кажется, не встречается в природе.

Однако в табл. IX включены различные случаи его гемиэдрии. Чтобы отличать такой многогранник, его можно представить символом $[\Lambda^2, oC, oP]^4$, где 4 указывает на то, что кристаллизация будет идти в четверной системе.

12 граней $\{ghik\}$ в тройной системе

Колонка			
I	II	III	IV
Λ^3	$3L^2$	C	$3P$
$ghik$	$gih\bar{k}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}k$
$higk$	$igh\bar{k}$	$\bar{h}\bar{i}\bar{g}\bar{k}$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}k$
$ighk$	$hgi\bar{k}$	$\bar{i}\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}k$

Эта таблица построена по тем же принципам, которыми руководствовались при построении таблицы граней шестерной системы. Можно объединить колонки I, III, V, VII этой последней таблицы, сохраняя их символы.

На рис. 13 представлена ортогональная проекция полюсов 12 граней полной формы. Это повторение рис. 11 с той разницей, что изменен знак k для полюсов $gink$, $\bar{i}\bar{g}\bar{h}k$, $ihgk$, $\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$, $hgik$, $\bar{h}\bar{i}\bar{g}k$. Черные кружки обозначают полюса граней нижней полусферы. Можно представить себе 5 следующих случаев.

Многогранник $[\Lambda^3, oL^2, oC, oP]$ — форма ограничена тремя гранями колонки I — гемиосная гемисимметричная форма; тетартоэдрическая.

Многогранник $[\Lambda^3, oL^2, C, oP]$ — форма состоит из шести граней колонок I и III — гемиосная центрированная форма.

Многогранник $[\Lambda^3, oL^2, oC, 3P]$ — форма состоит из 6 граней колонок I и IV — гемиосная дихосимметричная форма.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, oC, oP] — форма состоит из 6 граней колонок I и II — голоосная гемисимметричная форма. Три последние формы гемиэдричные.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, C, $3P$] — форма центрированная голоосная и, следовательно, голоэдрическая, содержащая 12 граней таблицы.

Пять случаев, которые мы только что рассмотрели, воспроизводятся также в шестерной системе. Расположение преобладающих форм и характер спайности помогают наблюдателю выбрать один из двух способов, по которым может идти кристаллизация вещества.

8 граней {ghk} в тридвойной системе

Колонка			
I	II	III	IV
Λ^2	L^2, L'^2	C, Π	P, P'
ghk	$g\bar{h}\bar{k}$	$\bar{g}\bar{h}\bar{k}$	$\bar{g}hk$
$\bar{g}\bar{h}k$	$\bar{g}h\bar{k}$	$gh\bar{k}$	$g\bar{h}k$

Эту таблицу строим на основе тех же принципов, которыми мы пользовались при построении предыдущей таблице. Ее можно получить, объединяя вместе колонки I, III, V, VII таблицы четверной системы и заменяя заглавные символы $2L^2$ на L^2, L'^2, и $2P^2$ на P, P'.

Сфера, содержащая полосы граней, предполагается разделенной на две равные части плоскостью Π_0. Рис. 14 изображает полюсы верхней полусферы в ортогональной проекции на эту плоскость. Прямые OX, OY — положительные части двойных осей L^2, L'^2. Заменив на рисунке k на $\bar{k}$, будем иметь проекции полюсов нижней полусферы. Три вида многогранников кристаллизуются в тридвойной системе.

Многогранник [Λ^2, oL^2, oC, P, P'] — форма состоит из 4 граней, содержащихся в колонках I и IV — гемиосная дихосимметричная форма.

Многогранник [Λ^2, L^2, L'^2, oC, oP] — форма состоит из 4 граней, содержащихся в колонках I и II, — голоосная гемисимметричная форма. Это две гемиэдрические формы.

Многогранник [Λ^2, L^2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2] — форма обладает 8 гранями таблицы — голоосная центрированная, следовательно, голоэдрическая форма.

Построение этой таблицы не представляет никакой трудности после разделения общей формы на две — прямую и обратную. Колонка I не имеет заглавного символа, но это обстоятельство не должно нас смущать,

4 грани {*ghik*} в двойной системе

Колонка			
I	II	III	IV
—	Λ^2	*C*	*П*
ghik	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$	$\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$	$ghi\bar{k}$

ибо грань (*ghik*), будучи определяющей гранью формы, служит отправным пунктом для всех голоэдрических или мериэдрических форм.

На рис. 15 изображена проекция полюсов на плоскость *П*. *OX*, *OY*, *OT* — три координатных ряда, расположенные в этой плоскости. Проекции верхних и нижних полюсов совпадают. Полюс *ghik* перекрывает $ghi\bar{k}$, а полюс $\bar{g}\bar{h}\bar{i}k$ — $\bar{g}\bar{h}\bar{i}\bar{k}$. В этой кристаллической системе рассмотрим три следующих многогранника.

Многогранник [о*L*, о*C*, *П*] — форма содержит две грани колонки I — гемиосная дихосимметричная форма.

Многогранник [Λ^2, о*C*, о*P*] — форма состоит из 2 граней колонок I и II — голоосная гемисимметричная форма. Это две гемиэдричные формы.

Многогранник [Λ^2, *C*, *П*] — форма содержит четыре грани таблицы — голоосная центрированная и, следовательно, голоэдрическая форма.

2 грани {*ghk*}
в асимметричной системе

Колонка	
I	II
—	*C*
ghk	$\bar{g}\bar{h}\bar{k}$

Можно представить себе только два случая в зависимости от того, обладает ли молекулярный многогранник центром симметрии или нет.

Многогранник [о*L*, о*C*, о*P*] — форма состоит из единственной грани. Ее можно назвать нецентрированной формой. Эта гемиэдрическая форма может рассматриваться как принадлежащая общей категории гемисимметричных форм.

Многогранник [о*L*, *C*, о*P*] — форма состоит из двух параллельных граней — центрированная форма. Это голоэдрическая форма.

Когда положение осей кристалла точно определено, строгое определение единственной косой формы, числа и расположения различных граней по отношению к осям и плоскостям симметрии совокупности всегда будет приводить к виду гемиэдрии, свойственной кристаллу. Она же, следовательно, приводит к симметрии молекулярного многогранника или, по меньшей мере, к эквивалентному ему многограннику.

Кристаллизация значительно чаще воспроизводит формы, параллельные или нормальные осям, чем косые формы. Эти последние встречаются весьма редко в кристаллических системах с высокой симметрией. Поэтому важно найти естественные модификации симметрии, свойственные молекулярным многогранникам, которые могут развиваться на этих новых формах.

§ IV. О влиянии, оказываемом молекулярным многогранником на облик параллельных и нормальных форм

Чтобы определить изменения, испытываемые параллельными или нормальными формами в мериэдрических кристаллах, можно использовать два разных метода: метод символов и геометрический метод.

Первый метод очень прост; для его понимания достаточно примера.

Спрашивается: во что перейдет форма $\{go\bar{g}k\}$ в многограннике $[\Lambda^3, 3L'^2$, oC, Π, $3P]$, кристаллизуясь в шестерной системе. Составим таблицу граней для гемиосной дихосимметричной формы второго рода. Для этого, объединив в маленькую таблицу колонки I, IV, VI, VII таблицы на стр. 230, получим

$ghik$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}\bar{k}$	$ghi\bar{k}$	$\bar{g}\bar{i}\bar{h}k$
$higk$	$\bar{i}\bar{h}\bar{g}\bar{k}$	$hig\bar{k}$	$\bar{i}\bar{h}\bar{g}k$
$ighk$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}\bar{k}$	$igh\bar{k}$	$\bar{h}\bar{g}\bar{i}k$

Заменив h на o, а i на $\bar{g}$, получим

$go\bar{g}k$	$\bar{g}go\bar{k}$	$go\bar{g}\bar{k}$	$\bar{g}gok$
$o\bar{g}gk$	$go\bar{g}\bar{k}$	$o\bar{g}g\bar{k}$	$go\bar{g}k$
$\bar{g}gok$	$o\bar{g}g\bar{k}$	$\bar{g}go\bar{k}$	$o\bar{g}gk$

Сравнивая эти 12 символов, видим что 6 последних граней смешиваются с шестью первыми и обратная полуформа совпадает с прямой. Число действительно различных граней сводится, таким образом, к шести. Легко узнать, будет ли изображение формы дитриэдром или гексаэдром с шестью равнобедренными треугольниками.

Этот метод идентификации символов уже был использован Миллером для того, чтобы отличить число граней частной формы от числа граней косой формы в случае голоэдрии. Ясно, что с таким же успехом это можно применить к мериэдрическим кристаллам.

Второй метод базируется на двух следующих теоремах.

1. Каждая косая форма, становясь ортопараллельной, теряет половину своих граней, если плоскость, нормальная оси, параллельной формы, является плоскостью симметрии молекулярного многогранника. При этом прямая и обратная полуформы объединяются. В противном случае форма сохраняет свои грани.

2. Каждая форма, нормальная оси L^q, теряет половину своих граней, если молекулярный многогранник, уже не будучи голоэдрическим, не обладает больше ни центром симметрии, ни плоскостью симметрии, нормальной оси L^q, ни осью четного порядка, нормальной той же оси. При этом из двух параллельных граней одна исчезает и форма принимает характер гемиэдрии с косыми гранями. В противном случае форма сохраняет свои грани.

Доказательство этих теорем не представляет трудностей для читателя. Достаточно лишь вспомнить относительное положение осей и плоскостей симметрии совокупности.

Табл. IX составлена по этим принципам. Она предлагает классификацию, аналогичную классификации Франкенгейма и отличающуюся только в пунктах, представляющих второстепенный интерес. Во втором столбце для уточнения граней каждой косой формы дана ссылка на столбцы таблиц предыдущего параграфа. Чтобы отличать друг от друга формы с одинаковым числом граней, но различного внешнего вида, к этому числу добавлена большая латинская буква. Приведем название всех этих форм;

48 — гексакисоктаэдр, тетраконтаоктаэдр;
24*A* — трапецоидикоситетраэдр;
24*B* — гексакистетраэдр;
24*C* — икоситетраэдр пентагональный;
24*D* — триакисоктаэдр и трапецоэдр;
24*E* — тетракисгексаэдр;
24*F* — дидодекаэдр;
16 — диоктаэдр;
12*A* — произвольная, еще не наблюдаемая фигура;
12*B* — триакистетраэдр и дельтоидодекаэдр;
12*C* — пентагональный додекаэдр, гемитетракисгексаэдр;
12*D* — ромбододекаэдр;
12*E* — биромбоэдр;
12*F* — скаленоэдр, метастатический;
12*G* — открытая форма, состоящая из 12-гранной пирамиды, ее можно назвать монакисдодекаэдром;
12*H* — форма, состоящая из двух дитриэдров с одной осью, которые объединены вместе; ее можно назвать тетратрискаленоэдром;
12*I* — форма, состоящая из двух правильных противолежащих шестеричных пирамид, повернутых одна относи-

тельно другой; ее можно назвать гексагональным трапецоэдром;

12K — бесконечная додекаэдрическая призма;

8A — правильный октаэдр;

8B — квадратооктаэдр;

8C — открытая форма, состоящая из 8-гранной пирамидки; ее можно назвать монакисоктаэдром;

8D — форма, состоящая из 8 косых равных треугольников; ее можно назвать тетрагональнымскаленоэдром;

8E — форма, состоящая из двух учетверенных правильных пирамидок, противолежащих, но не соответствующих друг другу; ее можно назвать тетрагональным трапецоэдром;

8F — бесконечная октаэдрическая призма;

8G — ромбооктаэдр;

6A — куб;

6B — ромбоэдр;

6C — дитриэдр;

6D — открытая форма, состоящая из неправильной ушестеренной пирамидки, образованной из двух правильных утроенных пирамидок с той же осью и теми же вершинами, грани которых объединены; ее можно назвать монакисгексаэдром;

6E — правильная ушестеренная пирамидка;

6F — тригональный трапецоэдр Науманна; эта форма состоит из двух правильных утроенных пирамидок, противолежащих друг другу на двух концах основной оси, но не соответствующих друг другу;

6G — правильная гексаэдрическая призма;

6H — неправильная, но симметричная гексаэдрическая призма;

4A — правильный тетраэдр;

4B — правильная учетверенная пирамидка;

4C — тетраэдр из равных равнобедренных треугольников;

4D — бесконечная квадратная призма;

4E — неправильная, но симметричная учетверенная пирамидка;

4F — тетраэдр из равных неправильных треугольников, сфеноид Науманна;

4G — бесконечная ромбоидальная призма;

3A — правильная тройная пирамидка;

3B — бесконечная треугольная призма;

2A — две параллельные грани;

2B — две пересекающиеся грани, косяк.

Изучение табл. IX показывает, что сокращенные формы не всегда свидетельствуют о мериэдрии кристалла. Например, во всех голоосных гемисимметричных кристаллах тричетверной, шестерной, четверной, тройной систем сокращенные формы такие, как если бы молекулярные многогранники были голоэдрическими. Только по косым формам можно с уверенностью определить голоэдрическую или гемиэдрическую симметрию данных многогранников. Без этих форм на образцах минералов можно со-

ставить только предварительное мнение о природе их молекулярной симметрии.

Ясно также, что некоторые формы появляются во всех формах мериэдрии одной и той же кристаллической системы и не могут дать понятия о структуре молекулы. Таковы, например, куб, ромбододекаэдр в тричетверной системе, призма с квадратным основанием в четверной системе. Вместе с тем весьма часто внимательное рассмотрение нормальных или ортопараллельных форм достаточно, чтобы узнать, является ли вещество голоэдрическим, мериэдрическим, тетартоэдрическим и т. д.

§ V. Примеры естественных мериэдрических кристаллов

Число мериэдрических кристаллов, открываемых нами в природе, непрерывно возрастает в последние 30 лет, т. е. со времени открытия мериэдрии профессором Вейсом. Возможно, что это число будет расти и дальше благодаря наблюдениям или внимательному исследованию более значительного числа уже известных образцов вещества. Оно также будет увеличено в результате изучения настолько разнообразных кристаллических соединений, насколько химии удастся их производить.

Первый образец изучаемого вещества не всегда способен вскрыть гемиэдрию молекулы; она может быть скрыта параллельными или нормальными формами, неспособными ее выявить. Однако несколько довольно четких случаев, в которых наблюдается регулярное исчезновение половины или трех четвертей граней, не учитывая случайных неудач, будет достаточным. Тогда с уверенностью можно причислить изучаемое вещество к списку мериэдрических. Рассмотрим главные случаи мериэдрии, известные на сегодня, указывая характеризующие их внешние признаки.

Табл. IX содержит полную сводку этих различных признаков и может служить руководством в этом беглом обзоре. Согласование между теорией и наблюдениями абсолютно безупречное.

Тричетверная система. Многогранник $[3L^2, 4L^3, C, 3P^2]$ — центрированный, гемиосный. Этот вид гемиэдрии свойствен следующим минералам: сульфиду железа, арсениду кобальта, арсеносульфиду кобальта (серый кобальт), арсеносульфиду никеля. Сурьмяный сульфид никеля обладает той же гемиэдрией вследствие изоморфизма мышьяка и сурьмы.

Эта группа характеризуется гемиэдрией формы $\{gh0\}$, которую дает пентагональный додекаэдр, и формы $\{ghk\}$, свойственной трапецоидикоситетраэдру. Это гемиэдрия с параллельными гранями, представляемая символом $\pi\ \{ghk\}$ в «Кристаллографии» Миллера. Исследование Бедана * установило принадлежность квасцов к этому классу.

Можно представить себе молекулярный многогранник образованным 12 вершинами, по четверо расположенными на трех плоскостях симметрии так, чтобы они образовывали три равных между собой прямоугольника.

---

* Annales de Chimie et Physique, 2e serie, t. VIII, p. 23.

Когда малая сторона прямоугольника равна большему отрезку большей стороны, разделенной в среднем и крайнем отношении, этот многогранник будет правильным икосаэдром. Стало быть, молекулярный многогранник с 12 атомами, расположенными в вершинах правильного икосаэдра, должен кристаллизоваться в гемиосной центрированной системе. То же справедливо для 20 атомов, расположенных в вершинах правильного додекаэдра, и т. д.

Многогранник $[3L^2,\ 4L^3,\ oC,\ 6P]$ — гемиосный, дихосимметричный. Эта группа содержит следующие природные соединения: сульфид цинка, арсенат железа (скородит), силикат висмута, серую медь, гельвин, борацит. Хлористая медь Cu^2Cl кристаллизуется в виде правильных тетраэдров; ее надо отнести к той же симметрии.

Данная группа характеризуется гемиэдрией октаэдра $\{111\}$, который заменяется правильным тетраэдром; $\{ggk\}$ заменяется триакистетраэдром; $\{ghk\}$ дает гексакистетраэдр. Это — гемиэдрия косых граней, обозначаемая Миллером $\varkappa\{ghk\}$. Наиболее простая молекула содержит 4 атома, расположенных в вершинах правильного тетраэдра.

Голоосная гемисимметрия соответствует недостатку симметрии, который можно обнаружить только на косых формах. Гемиосная гемисимметрия может быть представлена комбинацией двух видов гемиэдрии с параллельными и косыми гранями. Пока этот случай еще не встречался в природе.

Хотя и могут существовать гемиосные гемисимметричные кристаллы, которых мы еще не знаем, но мы зашли бы слишком далеко, если бы повторили слова Делафосса: «Никогда обе формы (правильный тетраэдр и пентагон-додекаэдр) не будут находиться вместе в ряду кристаллов, принадлежащих так называемым чистым видам, т. е. состоящих из одних и тех же молекул».*

Шестерная система. Эта система очень богата различными мериэдрическими формами, из которых до сих пор известны очень немногие.

Многогранник $[\Lambda^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP]$ — гемиосный, гемисимметричный первого рода. К этому виду гемиэдрии принадлежат кристаллы кварца. Их особая симметрия очень занимает минералогов. В качестве примера изучения мериэдрических кристаллов мы исследуем структуру молекулы кварца, руководствуясь данными Густава Розе, тщательно изучившего этот минерал.

Начнем с первой дисимметрии, заключающейся в том, что грань R (рис. 16), принадлежащая шестигранной верхушке, чаще всего больше развита и отличается большей гладкостью, чем две соседние r', r'. Стало быть, верхняя вершина разделена на две трехгранные верхушки. Если аналогичным образом разложить нижнюю верхушку, найдем, что грани верхней верхушки в той же кристаллической форме имеют соответствующие грани, которые им параллельны в нижней верхушке. Если O — центр кристалла;

* De la Structure des Cristaux. Thèse, Paris, 1840, p. 8.

OX, *OY*, *OT* — положительные половины трех двойных осей первого рода совокупности, то группа граней *g*, *g*, *g* правильной гексагональной призмы будет представлена через $\{01\bar{1}0\}$. Группа, образованная *R* и соответствующим ромбоэдром, будет иметь символ $\{01\bar{1}1\}$, и группа, образованная ромбоэдром *r'*, *r'*, — $\{10\bar{1}1\}$.

Наблюдения показывают, что если существуют другие ромбоэдры формы $\{og\bar{g}k\}$, то они сочетаются с им сопряженными $\{g\bar{g}ok\}$. Из этого становится очевидным, что $\{og\bar{g}k\}$ состоит из шести граней кварца.

Форма $\{og\bar{g}k\}$ сводится к ромбоэдру, представленному 6*B* (см. таблицу форм, стр. 239), и мы ищем в табл. IX соответствующий этому виду преобразования молекулярный многогранник. Получим три гипотетических варианта, сведенных в следующей таблице.

Симметрия молекулярного многогранника	$\{ghik\}$	$\{g, g\overline{2g}k\}$	$\{ghio\}$	$\{11\bar{2}0\}$
Λ^3, oL^2, *C*, o*P*	6*B*	6*B*	6*G*	6*G*
Λ^3, 3L^2, o*C*, o*P*	6*F*	6*C*	6*H*	3*B*
Λ^3, 3L^2, *C*, 3P^2	12*F*	12*E*	12*K*	6*G*

Изучение форм $\{ghik\}$, $\{g, g\overline{2g}k\}$, $\{ghio\}$, $\{11\bar{2}0\}$ поможет нам выбрать один из этих четырех вариантов.

Косая форма $\{ghik\}$ представлена на кварце шестью гранями трапецоэдра, такими как *x*, *x* (рис. 16). Эти грани расположены так, что образуют две тройные несоответствующие верхушки, относящиеся к категории 6*F*, таблицы на стр. 239.

Параллельная форма $\{gg\overline{2g}k\}$ при кристаллизации кварца представляет только грани ромбов *s*, *s*. Следуя Густаву Розе,* эти грани с символическим обозначением $\{11\bar{2}1\}$ всегда располагаются на двух концах одного вертикального ребра, но только на трех из шести. Эти ребра чередуются. Фигура, полученная объединением этих граней, будет дитриэдром 6*C*. Если закон чередования не соблюдается, то отмечается, что кристалл является двойником.

Форма $\{ghio\}$ имеет в кварце неправильную, но симметричную гексаэдрическую призму, которую образуют маленькие грани на каждой стороне трех вертикальных ребер, не несущих граней *s*, *s*. На нашем рисунке это те ребра, которые пересекаются с положительными окончаниями двойных осей первого рода. Наблюдавшаяся Г. Розе форма имела символ $\{6\bar{1}\bar{5}0\}$. В нашей общей номенклатуре кристаллических фор эта призма

* Poggendorff's Annalen, t. LXII, p. 331.

получит обозначение $6H$. Что касается формы $\{11\bar{2}0\}$, то она еще ни разу не наблюдалась на кристаллах кварца.

По этим различным свойствам мы узнаем, что символ молекулярной симметрии $[\Lambda^3, 3L^2, oC, oP]$. Стало быть, двойные оси OX, OY, OT принадлежат молекулярному многограннику и будут общими осями симметрии. Легко видеть, что, в самом деле, все грани расположены симметрично относительно этих осей.

Что касается вопроса о принадлежности этих прямых к осям первого рода или второго рода совокупности, то мы его отнесли к первому из этих двух родов на основании преобладания форм $g=\{10\bar{1}0\}$, $R=\{01\bar{1}1\}$, $r'= =\{10\bar{1}1\}$. Миллер обозначал мериэдрические формы кварца через $\alpha\{ghk\}$.

До сих пор я предполагал, что кварц кристаллизуется в шестерной системе; можно, однако, допустить, что он принадлежит к тройной системе. В этом случае OX, OY, OT — двойные оси единственного рода совокупности и рассмотрение форм сводится к многограннику $[\Lambda^3, 3L^2, oC, oP]$.

Форма $xx\ldots$, являющаяся тетартоэдрической по старой гипотезе, станет тогда мериэдрической формой тройной системы: формы $RR\ldots$, $r'r'r'\ldots$ и все ромбоэдры первого или второго рода станут голоэдрическими. Не существует категорических доводов, позволяющих предпочесть ту или иную точку зрения. Однако шестерная кристаллизация, которую я принял, более точно учитывает стремление кварца образовывать шестигранные верхушки, так же как и некоторые двойники посредством молекулярной гемитропии, на которой я остановлюсь в третьей части моей работы.

Чтобы наиболее просто построить молекулу кварца, учитывая симметрию $[\Lambda^3, 3L^2, oC, oP]$, возьмем прямую MM' (рис. 17), разделенную точкой X на два равных отрезка, где X находится на наименьшем от AOA' расстоянии. Повернем $OXMM'$ на 120° вокруг AA', так что MM' займет место NN' и OX — место OY; затем повернем еще один раз на 120°, так что MM' займет положение PP', а OX — положение OT; точки M, M', N, N', P, P' будут местами шести атомов молекулы; OX, OY, OT — двойными осями, а $A'A$ — тройной осью молекулярного многогранника. Когда молекула войдет в шестерную совокупность, центр ее фигуры совпадет с одним из узлов совокупности; AA' — с основной осью; наконец, прямые OX, OY, OT совпадут с двойными осями первого рода.

Это построение входит в одно из двух гипотез, предложенных Делафоссом* для объяснения дисимметрии кристаллизации кварца.

Многогранник $[\Lambda^6, oL^2, C, \Pi]$ — основной, гемиосный, центрированный. К этой группе принадлежит апатит. Исследуем данный вид мериэдрии.

1. Форма $\{ghio\}$ теряет половину своих граней, заменяется правильной гексагональной призмой, неправильно расположенной по отношению к двойным осям совокупности.

---

* Mémoires des Savants étrangers, t. VIII, p. 687.

2. Форма $\{ghik\}$ заменяется биромбоэдром, соответствующим предыдущей призме. Это гемиэдрия параллельных граней, и Миллер обозначил ее символом $\pi\{ghk\}$.

13 других случаев мериэдрии, входящих в шестерную систему, пока еще не встречаются в природе.

Четверная система. Многогранник $[\Lambda^4,\ oL^2,\ C,\ \Pi]$ — гемиосный, центрированный. К этому виду гемиэдрии принадлежат следующие вещества: кальциевый вольфрамат (шеелит), свинцовый вольфрамат, свинцовый молибдат (вульфенит), фергусонит.

В кристаллографии Г. Розе сюда добавлен гумбольдтилит. Эта группа характеризуется гемиэдрией форм $\{gho\}$ и $\{ghk\}$. Данная гемиэдрия с параллельными гранями в «Кристаллографии» Миллера обозначается через $\pi\{ghk\}$. В общем в четверной системе гемиэдрия параллельных граней косой формы $\{ghk\}$ достаточна для указания центрированной гемиосии. Во всех других группах мериэдрии этой системы гемиэдрия имеет место при косых гранях.

Многогранник $[\Lambda^2,\ 2L^2,\ oC,\ 2P']$ — гемиосный, дихосимметричный первого рода. Следуя Франкенгейму,* к этой группе принадлежит эдингтонит.

Многогранник $[\Lambda^2,\ 2L'^2,\ oC,\ 2P]$ — гемиосный, дихосимметричный второго рода. К этой группе принадлежит молекула медного колчедана с гемиэдрическими формами $\{gok\}$, $\{ghk\}$, которые его характеризуют. Если гемиосия будет первого рода, то гемиэдрия действует не на $\{gok\}$, но на $\{ggk\}$.

Параллельная форма $\{101\}$ преобладает в медном колчедане и дает октаэдр с квадратным основанием. Она часто бывает гемиэдрической и заменяется почти правильным тетраэдром из четырех равнобедренных треугольников.

Квадратооктаэдры, расположенные на углах примитивного ядра (примитивные формы Гаюи) с символом $\{ggk\}$, не гемиэдричны. Гемиэдричные и гемиосные дихосимметричные формы первого рода в «Кристаллографии» Миллера представлены символом $\varkappa\{ghk\}$ и те же формы второго рода — символом $\varkappa'\{ghk\}$.

Многогранник $[\Lambda^4,\ 2L^2,\ 2L'^2,\ oC,\ oP]$ — голоосный, гемисимметричный. По Франкенгейму,** к этой группе относится вернерит.

Другие мериэдрические формы четверной системы у кристаллических веществ еще не обнаружены.

Тройная система. В этой системе известно только два вида мериэдрии. Многогранник $[\Lambda^3,\ oL^2,\ C,\ oP]$ — гемиосный, центрированный. К этой группе, кажется, принадлежит кратонит и, по Франкенгейму, диоптаз.*** Этот вид гемиэдрии характеризуется тем, что две формы $\{ghik\}$, $\{go\bar{g}k\}$, не параллельные тройной оси, будут ромбоэдрами, а $\{ghio\}$, $\{11\bar{2}0\}$ — параллельные этой оси, будут правильными гексагональными призмами. В самом деле, известно, что в диоптазе две косые формы будут ромбоэд-

* Poggendorff's Annalen, t. LXII, p. 282.

** Там же.

*** Там же, p. 287.

рами с одной и той же основной осью. Второстепенные оси расположены неправильно. Призмы будут правильными и состоящими из шести граней.*

Если предположить, что кратонит в диоптаз кристаллизуются в шестерной системе, то эти вещества будут центрированными тетартоэдрическими и их формы также будут тетартоэдрическими.

Многогранник [Λ^3, oL^2, oC, 3P] — гемиосный, дихосимметричный. Этот вид симметрии наблюдается на турмалине, у которого все формы, кроме призмы {$11\bar{2}0$}, будут гемиэдричными. Две вершины кристалла дисимметричны. Формы верхней и нижней верхушек не повторяются. Нормальная форма {0001} тоже гемиэдрична, так что одна из вершин может горизонтально скалываться, а вторая — нет. Гемиэдрия турмалина характеризуется косыми гранями и в «Кристаллографии» Миллера обозначается символом $\varkappa${*ghk*}.

Наиболее простой тип молекулярного многогранника — это тетраэдр, в вершинах треугольного основания которого находятся три атома одного рода, тогда как четвертый атом будет равноудален от трех предыдущих.

Тридвойная система. Многогранник [Λ^2, oL^2, oC, P, P'] — гемиосный, дихосимметричный. Топаз и каламин обладают этим видом симметрии. Формы, параллельные оси Λ^2, будут {*gh*o}, {100}, {010} — единственными голоэдрическими; все остальные — мериэдрические. Отсюда следует, что противолежащие вершины дисимметричны и что грани, прилегающие к одной вершине, в общем не имеют соответствующих граней у противолежащей вершины. Это обстоятельство было уже рассмотрено для турмалина. Такая гемиэдрия с наклонными гранями в «Кристаллографии» Миллера обозначается символом σ{*ghk*}.

В качестве типа молекулярного многогранника можно взять вертикально поставленный равнобедренный треугольник, на концах отрезка основания которого находятся два атома одного рода, тогда как атом другого рода образует вершину.

Многогранник [Λ^2, L^2, L'^2, oC, oP] — голоосный, гемисимметричный. К этой группе принадлежат манганит, сульфат магния, сульфат цинка, сульфат никеля и т. д., так же как средний оксалат аммония,** битартраты аммония, сода, поташ,*** аспарагин, глюкозат морской соли и формиат стронция.**** Вероятно, список этих гемиэдрических солей впоследствии расширится.

Гемиэдрия сказывается только на косых формах {*ghk*}, которые из октаэдрических переходят в сфеноидные. Миллер обозначил эти формы с наклонными гранями через $\varkappa${*ghk*}. В этих кристаллах возле каждой грани находятся грани, соответствующие граням, расположенным возле противоположной вершины, но в обратном порядке. Так как три двойные

* Naumann. Elemente der Mineralogie, p. 47 et 382.

** La Provostaye. Annales de Chimie et de Physique, 3e serie, t. IV, p. 455.

*** Pasteur. Annales de Chimie et de Physique, t. XXIV, p. 455.

**** Там же, t. XXXI, p. 67.

оси совокупности существуют в молекулярном многограннике, то одну из них можно взять за основную и расположить вертикально. Та же неопределенность существует для тридвойных голоэдрических кристаллов.

В настоящем виде симметрии наиболее простой молекулярный многогранник состоит из четырех атомов одного рода, положение которых определяется следующим образом. Пусть прямая MM' (рис. 18) разделена пополам точкой X, причем расстояние OX между точкой и фиксированной прямой AOA' наименьшее. Повернем $OXMM'$ на 180° вокруг AA' так, что MM' займет место NN', а OX — место OX_1. Точки M, M', N, N' будут местом четырех атомов молекулы. Они образуют тетраэдр, составленный четырьмя равными треугольниками, или сфеноид, тремя двойными осями которого будут AOA', XOX_1 и прямая, проведенная через O нормально плоскости двух этих последних.

Если молекула входит в кристаллическую совокупность, то эти три двойные оси должны совпадать с тремя двойными осями совокупности. Этот вид образования имеет много общего с тем, который мы описали на стр. 242 для молекулы кварца.

Двойная система. Многогранник [Λ^2, оC, оP] — голоосный, гемисимметричный. В этой группе находится весьма большое число органических веществ: винная кислота, кристаллический сахар, средняя аммонийная соль винной кислоты,* средняя калиевая соль винной кислоты, двойная калийаммониевая соль винной кислоты, двойная соль натрия и аммония винной кислоты, двойная соль калия и натрия винной кислоты. Сюда же, вероятно, относится много других солей или органических кислот.

Этот вид гемиэдрии приводит к дисимметрии вершин.

Формы $\{ghi\text{o}\}$, параллельные Λ^2, остаются голоэдрическими. Вместе с тем всякая система граней, расположенная на одном из окончаний оси этой зоны, может отличаться от системы граней, расположенных на другом конце. Верхнее усечение {0001} может не воспроизводиться на нижней вершине. Эти гемиэдрические формы в «Кристаллографии» Миллера получили символическое обозначение $\sigma\ \{ghk\}$.

Наиболее простым молекулярным типом является квадриатомный. Можно применить ранее использованный метод его построения, где M, M' (рис. 18) — атомы разных родов или неодинаково удаленные от X; AA' — единственная ось симметрии полученного тетраэдра.

Асимметричная система. Гемиэдрия в асимметричной системе заключается в том, что грани, в общем, не будут сопровождаться параллельными им гранями. Это исчезновение параллельных граней не должно расцениваться как случайное несовершенство. Я не знаю наблюдений, из которых можно было бы заключить, что молекулярный многогранник [оL, оC, оP] встречается в кристаллических веществах. Некоторые минералоги** думают, что аксинит принадлежит к этой группе. Однако это мнение основывается на пироэлектрических свойствах данного вещества.

* Там же, 3^e^ serie, t. XXIV, p. 444.
** Frankenheim. Poggendorff's Annalen, t. LVI, p. 178.





ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

О ДВОЙНИКАХ И ГЕМИТРОПИЯХ

§ I. О двойниках кристаллов, как следствии молекулярной гемитропии

Допустим, что молекулы одного рода правильно группируются и кристаллизуются в определенной системе. Построим геометрическую совокупность линий, соединяющих центры тяжести этих молекул. Через один из узлов, который назовем Σ, проведем оси и плоскости симметрии совокупности, образуя временно неподвижную систему, обозначенную A.

Молекула, центр которой закреплен в Σ, обладает некоторыми элементами симметрии S_c, которые являются общими с совокупностью. Если кристалл мериэдрический, то существуют другие элементы, обозначенные S_a и принадлежащие исключительно совокупности.

Так как центр молекулы закреплен в Σ, то она будет поворачиваться вокруг этой точки до тех пор, пока ее элементы симметрии S_c не совпадут с гомологичными элементами в кристаллической совокупности. Зададим вопрос: может ли это совпадение осуществиться только единственным способом или существует два или множество действительно различных способов совпадения, т. е. таких, когда месторасположения вершин молекулярного многогранника вокруг Σ будут различными.

Чтобы обнаружить это, закрепим многогранник в первом положении, обозначенном A и реализующем только что указанные условия совпадения. Затем, оставив неподвижным многогранник, повернем совокупность вокруг Σ, последовательно сообщая ей все вращения, ведущие ее к самосовпадению. Пусть A' — одно из новых положений, полученных таким образом. При переходе от A к A' положения молекул остались без изменения, и, следовательно, молекулярное равновесие сохраняется таким же, как до, так и после вращения. Вернем теперь совокупность в исходное положение обратным вращением вокруг Σ, вращением, в котором будут теперь участвовать все молекулярные многогранники, связанные в этом случае с совокупностью. После того как это вращение будет осуществлено, молекулярное равновесие не нарушится и центры молекул снова совпадут с теми узлами совокупности, которые они занимали в положении A. Од-

нако каждый молекулярный многогранник и, в частности тот, центр которого находится в p, будет иметь по отношению к абсолютному пространству новое положение p'. Речь идет о том, чтобы узнать, является ли оно отличным от положения p.

Ось L^q, вокруг которой совершались эти два последовательно-противоположных вращения, несомненно, является осью симметрии совокупности, обозначенной символом $[S_c S_a]$.

Если эта ось является одним из этих элементов симметрии S_c, т. е. осью порядка q молекулярного многогранника, то поворот на $\frac{360°}{q}$ или одну из кратных ему дуг снова приведет вершины многогранника на те же самые места. Следовательно, два многогранника p и p' будут палагаться друг на друга и не обнаружится нового способа самосовпадения многогранника относительно осей и плоскостей неподвижной совокупности.

Если же, наоборот, ось L^q является одним из элементов симметрии S_a, т. е. одной из осей, названных «недостающими осями» совокупности, то она больше не входит в элементы симметрии молекулярного многогранника. Отсюда следует, что приведение совокупности в первоначальное положение из A' в A поворачивает многогранник вокруг прямой, не являющейся осью его симметрии. Он не займет того же положения в пространстве. Из этого вытекает следующая **теорема**:

чтобы получить различные способы расположения молекулярного многогранника по отношению к осям совокупности, необходимо, исходя из возможных положений этого многогранника, последовательно вращать его вокруг недостающих осей совокупности.

Следует отметить, что часть решений, полученных таким образом, может совпадать друг с другом. Чтобы найти существенно различные решения, поступим следующим образом.

Пусть s — некоторая вершина молекулярного многогранника, а s', s'',. . . — гомологичные ей вершины по отношению к элементам симметрии S_c. Эти вершины всегда можно рассматривать как полюса некоторой мериэдрической формы $\mu\{ghk\}$, соответствующей заданному многограннику. Ее характеристики ghk выбраны с таким расчетом, что полюс (ghk) совпадает с s, полюса граней, идентичных (ghk), совпадают с s', s'',. . . Способ перехода от одной части к другой является одним и тем же. Каждый раз при вращении на 180° формы $\mu\{ghk\}$ вокруг одной из недостающих двойных осей системы получаем одну из форм, сопряженных с $\mu\{ghk\}$ (см. стр. 226, 227). Полюса этой формы представляют положения, занятые в пространстве системой вершин s, s', s''. . . после полуоборота многогранника p вокруг двойной оси. Сказанное относительно одной единственной системы гомологичных вершин многогранника p применимо ко всем другим системам гомологичных вершин, которые мог бы иметь многогранник p. Отсюда видно, что каждой сопряженной форме соответствует свое положение многогранника p. В итоге можно сформулировать следующую **теорему**.

Количество существенно различных положений, которые может занимать молекулярный многогранник по отношению к совокупности, не изменяя в ней структуры и не нарушая равновесия, равно числу сопряженных форм, которыми обладает некоторая косая форма μ $\{ghk\}$, соответствующая симметрии этого многогранника, плюс единица.

Если многогранник является голоосным, он может занять лишь единственное положение p. Если многогранник гемиосный, то он может занять два различных положения p и p'. Тетартоосные многогранники могут располагаться по отношению к совокупности четырьмя различными способами в зависимости от положения p, p', p'', p'''.

Последний случай может представиться только для молекулярных многогранников формы [Λ^3, oL^2, oC, oP или Π, или $3P$], кристаллизующейся в шестерной системе. Поворот такого многогранника на 180° вокруг основной оси совокупности приводит его в положение p'. Поворот на 180° вокруг одной из осей $3L^2$ совокупности дает положение p''. Наконец, вращая его на 180° вокруг одной из осей $3L'^2$, получим p'''.

Я рассматриваю эти положения в чисто теоретическом отношении, ибо ни одна тетартоосная кристаллизация в природе еще не наблюдалась, если только не предположить, что турмалин и кратонит принадлежат шестерной системе.

Итак, ограничимся рассмотрением гемиосных многогранников, которые могут ориентироваться двумя различными способами по отношению к неподвижным узлам совокупности.

Представим, что во всей правой части гемиосного кристалла молекулы заняли положение p; во всей этой части пространства гомологичные линии молекул параллельны между собой. Представим также, что во всей левой части молекулы приняли положение p'. Гомологичные линии молекул в этой части кристалла не будут уже параллельны гомологичным линиям молекул первой части. Другими словами, молекула системы p, перенесенная параллельно самой себе в центр на молекулу системы p', не совпадет с ней вершинами. Условия общего строения правильно окристаллизованных тел окажутся здесь несостоятельными. Такое объединение двух систем молекул p и p' должно рассматриваться как сочленение двух различных кристаллов, взаимно проникающих друг в друга.

Важно отметить, что в таком двойнике все оси и плоскости симметрии совокупности и, вообще, все кристаллографические линии проходят без разрыва из одного конца кристалла в другой.

Я назову такой феномен д в о й н и к о м по закону молекулярной гемитропии. Это название точно отражает явления, происходящие внутри кристалла. Термин гемитропия принят исходя из того обстоятельства, что многогранник в положении p' можно всегда получить из многогранника в положении p вращением на 180° вокруг одной, соответственно выбранной оси совокупности. Последнее вытекает из общего замечания (стр. 225), согласно которому всегда существуют двойные оси недостающей симметрии не голоосного молекулярного многогранника.

Воспользуемся следующими символами для обозначения разновидностей только что рассмотренного взаимного проникновения. Пусть μ $\{ghk\}$ — мериэдрическая форма той части кристалла, в которой находятся молекулярные многогранники положения p. Сопряженная с ней форма μ' $\{ghk\}$ должна появляться в противоположной части кристалла, ибо эта форма происходит из предыдущей при таком вращении на 180°, которое переводит p в p'. Две гемиосные сопряженные формы μ ($\{ghk\}$ и μ' $\{ghk\}$, сросшиеся одна правой, а другая левой стороной кристалла, будут параллельны чередующимся граням голоосной формы $\{ghk\}$, как если бы левая часть кристалла произошла из правой путем поворота на 180° вокруг одной из недостающих двойных осей системы.

Посмотрим, как наблюдения, описанные в кристаллографических работах, согласуются с таким законом срастания кристаллов.

Многогранник $[3L^2, 4\,L^3, C, \ 3P^2]$. Его недостающей симметрией является $[3L^{2\cdot 2}, 6L'^2, 6P]$, отсюда видно, что исходный многогранник p порождает p' или вращением на 90° вокруг одной из четверных осей совокупности, или вращением на 180° вокруг одной из двойных осей, или, наконец, отражением в одной из плоскостей $6P$.

Ограничимся способом гемитропии, которого достаточно для объяснения явления.

Когда два кристалла этой природы двойникуются посредством молекулярной гемитропии, два гемитетракисгексаэдра одного рода, характеризующие гемиэдрию двух срастающихся кристаллов, параллельны попеременным граням голоэдрической формы $\{g\hbar o\}$. Этот случай представлен пиритом (см.: Миллер. Кристаллография). Пример такого двойника у меня перед глазами.

Многогранник $[3L^2, \ 4L^3, \ oC, \ 6P]$. Недостающая симметрия выражается символом $[3L^{2\cdot 2}, \ 6L^2, \ C, \ 3P^2]$. Отсюда видно, что многогранник p' может получиться из p или вращением на 90° вокруг одной из четверных осей совокупности, или вращением на 180° вокруг одной из шести двойных осей, или отражением в центре C, или отражением в одной из трех плоскостей симметрии $3P^2$.

Мы ограничимся рассмотрением вида многогранника, порождаемого гемитропией. Когда такой кристалл обладает молекулярной гемитропией, гемиосные дихосимметричные формы (тетраэдр, триакистетраэдр и т. д.) сочленяются попарно параллельными гранями. Такой пример приводит Миллер для кристалла алмаза (см.: «Кристаллография»). Такими бывают кристаллы серой меди, изображенные Дюфренуа (Атлас минералогии, CXXIV, рис. 442).

Многогранник $[\Lambda^3, \ 3L^2, \ oC, \ oP]$. Недостающими осями этого многогранника являются $[\Lambda^{3\cdot 2}, \ 3L'^2]$. Отсюда видно, что многогранник p' можно получить из p или вращением на 60 или 180° вокруг основной оси, или вращением на 180° вокруг одной из осей L'^2.

Из этих трех видов наиболее простым является полуповорот вокруг тройной оси молекулярного многогранника.

Этот вид гемитропии достаточно часто встречается в кварце, и особо в двойниках кварца из *Jéricksan*,* где одна половина кристалла кажется повернутой на 180° вокруг основной оси второй половины.

Для объяснения природы гемитропии приведен рис. 19, изображающий ретикулярную плоскость совокупности молекул кварца, нормальную тройной оси. Вправо от пунктирной линии $\alpha\beta\gamma\delta$ все молекулы расположены в положении p. Из шести атомов молекулы, предполагаемой шестиатомной, три, расположенные ниже плоскости рисунка, изображены концами стрелок. Оставшиеся три атома, расположенные выше плоскости рисунка, находятся на противоположных концах стрелок. Влево от $\alpha\beta\gamma\delta$ молекулы находятся в положении p'. Ряды, образующие сетку, представлены системами прямых, пересекающихся под углом в 60° в каждом из узлов сетки. В части p эти ряды даны сплошными линиями, а в части p' — пунктирными. Ряды не прерываются, несмотря на гемитропию молекул, расположенных по ту сторону $\alpha\beta\gamma\delta$. То же справедливо для рядов, не расположенных в плоскости рисунка, а пересекающих наклонно эту плоскость в нисходящем или восходящем направлениях. Линия $\alpha\beta\gamma\delta$ может быть произвольной.

Следует обратить внимание на то, что рост кристалла происходит последовательным наложением слоев параллельно трем сторонам треугольной клетки сетки. Поэтому можно предположить, что чаще всего эта линия будет расчленяться на кусочки, последовательно параллельные этим сторонам. На основе всего вышесказанного предполагаем, что молекула кварца кристаллизовалась в шестерной системе. Физики придерживаются мнения, что ядром кварца является ромбоэдр. Посмотрим, может ли то же самое объяснение быть применимо к гипотезе о тройной кристаллизации. В этом случае кварц становится голоосным кристаллом. Молекулярная гемитропия приводит к разрыву рядов совокупности на разделяющей поверхности, которая по одну сторону имеет молекулы положения p, а по другую — молекулы положения p'. Эта прерывистость не затрагивает ряды, расположенные в плоскости, нормальной главной оси, но имеет место для всех косых рядов. Мне кажется наиболее вероятным, что в двойниках кварца ряды не имеют разрывов на границе между сросшимися кристаллами. В самом деле, они очень тесно срастаются, тенденция к спайности очень мала по соединяющему их шву. Аналогия этой структуры с двойниками других гемиосных кристаллов и с инверсионными двойниками (о них будет сказано ниже) так велика, что без колебаний кварц можно отнести к гемиосным кристаллам шестерной системы.**

Исходя из этого (гемиосия молекулярного многогранника), результаты экспериментов Савара на кварце весьма удовлетворительны.

Многогранник $[\Lambda^6, oL^2, C, \Pi]$. Недостающие оси этого многогранника можно выразить символом $[3L^2, 3L'^2]$. Отсюда видно, что многогранник

* Gustave Rose. Poggendorff's Annalen, t. LXII, p. 333.

** Порядок преобладания граней согласуется с этим результатом.

в положении p порождает многогранник в положении p' вращением на 180° вокруг одной из шести двойных осей совокупности. Когда такой кристалл двойникуется сам с собой вследствие молекулярной гемитропии, то одна половина кажется полученной из другой поворотом на 180° вокруг одной из двойных осей.

Я не знаю примера такой гемитропии, но возможно, что ее можно наблюдать, например, на кристаллах апатита.

Многогранник [Λ^4, оL^2, C, Π]. Недостающие оси такого многогранника представлены в виде [$2L^2$, $2L'^2$]. Отсюда видно, что p' можно получить из p поворотом на 180° вокруг одной из двойных осей четверной системы. Вторая половина кристалла кажется совпадающей с тем положением, которое занимает первая половина после поворота на 180° вокруг прямой, нормальной одной из граней (100), (010), (110), ($1\bar{1}0$). Этот вид гемитропии встречается на кристаллах кальциевого шеелина (см.: Миллер. Кристаллография. № 246).

Многогранник [Λ^2, $2L'^2$, оC, $2P$]. Его недостающие оси обозначены символом [$\Lambda^{2 \cdot 2}$, $2L^2$]. Отсюда следует, что p' может быть получен из p двумя различными способами: или вращением на 90° вокруг главной оси, или вращением на 180° вокруг одной из двойных осей первого рода, т. е. вокруг одной из двух недостающих осей совокупности.

Примером такого вида гемитропии является пиритная медь. Вторая половина кристалла кажется идентичной первой, повернутой на 180° вокруг оси, нормальной граням той из двух призм с квадратным основанием, которая увенчана гемиэдрической верхушкой, т. е. вокруг оси, нормальной грани (100) или (010) (см.: Миллер. Кристаллография. № 245).

Многогранники [Λ^3, оL^2, C, оP] и [Λ^3, оL^2, оC, $3P$]. Эти многогранники представляют молекулу кретонита или турмалина (см. стр. 245). Эти вещества кристаллизуются в тройной системе. Их недостающая симметрия (по осям) представлена символом [$3L^2$]. Отсюда ясно, что p' совмещается с p вращением на 180° вокруг одной из двойных осей совокупности. Не известен пример такой гемитропии, но возможно, что она встретится в турмалине.

Многогранник [Λ^2, оL^2, оC, P, P']. Его недостающие оси имеют символ [L^2, L'^2]. Положение p' совмещается с p поворотом на 180° вокруг одной из двух недостающих осей совокупности. Можно считать, что вторая половина сдвойникованного кристалла получается из первой поворотом на 180° вокруг одной из этих двух осей. Дюфренуа* упоминает двойник каламина, обладающий указанной выше симметрией.

Многогранники [Λ^2, L^2, L'^2, оC, оP] или [Λ^2, оC, оP] голоосны и не могут двойниковаться посредством молекулярной гемитропии.

Только что изложенная теория удовлетворительно объясняет случаи гемитропии, исследование которых оставалось вне возможностей минералогов.

---

* Traité de Minéralogie, t. II, p. 607.

§ II. Кристаллы, сдвойникованные молекулярной инверсией

Как видно (см. предыдущий параграф), в одной и той же кристаллической совокупности молекулы кристаллизованного вещества можно расположить двумя различными способами (молекулярные многогранники — гемиосные). Условия равновесия при этом не изменяются, используются одни и те же молекулы.

В некоторых случаях можно получить двойное решение для молекулярного равновесия при сохранении совокупности. На этот раз надо использовать молекулы, не наложимые с исходными, но идентичные с ними.

Пусть p — молекулярный многогранник, а ему обратный π получен соединением каждой вершины или атома p с центром тяжести и продолжением этих прямых на то же расстояние в противоположную сторону. От p к π можно перейти соответствующим вращением, и тогда p и π будут одной и той же молекулой, по-разному ориентированной. И наоборот, молекулы p и π будут существенно различны, хотя взаимное расположение их атомов идентично. Их нельзя свести друг к другу никаким вращением.

Первый вариант реализуется для центрированных или дихосимметричных многогранников, т. е. при наличии или центра, или плоскости симметрии. Многогранник всегда может совместиться с обратным ему. Второй вариант наблюдается во всех тех случаях, когда многогранник p — гемисимметричный.

В голоосных гемисимметричных кристаллах положению p соответствует единственное положение π.

Для гемиосных гемисимметричных кристаллов положениям p и p' соответствуют два положения π и π' обратных молекул.

Для тетартоосных гемисимметричных кристаллов положениям p, p', p'', p''' первоначального или прямого многогранника отвечают положения π, π', π'', π''' обратного многогранника.

Пусть правая часть гемисимметричного кристалла образована молекулой формы p, а всякая левая часть — обратными молекулами формы π. Более того, пусть π происходит из p операцией инверсии, осуществляемой центром C или плоскостью P. Если в этих полукристаллах сравнивать гомологичные части относительно центра или плоскости симметрии, то видно, что гомологичные линии двух половинок совокупности расположены зеркально по отношению к центру или плоскости. Это наблюдается в силу того, что центр или плоскость симметрии являются элементами симметрии совокупности. Гомологичные линии молекул p и π удовлетворяют, по построению, тем же условиям. Следовательно, равновесие не нарушится в каждой половине кристалла. Стало быть, можно подогнать два кристалла молекул p и π так тесно, что ряды одного кристалла будут точно служить продолжением рядов другого. Оси и плоскости симметрии переходят из одного кристалла в другой без разрывов. Совокупность остается единственной, если мысленно свести все молекулы в их центры.

Этот частный случай срастания можно назвать двойникованием с помощью молекулярной инверсии в отличие от двойникования с помощью молекулярной гемитропии. Взаимное проникновение двух кристаллов одинаково близкое как в одном, так и в другом случае.

Однако между ними существует большое физическое различие. Двойникование с помощью инверсии предполагает, что кристаллизационная среда содержит молекулярные многогранники двух видов — прямые и обратные. Если только одна из этих разновидностей существует в морской воде, то инверсионное двойникование невозможно. Если же оба вида многогранников сосуществуют в почти равных количествах, то инверсионное двойникование наблюдается на большинстве образующихся кристаллов.

Исходя из этой точки зрения, рассмотрим гемисимметричные кристаллы, принадлежащие трем видам молекулярных многогранников.

Многогранник [Λ^3, $3L^2$, оC, оP] соответствует молекуле кварца. Обратный ему многогранник π может быть получен из p с помощью недостающих элементов [C, Π]. Из него можно получить многогранник π', обратный многограннику p', сопряженному с p с помощью недостающих элементов симметрии [$3P$, $3P'$]. Обратимся к рис. 17: $MNPM'N'P'$ — исходный многогранник p. Построим прямую mXm', симметричную MXM' по отношению к плоскости AOX, которая является одной из плоскостей $3P'$. Повернем этот многогранник на 120 и 240° вокруг AOA'. Окончания m, m' дадут один из двух обратных многогранников: многогранник π^1 — обратный многограннику p и π — многогранник, обратный тому же многограннику p, полученный поворотом на 180° вокруг AOA'.

Пусть два кристалла кварца, один с молекулой в форме p, другой — в форме π, начинают срастаться. Если первая половина занимает положение граней, указанное на рис. 16, то во второй половине наблюдается перевернутое положение. На ней существуют те же грани в том же порядке, но вместо поворота вокруг главной оси XYT надо двигаться в направлении XTY. В одном из этих случаев верхняя грань x будет расположена влево от вертикального ребра, к которому она примыкает, а во втором случае — справа.

Это различие Г. Розе использовал для разделения кварца на левый и правый.

Объединение этих видов кварца порождает инверсионный двойник. Для изучения таких двойников используется поляризация света. С помощью чувствительной аппаратуры выяснено, что поверхность, разделяющая два кристалла, состоит из зубчатого соединения плоскостей, параллельных наиболее привычным граням шестигранной верхушки. На рис. 16 изображен левый кварц (у физиков — левоосный кристалл).

В кварце чаще встречается инверсионное двойникование, чем двойникование вследствие гемитропии. Это единственный известный кристалл, который может двойниковаться в обоих вариантах, будучи одновременно гемиосным и гемисимметричным.

Многогранники [Λ^2, L^2, L'^2, oC, oP] и [Λ^2, oC, oP]. Инверсионное двойникование кристаллов, принадлежащих этим двум группам, до сих пор слабо изучено. В некоторых случаях двойникование осуществляется, так как атомы молекулы стремятся расположиться одинаково. Это имеет место, например, в кристаллическом сахаре, мериэдрия которого всегда носит один и тот же характер. Обратное расположение гемиэдричных граней в нем никогда не наблюдается.

В других случаях молекулы двух сортов перемешаны в морской воде. Однако процесс кристаллизации разъединяет эти молекулы. В итоге образуются кристаллы одного рода и кристаллы второго рода. Эти интересные факты обнаружены Пастером.

§ III. Ретикулярная гемитропия

Название ретикулярная гемитропия указывает на то, что вся совокупность вместе с сеткой и молекулярными многогранниками поворачивается на 180°. Ранее мы исследовали просто молекулу, состоящую из объединения двух кристаллов одного рода по двум их плоским граням.

Здесь нет, как в ранее рассмотренных случаях, зубчатого проникновения частей. Это — плотная пригонка со сращением: оси и гомологичные линии двух совокупностей, объединенных таким образом, не являются более продолжением одни других. Плотная пригонка может произойти только в том случае, когда контактирующие грани подобны, т. е. принадлежат форме с одним и тем же обозначением и их сетки совпадают узел в узел. Пусть две ретикулярные плоскости приведены таким образом в совпадение. Ясно, что всегда можно получить второй способ совпадения их сеток, поворачивая одну из совокупностей на 180° вокруг прямой, нормальной плоскости сочленения и проходящей через один из узлов, общих двум наложенным сеткам.

Если в одном случае совокупности являются продолжением одна другой, то во втором случае эти же совокупности являются геометрически симметричными по отношению к плоскости сочленения. Наоборот, если совокупности оказываются симметричными, то перевертывание одной из них порождает идентичную ориентацию как бы двух половин одной и той той же совокупности.

Если плоскость сочленения является плоскостью симметрии совокупности, то эти два способа объединения совпадают и совокупности являются продолжением одна другой.

Если два кристалла симметричны по отношению к общему основанию, то имеется гемитропия. Во избежание путаницы следует добавить слово ретикулярная.

Плоскость $ABCDEG$ (рис. 20) с параллельными рядами aA, bB, cC, dD,. . . носит название плоскости гемитропии. Нормаль к этой плоскости, проведенная через один из узлов A, B, C, D,. . ., назы-

вается о с ь ю г е м и т р о п и и. В общем эта прямая не является ни осью симметрии, ни молекулярным рядом. В силу этого мы не будем рассматривать оси гемитропии, так как это не вредит изложению фактов.

Проведем теперь, начиная от $A, B, C, D, \ldots$, прямые $Aa', Bb', Cc', \ldots$, симметричные Aa, Bb, Cc, $Dd, \ldots$. Ясно, что на этих новых рядах мы можем построить совокупность, геометрически симметричную предыдущей. Их условия равновесия будут идентичными.

Гаюи совершенно правильно заметил, что это явление можно представить геометрически, предполагая, что одна из половин совокупности поворачивается вокруг оси гемитропии. Однако ясно, что это движение — фиктивное и что молекулярная ориентация симметрична по отношению к плоскости гемитропии.

В природе две наложенные сетки несут молекулы в каждом своем узле. Следовательно, строгое совпадение невозможно. Одна сетка ограничивает верхнюю часть нижнего кристалла, другая — является нижним основанием верхнего кристалла. Они расположены параллельно с параллельными узлами на расстоянии, которое зависит от сил их взаимного притяжения. В каждой из сеток молекулы имеют ту ориентацию, которая свойственна их совокупности.

Из вышесказанного следует, что плоскость гемитропии может быть некоторой гранью кристалла. Для объяснения явления предполагаем, что плоскость гемитропии существовала в качестве грани-предела в какой-то период кристаллизации. Возможность быть гранью-пределом далека от того, чтобы быть гранью-пределом для всех ретикулярных плоскостей. Она зависит от плотности сетки. Следовательно, плоскость гемитропии будет почти всегда гранью с простым символом, принадлежащей нормальной или параллельной форме, но редко косой форме. Последовательно рассмотрим эти три случая.

Плоскость гемитропии принадлежит нормальной форме. Если плоскость гемитропии нормальна оси четного порядка, то она параллельна плоскости симметрии совокупности. Тогда два кристалла (об этом мы уже говорили) могут рассматриваться как один кристалл с молекулярными рядами, проходящими без разрывов из одного в другой. В этом случае возможно появление только молекулярной гемитропии, что произойдет, если молекула гемиосна. Однако даже в случае голоосных кристаллов срастание внешне обнаруживает себя появлением входящих двугранных углов, опирающихся на контур грани, служащей плоскостью гемитропии. Это наблюдается на кристаллах самородной меди, соединяющихся по граням ромбододекаэдра, нормальным, как известно, шести двойным осям системы. Срастание кристаллов снега образуется, по-видимому, по аналогичному закону. Срастание может быть распознано по штриховке, наблюдаемой, например, на ортозе и мезолите в гемитропии этого вида. Если плоскость симметрии нормальна оси симметрии нечетного порядка, т. е. тройной оси, то можно себе представить, что нижняя половина кристалла повернута не

на 180, а на 60° вокруг тройной оси. Конечный результат этих поворотов один и тот же. Гаюи назвал этот вид гемитропии перестановкой. Он часто встречается в кристаллах тройной и тричетверной систем.

Кристалл, порожденный многогранником [Λ^3, оL^2, оC, $3P$ или $3P'$] с гемитропией, нормальной тройной оси, подобен кристаллу, порожденному молекулярным многогранником [Λ^3, $3L'^2$ или $3L^2$, оC, Π, $3P$ или $3P'$]. При тех же обстоятельствах многогранник [Λ^3, оL^2, оC, оP] приобретает вид многогранника [Λ^3, оL^2, оC, Π]. Наблюдатель должен быть к этому готов. Такие виды гемитропии выявляются или с помощью входящих углов, или штриховки, пересекающей грани зоны {ghio}, которая разделяет верхнюю и нижнюю вершины. При отсутствии этих признаков помощь оказывает изучение некоторого числа образцов, что позволяет отнести кристалл к категории гемитропных или, в противоположном случае, к кристаллам тройной системы, если отмеченное расположение чисто случайное.

Плоскость гемитропии принадлежит ортопараллельной форме. В тричетверной системе плоскости гемитропии всегда параллельны четверным или двойным осям.

Если эти плоскости перпендикулярны тройной оси, то в шестерной и в тройной системах они параллельны одной из трех осей двойной симметрии. Например, кварц: либо плоскость гемитропии является одной из граней правильной гексагональной призмы, либо она параллельна одной из граней начального ромбоэдра.

То же справедливо для четверной системы. Плоскость гемитропии параллельна одной из граней октаэдров первого или второго рода. Например: окись олова, рутил, гаусманит.

Тот же закон наблюдается на кристаллах тридвойной системы. Плоскость гемитропии параллельна одной из двойных осей. Например: углекислый свинец, арагонит, марганит, фожазит.

Во всех этих системах не известны примеры срастания по граням косой формы {ghk}.

В двойной системе почти все известные плоскости гемитропии принадлежат граням зоны {ghio}, которая параллельна двойной оси системы. Примеры: сернокислая известь, ортоз, пироксен, арсенопирит, углекислая медь, эпидот, сфен, вокелинит.

Плоскость гемитропии принадлежит косой форме. Этот вид гемитропии характерен только для кристаллов асимметричной системы: дистена, анортита, альбита. Однако для кристалла двойной системы — ортоза — известен случай, когда плоскость гемитропии параллельна грани с обозначением $e^{\frac{1}{2}}$. Это часто видно в кристаллах Бавено.*

Данные объяснения распространяются на подавляющее большинство наблюдаемых случаев гемитропии. Остается лишь несколько странных

---

* Dufrénoy. Traité de Mineralogie, t. III, p. 346.

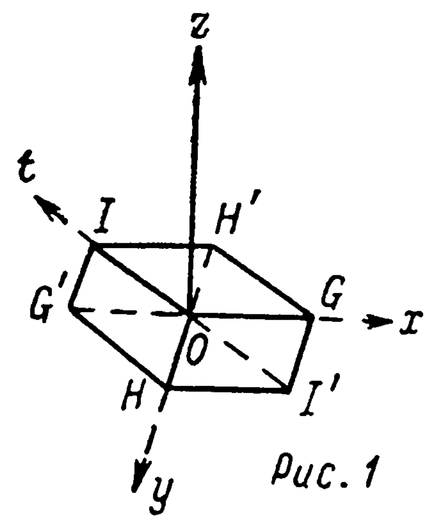


Рис. 1

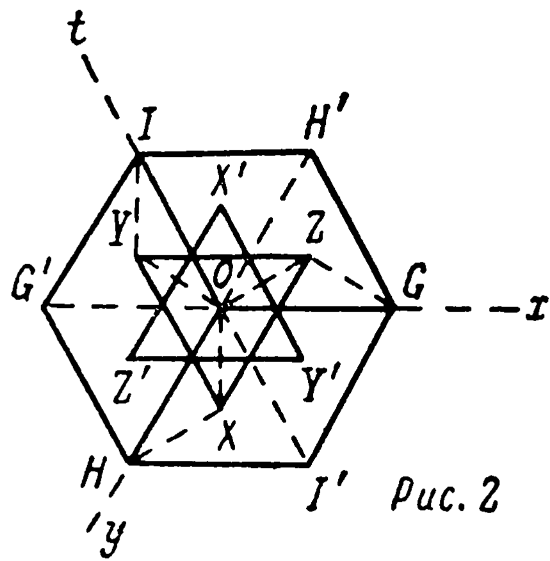


Рис. 2

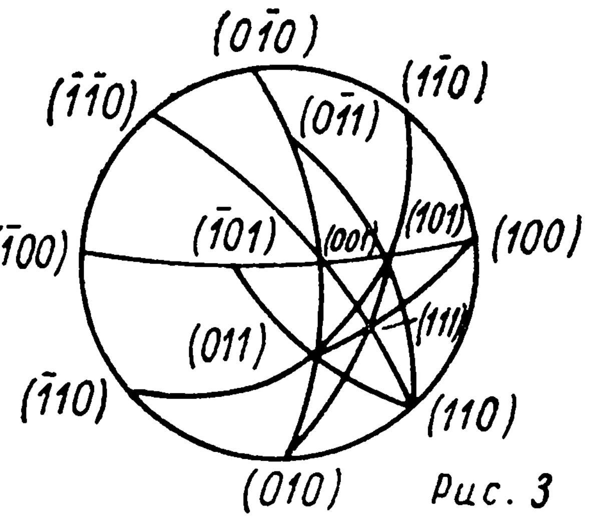


Рис. 3

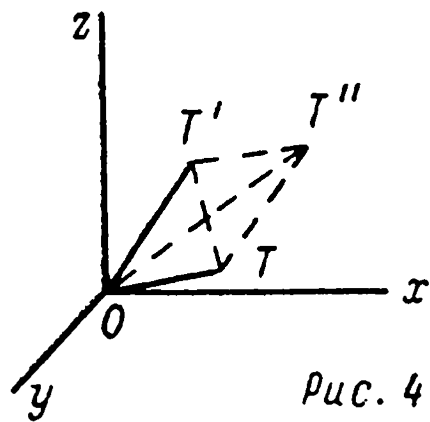


Рис. 4

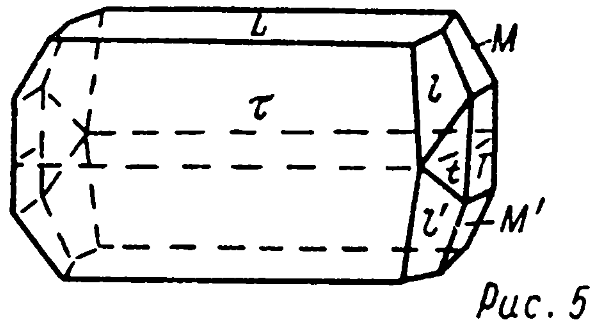


Рис. 5

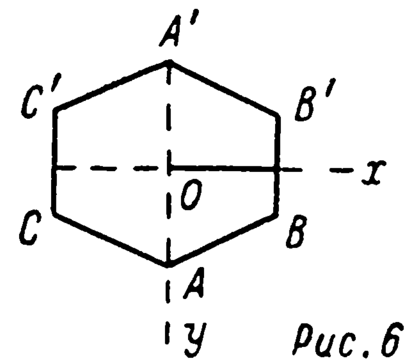
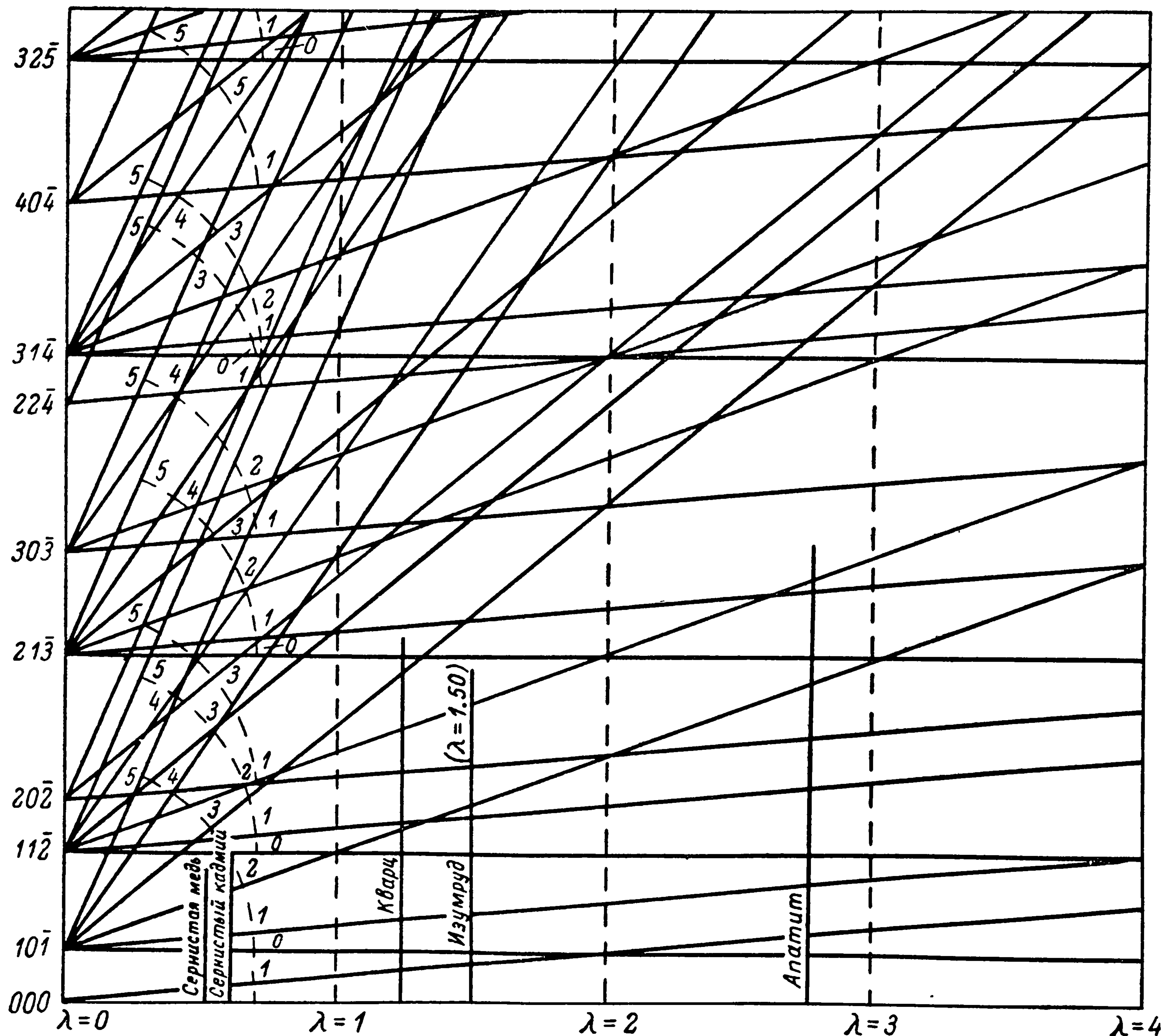


Рис. 6



Номограмма кристаллических форм шестерной системы

Рис. 7

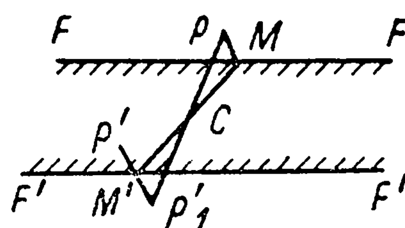


Рис. 8

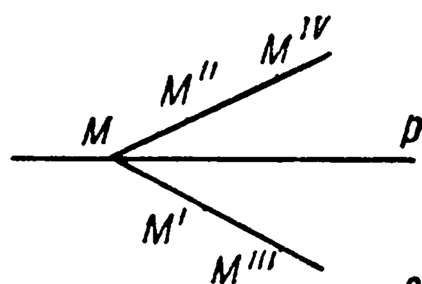


Рис. 9

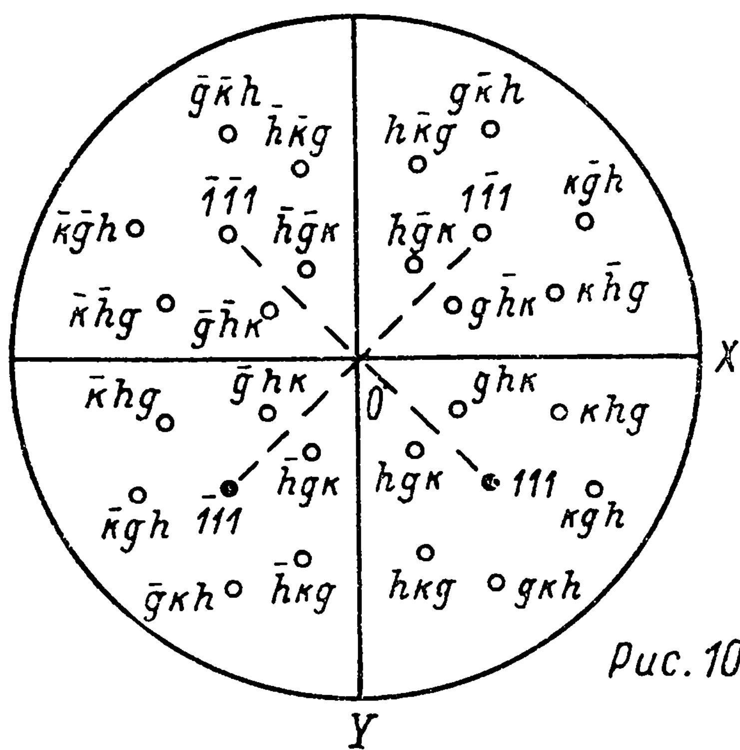


Рис. 10

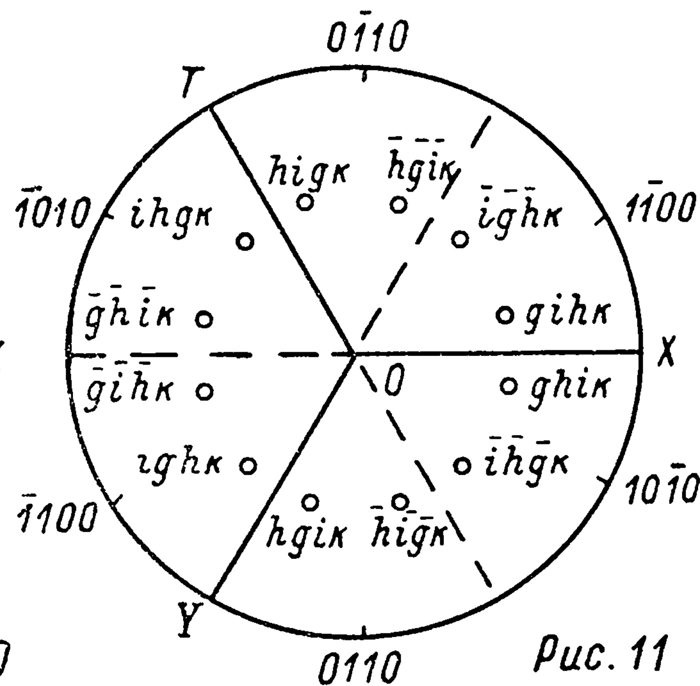


Рис. 11

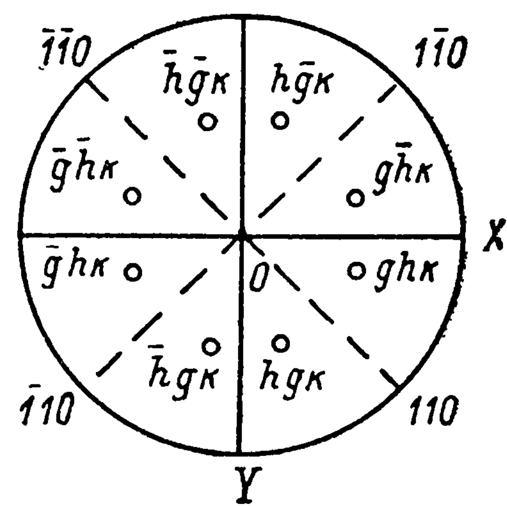


Рис. 12

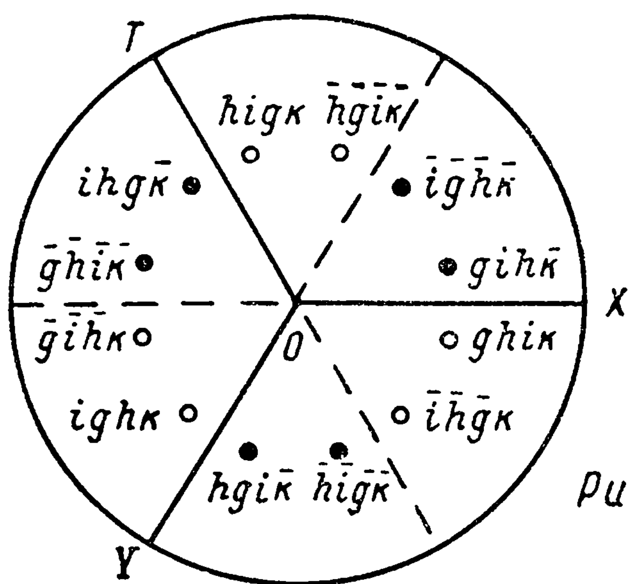


Рис. 13

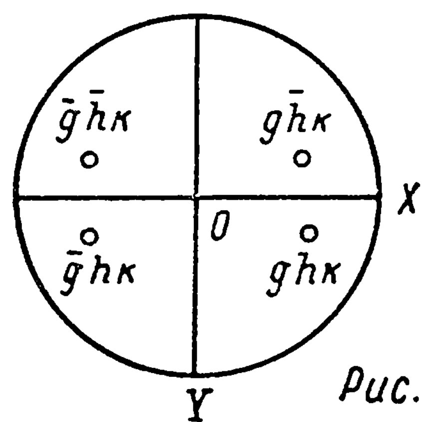


Рис. 14

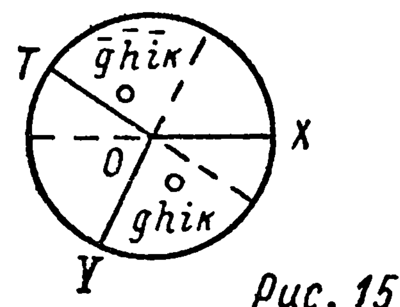


Рис. 15

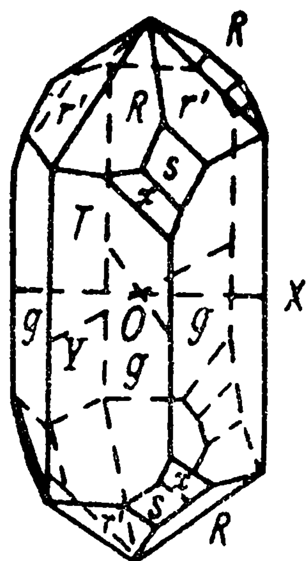


Рис. 16

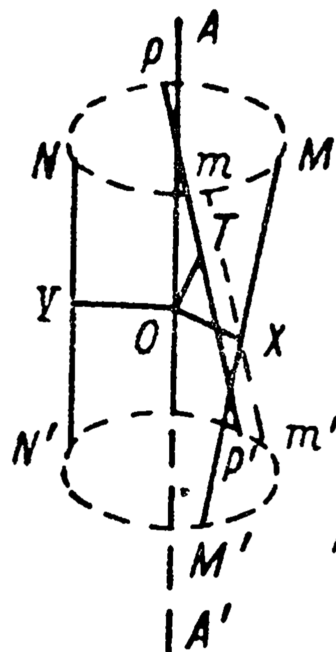


Рис. 17

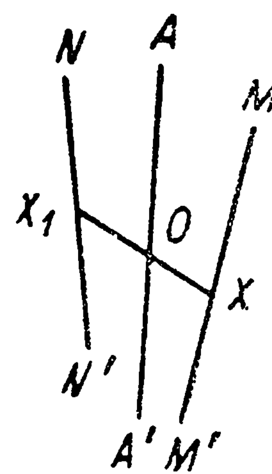


Рис. 18

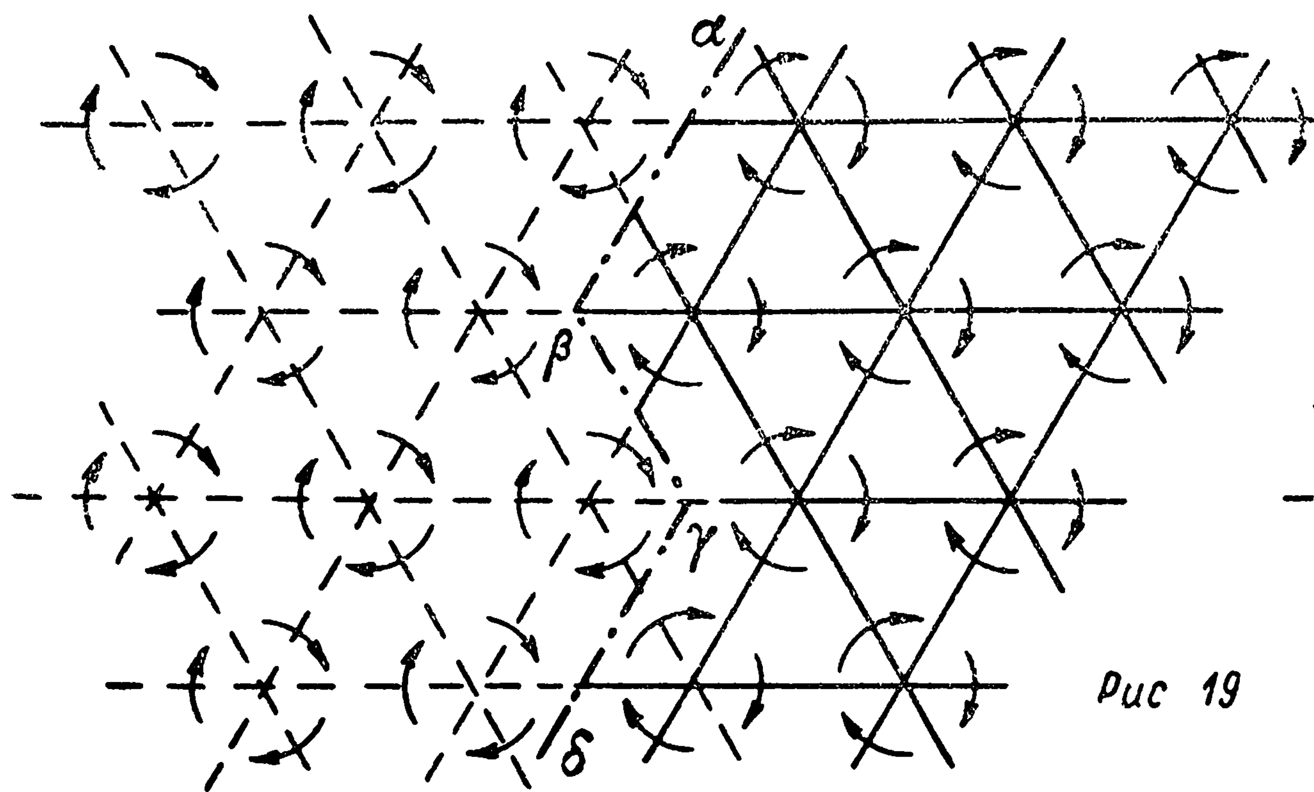


Рис 19

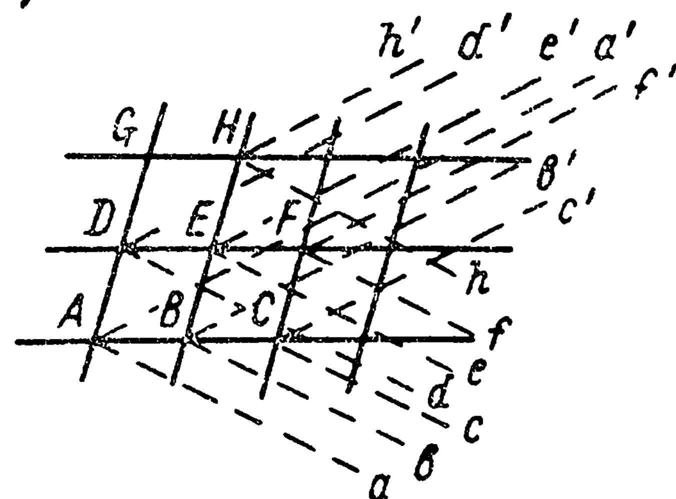


Рис 20

форм, определение и точное объяснение которых потребует новых исследований.

Однако иногда происходит следующее. Общий закон ретикулярной гемитропии сохраняется. Один из кристаллов как бы происходит из другого в результате поворота вокруг линии, нормальной грани простого обозначения. При этом две половины, вместо того чтобы остаться соединенными по плоскости гемитропии, проникают друг в друга по разделяющей их плоскости. Степень проникновения бывает различной. Таковы двойники факолита и левина. К этому типу принадлежит двойник серой меди, изображенный Дюфренуа.* Я убедился, что двойники сахара очень часто соединяются этим странным способом.

С другой стороны, полуоборот, порождающий один из полукристаллов из смежного, кажется совершенным вокруг ребра, не перпендикулярного к граням. В качестве примера можно назвать гемитропию** ортоза при вращении вокруг ребра *H*. Это ребро нормально двойной оси системы. Следовательно, произвольную половину кристалла можно повернуть на 180° вокруг этой двойной оси, не затрагивая его совокупности. Результат этих двух вращений равен единственному повороту на 180° вокруг прямой, нормальной плоскости двух первых осей вращения. Эта прямая нормальна грани *h'* кристалла, так что исключение является только кажущимся. В этом случае происходит более или менее тесное проникновение. Думаю, что так обстоят дела у двойников со сращением — бурнонита, углекислого свинца, ставролита, армотома, симофана и т. д. Эти своеобразные случаи заслуживают того, чтобы на них обратить внимание минералогов.

Результатом моей работы является то, что теория дискретных многоатомных молекул симметричной формы дает наиболее удовлетворительное объяснение множеству кристаллографических явлений по сравнению с прежней теорией непрерывных многоатомных молекул.

* Atlas du Traité de Mineralogie. Pl. CXXIV, fig. 442.
** Dufrénoy. Traité de Mineralogie, t. III, p. 347.

Таблица I

Значения величины Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма основных форм тричетверной системы

Гексаэдральный вид		Октаэдральный вид		Додекаэдральный вид		Гексаэдральный вид		Октаэдральный вид		Додекаэдральный вид	
форма	Σ^2	форма	Σ^2	форма	Σ^2	форма	Σ^2	форма	Σ^2	форма	Σ^2
{100}	1	{111}	3	{110}	2	{331}	19	{711}	51	{221}	36
{110}	2	{100}	4	{100}	4	{421}	21	{320}	52	{532}	38
{111}	3	{110}	8	{211}	6	{332}	22	{321}	56	{611}	38
{210}	5	{311}	11	{310}	10	{430}	25	{553}	59	{541}	42
{211}	6	{331}	19	{111}	12	{431}	26	{731}	59	{311}	44
{221}	9	{210}	20	{321}	14	{510}	26	{733}	67	{631}	46
{310}	10	{211}	24	{411}	18	{511}	27	{322}	68	{543}	50
{311}	11	{511}	27	{210}	20	{432}	29	{410}	68	{710}	50
{320}	13	{531}	35	{332}	22	{520}	29	{411}	72	{320}	52
{321}	14	{221}	36	{431}	26	{521}	30	{751}	75	{552}	54
{322}	17	{310}	40	{510}	26	{441}	33	{753}	83	{721}	54
{410}	17	{533}	43	{521}	30	{522}	33	{421}	84	{730}	58
{411}	18	{551}	51	{530}	34						

Таблица II

Значения величины Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма для основных форм шестерной системы, соотнесенные к двойным осям первого рода и обозначению в четыре характеристики

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{10\bar{1}0\}$	2	$\{0001\}$	λ	$\{10\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{10\bar{1}3\}$	$2+9\lambda$	$\{10\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{10\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{11\bar{2}2\}$	$6+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$2+9\lambda$	$\{11\bar{2}4\}$	$6+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	14	$\{11\bar{2}1\}$	$6+\lambda$	$\{21\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{20\bar{2}3\}$	$8+9\lambda$	$\{21\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	26	$\{20\bar{2}1\}$	$8+\lambda$	$\{30\bar{3}2\}$	$18+4\lambda$	$\{21\bar{3}3\}$	$14+9\lambda$	$\{30\bar{3}4\}$	$18+16\lambda$
$\{32\bar{5}0\}$	38	$\{21\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{31\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{22\bar{4}3\}$	$24+9\lambda$	$\{31\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{30\bar{3}1\}$	$18+\lambda$	$\{32\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{31\bar{4}3\}$	$26+9\lambda$	$\{32\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{51\bar{6}0\}$	62	$\{22\bar{4}1\}$	$24+\lambda$	$\{41\bar{5}2\}$	$42+4\lambda$	$\{40\bar{4}3\}$	$32+9\lambda$	$\{41\bar{5}4\}$	$42+16\lambda$
$\{43\bar{7}0\}$	74	$\{31\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{50\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{32\bar{5}3\}$	$38+9\lambda$	$\{50\bar{5}4\}$	$50+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{40\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{33\bar{6}2\}$	$54+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{33\bar{6}4\}$	$54+16\lambda$
$\{61\bar{7}0\}$	86	$\{32\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{51\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{50\bar{5}3\}$	$50+9\lambda$	$\{51\bar{6}4\}$	$62+16\lambda$
$\{53\bar{8}0\}$	98	$\{41\bar{5}1\}$	$42+\lambda$	$\{43\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{42\bar{6}3\}$	$56+9\lambda$	$\{43\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
		$\{50\bar{5}1\}$	$50+\lambda$			$\{51\bar{6}3\}$	$62+9\lambda$		
$\{10\bar{1}5\}$	$2+25\lambda$	$\{10\bar{1}6\}$	$2+36\lambda$	$\{10\bar{1}7\}$	$2+49\lambda$	$\{10\bar{1}8\}$	$2+64\lambda$	$\{10\bar{1}9\}$	$2+81\lambda$
$\{11\bar{2}5\}$	$6+25\lambda$	$\{11\bar{2}6\}$	$6+36\lambda$	$\{11\bar{2}7\}$	$6+49\lambda$	$\{11\bar{2}8\}$	$6+64\lambda$	$\{11\bar{2}9\}$	$6+81\lambda$
$\{20\bar{2}5\}$	$8+25\lambda$	$\{21\bar{3}6\}$	$14+36\lambda$	$\{20\bar{2}7\}$	$8+49\lambda$	$\{21\bar{3}8\}$	$14+64\lambda$	$\{20\bar{2}9\}$	$8+81\lambda$
$\{21\bar{3}5\}$	$14+25\lambda$	$\{31\bar{4}6\}$	$26+36\lambda$	$\{21\bar{3}7\}$	$14+49\lambda$	$\{30\bar{3}8\}$	$18+64\lambda$		

Таблица II (*продолжение*)

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{30\bar{3}5\}$	$18+25\lambda$	$\{32\bar{5}6\}$	$38+36\lambda$	$\{30\bar{3}7\}$	$18+49\lambda$	$\{31\bar{4}8\}$	$26+64\lambda$		
$\{22\bar{4}5\}$	$24+25\lambda$	$\{41\bar{5}6\}$	$42+36\lambda$	$\{22\bar{4}7\}$	$24+49\lambda$				
$\{31\bar{4}5\}$	$26+25\lambda$	$\{50\bar{5}6\}$	$50+36\lambda$	$\{31\bar{4}7\}$	$26+49\lambda$				
$\{40\bar{4}5\}$	$32+25\lambda$								
$\{32\bar{5}5\}$	$38+25\lambda$								

Таблица III

Значения величины Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма для различных форм четверной системы

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
Гексаэдральный вид, отнесенный к двойным осям первого рода									
{100}	1	{001}	λ	{102}	$1+4\lambda$	{103}	$1+9\lambda$	{104}	$1+16\lambda$
{110}	2	{101}	$1+\lambda$	{112}	$2+4\lambda$	{113}	$2+9\lambda$	{114}	$2+16\lambda$
{210}	5	{111}	$2+\lambda$	{212}	$5+4\lambda$	{203}	$4+9\lambda$	{214}	$5+16\lambda$
{310}	10	{201}	$4+\lambda$	{302}	$9+4\lambda$	{213}	$5+9\lambda$	{304}	$9+16\lambda$
{320}	13	{211}	$5+\lambda$	{312}	$10+4\lambda$	{223}	$8+9\lambda$	{314}	$10+16\lambda$
{410}	17	{221}	$8+\lambda$	{322}	$13+4\lambda$	{313}	$10+9\lambda$		
{430}	25	{301}	$9+\lambda$	{412}	$17+4\lambda$	{323}	$13+9\lambda$		
{510}	26	{311}	$10+\lambda$	{322}	$18+4\lambda$	{403}	$16+9\lambda$		
{520}	29	{321}	$13+\lambda$	{432}	$25+4\lambda$	{413}	$17+9\lambda$		
{530}	34	{401}	$16+\lambda$	{502}	$25+4\lambda$	{423}	$20+9\lambda$		
{610}	37	{411}	$17+\lambda$	{512}	$26+4\lambda$	{433}	$25+9\lambda$		
Октаэдральный вид, отнесенный к двойным осям первого рода									
{110}	2	{101}	$1+\lambda$	{001}	4λ	{103}	$1+9\lambda$	{114}	$2+16\lambda$
{100}	4	{211}	$5+\lambda$	{112}	$2+4\lambda$	{213}	$5+9\lambda$	{102}	$4+16\lambda$
{310}	10	{301}	$9+\lambda$	{111}	$8+4\lambda$	{323}	$13+9\lambda$	{314}	$10+16\lambda$
{210}	20	{321}	$13+\lambda$	{312}	$10+4\lambda$	{413}	$17+9\lambda$	{334}	$18+16\lambda$
{510}	26	{411}	$17+\lambda$	{201}	$16+4\lambda$	{433}	$25+9\lambda$	{212}	$20+16\lambda$
{530}	34	{431}	$25+\lambda$	{332}	$18+4\lambda$	{503}	$25+9\lambda$		
{710}	50	{501}	$25+\lambda$	{512}	$26+4\lambda$	{523}	$29+9\lambda$		
{320}	52	{521}	$29+\lambda$	{221}	$32+4\lambda$	{613}	$37+9\lambda$		
{730}	58	{611}	$37+\lambda$	{532}	$34+4\lambda$	{543}	$41+9\lambda$		
{410}	68	{541}	$41+\lambda$	{311}	$40+4\lambda$	{703}	$49+9\lambda$		
{750}	74	{631}	$45+\lambda$	{552}	$50+4\lambda$	{723}	$53+9\lambda$		

Таблица IV

Значения величины Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма для основных форм тройной системы. Оси симметрии приняты за кристаллографические

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
Обозначение в четыре характеристики. Форма $\{01\bar{1}1\}$ — порождающий ромбоэдр									
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{01\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{10\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{0001\}$	9λ	$\{01\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{10\bar{1}0\}$	18	$\{20\bar{2}1\}$	$8+\lambda$	$\{21\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$6+9\lambda$	$\{12\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{12\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{13\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{10\bar{1}1\}$	$18+9\lambda$	$\{31\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{31\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{32\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{22\bar{4}3\}$	$24+9\lambda$	$\{23\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{71\bar{8}0\}$	114	$\{04\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{05\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{14\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{5054\}$	$50+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	126	$\{23\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{51\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{1564\}$	$62+16\lambda$
$\{74\bar{11}0\}$	186	$\{50\bar{5}1\}$	$50+\lambda$	$\{43\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{11\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{34\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	234	$\{42\bar{6}1\}$	$56+\lambda$	$\{16\bar{7}2\}$	$86+4\lambda$	$\{02\bar{2}1\}$	$72+9\lambda$		
		$\{15\bar{6}1\}$	$62+\lambda$	$\{35\bar{8}2\}$	$98+4\lambda$	$\{25\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$		
		$\{34\bar{7}1\}$	$74+\lambda$	$\{70\bar{7}2\}$	$98+4\lambda$	$\{52\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$		
		$\{61\bar{7}1\}$	$86+\lambda$			$\{44\bar{8}3\}$	$96+9\lambda$		
Обозначение в четыре характеристики. Форма $\{10\bar{1}1\}$ — порождающий ромбоэдр									
$\{11\bar{2}0\}$	6	$\{10\bar{1}1\}$	$2+\lambda$	$\{01\bar{1}2\}$	$2+4\lambda$	$\{0001\}$	9λ	$\{10\bar{1}4\}$	$2+16\lambda$
$\{10\bar{1}0\}$	18	$\{02\bar{2}1\}$	$8+\lambda$	$\{12\bar{3}2\}$	$14+4\lambda$	$\{11\bar{2}3\}$	$6+9\lambda$	$\{21\bar{3}4\}$	$14+16\lambda$
$\{41\bar{5}0\}$	42	$\{21\bar{3}1\}$	$14+\lambda$	$\{31\bar{4}2\}$	$26+4\lambda$	$\{01\bar{1}1\}$	$18+9\lambda$	$\{13\bar{4}4\}$	$26+16\lambda$
$\{52\bar{7}0\}$	78	$\{13\bar{4}1\}$	$26+\lambda$	$\{23\bar{5}2\}$	$38+4\lambda$	$\{22\bar{4}3\}$	$24+9\lambda$	$\{32\bar{5}4\}$	$38+16\lambda$
$\{71\bar{8}0\}$	114	$\{40\bar{4}1\}$	$32+\lambda$	$\{50\bar{5}2\}$	$50+4\lambda$	$\{41\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{05\bar{5}4\}$	$50+16\lambda$
$\{21\bar{3}0\}$	126	$\{32\bar{5}1\}$	$38+\lambda$	$\{15\bar{6}2\}$	$62+4\lambda$	$\{14\bar{5}3\}$	$42+9\lambda$	$\{51\bar{6}4\}$	$62+16\lambda$
$\{74\bar{11}0\}$	186	$\{05\bar{5}1\}$	$50+\lambda$	$\{34\bar{7}2\}$	$74+4\lambda$	$\{11\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{43\bar{7}4\}$	$74+16\lambda$
$\{31\bar{4}0\}$	234	$\{24\bar{6}1\}$	$56+\lambda$	$\{61\bar{7}2\}$	$86+4\lambda$	$\{20\bar{2}1\}$	$72+9\lambda$		
		$\{51\bar{6}1\}$	$62+\lambda$	$\{53\bar{8}2\}$	$98+4\lambda$	$\{52\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$		
		$\{43\bar{7}1\}$	$74+\lambda$	$\{07\bar{7}2\}$	$98+4\lambda$	$\{25\bar{7}3\}$	$78+9\lambda$		
		$\{16\bar{7}1\}$	$86+\lambda$			$\{44\bar{8}3\}$	$96+9\lambda$		

Таблица V

Значения величины Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма тройной системы. Ребра порождающего ромбоэдра приняты за координатные оси

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
Обозначение в три характеристики. Форма $\{100\}$ — порождающий ромбоэдр совокупности									
$\{1\bar{1}0\}$	6	$\{100\}$	$2+\lambda$	$\{101\}$	$2+4\lambda$	$\{111\}$	9λ	$\{211\}$	$2+16\lambda$
$\{1\bar{2}1\}$	18	$\{1\bar{1}1\}$	$8+\lambda$	$\{2\bar{1}1\}$	$14+4\lambda$	$\{201\}$	$6+9\lambda$	$\{301\}$	$14+16\lambda$

Таблица V (*продолжение*)

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{23\bar{1}\}$	42	$\{2\bar{1}0\}$	$14+\lambda$	$\{3\bar{1}0\}$	$26+4\lambda$	$\{2\bar{1}2\}$	$18+9\lambda$	$\{3\bar{1}2\}$	$26+16\lambda$
$\{3\bar{4}1\}$	78	$\{2\bar{2}1\}$	$26+\lambda$	$\{3\bar{2}1\}$	$38+4\lambda$	$\{3\bar{1}1\}$	$24+9\lambda$	$\{4\bar{1}1\}$	$38+16\lambda$
$\{3\bar{5}2\}$	114	$\{3\bar{1}\bar{1}\}$	$32+\lambda$	$\{4\bar{1}\bar{1}\}$	$50+4\lambda$	$\{4\bar{1}0\}$	$42+9\lambda$	$\{3\bar{2}3\}$	$50+16\lambda$
$\{4\bar{5}1\}$	126	$\{3\bar{2}0\}$	$38+\lambda$	$\{3\bar{3}2\}$	$62+4\lambda$	$\{3\bar{2}2\}$	$42+9\lambda$	$\{5\bar{1}0\}$	$62+16\lambda$
$\{5\bar{6}1\}$	186	$\{2\bar{3}2\}$	$50+\lambda$	$\{4\bar{3}1\}$	$74+4\lambda$	$\{4\bar{2}1\}$	$54+9\lambda$	$\{5\bar{2}1\}$	$74+16\lambda$
$\{5\bar{7}2\}$	234	$\{3\bar{3}1\}$	$56+\lambda$	$\{5\bar{2}\bar{1}\}$	$86+4\lambda$	$\{5\bar{1}\bar{1}\}$	$72+9\lambda$		
		$\{4\bar{2}\bar{1}\}$	$62+\lambda$	$\{5\bar{3}0\}$	$98+4\lambda$	$\{5\bar{2}0\}$	$78+9\lambda$		
		$\{4\bar{3}0\}$	$74+\lambda$	$\{3\bar{4}3\}$	$98+4\lambda$	$\{4\bar{3}2\}$	$78+9\lambda$		
		$\{3\bar{4}2\}$	$86+\lambda$			$\{5\bar{3}1\}$	$96+9\lambda$		

Таблица VI

Значения Σ^2, квадрата площади порождающего параллелограмма для основных форм тридвойной системы

Гексаэдральный прямоугольный вид

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{100\}$	λ'	$\{010\}$	λ	$\{001\}$	1
$\{110\}$	$\lambda'+\lambda$	$\{101\}$	$\lambda'+1$	$\{011\}$	$\lambda+1$
$\{111\}$	$\lambda'+\lambda+1$				
$\{210\}$	$4\lambda'+\lambda$	$\{201\}$	$4\lambda'+1$	$\{012\}$	$\lambda+4$
$\{120\}$	$\lambda'+4\lambda$	$\{102\}$	$\lambda'+4$	$\{021\}$	$4\lambda+1$
$\{211\}$	$4\lambda'+\lambda+1$	$\{121\}$	$\lambda'+4\lambda+1$	$\{112\}$	$\lambda'+\lambda+4$

Гексаэдральный ромбический вид с ромбическим основанием на плоскости xy

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{001\}$	1	$\{10k\}$	$4\lambda'+4k^2$
$\{11k\}$	$\lambda'+\lambda+k^2$	$\{01k\}$	$4\lambda+4k^2$
$\{20k\}$	$4\lambda'+k^2$	$\{21k\}$	$16\lambda'+4\lambda+4k^2$
$\{02k\}$	$4\lambda+k^2$	$\{12k\}$	$4\lambda'+16\lambda+4k^2$
$\{22k\}$	$4\lambda'+4\lambda+k^2$	$\{30k\}$	$36\lambda'+4k^2$
$\{31k\}$	$9\lambda'+\lambda+k^2$	$\{03k\}$	$36\lambda+4k^2$
$\{13k\}$	$\lambda'+9\lambda+k^2$		
$\{40k\}$	$16\lambda'+k^2$		
$\{04k\}$	$16\lambda+k^2$		

Октаэдральный прямоугольный вид

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{110\}$	$\lambda'+\lambda$	$\{100\}$	$4\lambda'$		
$\{101\}$	$\lambda'+1$	$\{010\}$	4λ		
$\{011\}$	$\lambda+1$	$\{001\}$	4		

Октаэдральный ромбический вид

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
$\{111\}$	$\lambda'+\lambda+1$	$\{100\}$	$4\lambda'$
$\{311\}$	$9\lambda'+\lambda+1$	$\{010\}$	4λ
$\{131\}$	$\lambda'+9\lambda+1$	$\{001\}$	4

Таблица VI (*продолжение*)

Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2	Форма	Σ^2
{211}	$4\lambda' + \lambda + 1$	{111}	$4\lambda' + 4\lambda + 4$			{113}	$\lambda' + \lambda + 9$	{110}	$4\lambda' + 4\lambda$
{121}	$\lambda' + 4\lambda + 1$	{210}	$16\lambda' + 4\lambda$			{331}	$9\lambda' + 9\lambda + 1$	{101}	$4\lambda' + 4$
{112}	$\lambda' + \lambda + 4$	{201}	$16\lambda' + 4$			{313}	$9\lambda' + \lambda + 9$	{011}	$4\lambda + 4$
{310}	$9\lambda' + \lambda$	{120}	$4\lambda' + 16\lambda$			{133}	$\lambda' + 9\lambda + 9$	{210}	$16\lambda' + 4\lambda$
{301}	$9\lambda' + 1$	{102}	$4\lambda' + 16$					{120}	$4\lambda' + 16\lambda$
{130}	$\lambda' + 9\lambda$	{021}	$16\lambda + 4$					{201}	$16\lambda' + 4$
{103}	$\lambda' + 9$	{012}	$4\lambda + 16$					{102}	$4\lambda' + 16$
{031}	$9\lambda + 1$	—	—					{021}	$16\lambda + 4$
{013}	$\lambda + 9$	—	—					{012}	$4\lambda + 16$

Таблица VII

Классификация многогранников по их симметрии

Многогранники			Символ симметрии	Класс
Асимметричный			$oL,\ oC,\ oP$	1
Симметричный		без осей	$oL,\ C,\ oP$	2
			$oL,\ oC,\ P$	3
	с главной осью	четного порядка	$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ oC,\ oP$	4
			$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ C,\ \Pi$	5
			$\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ oC,\ oP$	6
			$\Lambda^{2q},\ oL^2,\ oC,\ qP,\ qP'$	7
			$\Lambda^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2$	8
			$\Lambda^{2q},\ 2qL^2,\ oC,\ 2qP$	9
		нечетного порядка	$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ oP$	10
			$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ C,\ oP$	11
			$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ \Pi$	12
			$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)\,L^2,\ oC,\ oP$	13
			$\Lambda^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ (2q+1)\,P$	14
			$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)\,L^2,\ C,\ (2q+1)\,P^2$	15
			$\Lambda^{2q+1},\ (2q+1)\,L^2,\ oC,\ \Pi,\ (2q+1)\,P$	16
	сфероэдрические	тричетверные	$4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ oP$	17
			$4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2$	18
			$4L^3,\ 3L^2,\ oC,\ 6P$	19
			$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP$	20
			$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2$	21
		десятитройные	$6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ oC,\ oP$	22
			$6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2$	23

В этой таблице q — некоторое целое положительное число.

Таблица VIII

Классификация молекулярных многогранников по кристаллическим системам

Символ симметрии молекулярного многогранника $[S_c, S_p]$	Символ симметрии эквивалентного многогранника $[S_c]$
Асимметричная система $[\text{o}L, C, \text{o}P]$	
$\text{o}L, C, \text{o}P$ $\Lambda^{6m\pm1}, \text{o}L^2, C, \text{o}P$ $\Lambda^5, \text{o}L^2, C, \text{o}P$	$\text{o}L, C, \text{o}P$
$\text{o}L, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^{6m\pm1}, \text{o}L^2, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^5, \text{o}L^2, \text{o}C, \text{o}P$	$\text{o}L, \text{o}C, \text{o}P$
Двойная система $[\Lambda^2, \text{o}L^2, C, \Pi]$	
$\Lambda^{12m\pm2}, \text{o}L^2, C, \Pi, \text{o}P$ $\Lambda^2, \text{o}L^2, C, \Pi, \text{o}P$ $\Lambda^{6m\pm1}, (6m\pm1) L^2, C, (6m\pm1) P$ $\Lambda^5, 5L^2, C, 5P$	Λ^2, C, Π
$\Lambda^{12m\pm2}, \text{o}L^2, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^2, \text{o}L^2, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^{6m\pm1}, (6m\pm1) L^2, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^5, 5L^2, \text{o}C, \text{o}P$	$\Lambda^2, \text{o}C, \text{o}P$
$\text{o}L, \text{o}C, P$ $\Lambda^{6m\pm1}, \text{o}L^2, \text{o}C, (6m\pm1) P$ $\Lambda^5, \text{o}L^2, \text{o}C, 5P$ $\Lambda^{6m\pm1}, \text{o}L^2, \text{o}C, \Pi$ $\Lambda^5, \text{o}L^2, \text{o}C, \Pi$	$\text{o}L^2, \text{o}C, \Pi$
Тридвойная система $[\Lambda^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2]$	
$\Lambda^{12m\pm2}, (6m\pm1) L^2, (6m\pm1) L'^2, C, \Pi, (6m\pm1) P^2, (6m\pm1) P'^2$ $\Lambda^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2$	$\Lambda^2, L^2, L'^2, C, \Pi, P^2, P'^2$
$\Lambda^{12m\pm2}, (6m\pm1) L^2, (6m\pm1) L'^2, \text{o}C, \text{o}P$ $\Lambda^2, L^2, L'^2, \text{o}C, \text{o}P$	$\Lambda^2, L^2, L'^2, \text{o}C, \text{o}P$
$\Lambda^{12m\pm2}, \text{o}L^2, \text{o}C, (6m \pm 1) P, (6m \pm 1) P'$ $\Lambda^2, \text{o}L^2, \text{o}C, P, P'$ $\Lambda^{6m\pm1}, (6m \pm 1)^2 L^2, \text{o}C, \Pi, (6m \pm 1) P^2$ $\Lambda^5, 5L^2, \text{o}C, \Pi, 5P$	$\Lambda^2, \text{o}C, P, P'^2$
Тройная система $[\Lambda^3, 3L^2, C, 3P^2]$	
$\Lambda^{6m+3}, (6m + 3) L^2, C, (6m + 3) P^2$ $\Lambda^3, 3L^2, C, 3P^2$	$\Lambda^3, 3L^2, C, 3P^2$

Таблица VIII (*продолжение*)

Символ симметрии молекулярного многогранника $[S_c, S_p]$	Символ симметрии эквивалентного многогранника $[S_c]$
Λ^{6m+3}, $(6m+3)L^{2}$, оC, оP Λ^{3}, $3L^{2}$, оC, оP	Λ^{3}, $3L^{2}$, оC, оP
Λ^{6m+3}, оL^{2}, оC, $(6m+3)P$ Λ^{3}, оL^{2}, оC, $3P$	Λ^{3}, оL^{2}, оC, $3P$
Λ^{6m+3}, оL^{2}, C, оP Λ^{3}, оL^{2}, C, оP	Λ^{3}, оL^{2}, C, оP
Λ^{6m+3}, оL^{2}, оC, оP Λ^{3}, оL^{2}, оC, оP	Λ^{3}, оL^{2}, оC, оP
Четверная система $[\Lambda^{4}, 2L^{2}, 2L'^{2}, C, \Pi, 2P^{2}, 2P'^{2}]$	
$\Lambda^{12m\pm4}$, $(6m\pm2)L^{2}$, $(6m\pm2)L'^{2}$, C, Π, $(6m\pm2)P^{2}$, $(6m\pm2)P'^{2}$ Λ^{4}, $2L^{2}$, $2L'^{2}$, C, Π, $2P^{2}$, $2P'^{2}$	Λ^{4}, $2L^{2}$, $2L'^{2}$, C, Π, $2P^{2}$, $2P'^{2}$
$\Lambda^{12m\pm4}$, $(6m\pm2)L'^{2}$, $(6m\pm2)L^{2}$, оC, оP Λ^{4}, $2L^{2}$, $2L'^{2}$, оC, оP $\Lambda^{12m\pm4}$, $(12m\pm4)L^{2}$, оC, $(12m\pm4)P$ Λ^{4}, $4L^{2}$, оC, $4P$	Λ^{4}, $2L^{2}$, $2L'^{2}$, оC, оP
$\Lambda^{12m\pm2}$, $(12m\pm2)L^{2}$, оC, $(12m\pm2)P$ Λ^{2}, $2L^{2}$, оC, $2P$	или Λ^{2}, $2L^{2}$, оC, $2P'$, или Λ^{2}, $2L'^{2}$, оC, $2P$
$\Lambda^{12m\pm4}$, оL^{2}, оC, $(6m\pm2)P$, $(6m\pm2)P'$ Λ^{4}, оL^{2}, оC, $2P$, $2P'$ $\Lambda^{12m\pm4}$, $(12m\pm4)L^{2}$, оC, $(12m\pm4)P$ Λ^{4}, $4L^{2}$, оC, $4P$	Λ^{4}, оL^{2}, оC, $2P$, $2P'$
$\Lambda^{12m\pm4}$, оL^{2}, C, Π Λ^{4}, оL^{2}, C, Π	Λ^{4}, оL^{2}, C, Π
$\Lambda^{12m\pm4}$, оL^{2}, оC, оP Λ^{4}, оL^{2}, оC, оP	Λ^{4}, оL^{2}, оC, оP
Шестерная система $[\Lambda^{6}, 3L^{2}, 3L'^{2}, C, \Pi, 3P^{2}, 3P'^{2}]$	
Λ^{6m}, $3mL^{2}$, $3mL'^{2}$, C, Π, $3mP^{2}$, $3mP'^{2}$ Λ^{6}, $3L^{2}$, $3L'^{2}$, C, Π, $3P^{2}$, $3P'^{2}$	Λ^{6}, $3L^{2}$, $3L'^{2}$, C, Π, $3P^{2}$, $3P'^{2}$
Λ^{6m}, $3mL^{2}$, $3mL'^{2}$, оC, оP Λ^{6}, $3L^{2}$, $3L'^{2}$, оC, оP Λ^{6m}, $6mL^{2}$, оC, $6mP$ Λ^{6}, $6L^{2}$, оC, $6P$	Λ^{6}, $3L^{2}$, $3L'^{2}$, оC, оP
Λ^{6m+3}, $(6m+3)L^{2}$, оC, Π, $(6m+3)P$ Λ^{3}, $3L^{2}$, оC, Π, $3P$	или Λ^{3}, $3L^{2}$, оC, Π, $3P'$ или Λ^{3}, $3L'^{2}$, оC, Π, $3P$
Λ^{6m}, оL^{2}, оC, $3mP$, $3mP'$ Λ^{6}, оL^{2}, оC, $3P$, $3P'$ Λ^{6m}, $6mL^{2}$, оC, $6mP$ Λ^{6}, $6L^{2}$, оC, $6P$	Λ^{6}, оL^{2}, оC, $3P$, $3P'$

Таблица VIII (*продолжение*)

Символ симметрии молекулярного многогранника $[S_c, S_p]$	Символ симметрии эквивалентного многогранника $[S_c]$
Λ^{6m+3}, $(6m+3)L^2$, C, $(6m+3)\dot{P}^2$ Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$	или Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$, или Λ^3, $3L'^2$, C, $3P'^2$
Λ^{6m}, oL^2, C, Π Λ^6, oL^2, C, Π	Λ^6, oL^2, C, Π
Λ^{6m+3}, $(6m+3)L^2$, oC, oP Λ^3, $3L^2$, oC, oP	или Λ^3, $3L^2$, oC, oP, или Λ^3, $3L'^2$, oC, oP
Λ^{6m}, oL^2, oC, oP Λ^6, oL^2, oC, oP	Λ^6, oL^2, oC, oP
Λ^{6m+3}, oL^2, oC, $(6m+3)P$ Λ^3, oL^2, oC, $3P$	или Λ^3, oL^2, oC, $3P$, или Λ^3, oL^2, oC, $3P'$
Λ^{6m+3}, oL^2, oC, Π Λ^3, oL^2, oC, Π	Λ^3, oL^2, oC, Π
Λ^{6m+3}, oL^2, C, oP Λ^3, oL^2, C, oP	Λ^3, oL^2, C, oP
Λ^{6m+3}, oL^2, oC, oP Λ^3, oL^2, oC, oP	Λ^3, oL^2, oC, oP
Тричетверная система $[3L_4, 4L_3, 6L_2, C, 3P, 6P^2]$	
$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$
$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP
$4L^3$, $3L^2$, oC, $6P$	$4L^3$, $3L^2$, oC, $6P$
$4L^3$, $3L^2$, C, $3P^2$ $6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, C, $15P^2$	$4L^3$, $3L^2$, C, $3P^2$
$4L^3$, $3L^2$, oC, oP $6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, oC, oP	$4L^3$, $3L^2$, oC, oP

Таблица IX

Число граней кристаллических форм в различных системах и для различных случаев гемиэдрии

Символ симметрии молекулярного многогранника	Косые формы		Формы					
	грани	число граней	параллельные			нормальные		
Тричетверная система	Табл., стр. 229		$\{ggh\}$	$\{\hat{g}, h, g\pm h\}$	$\{gho\}$	$\{110\}$	$\{111\}$	$\{100\}$
$3L^2$, $4L^3$, oC, oP	Кол. I	$12A$	$12B$	Как	$12C$	$12D$	$4A$	$6A$
$3L^2$, $4L^3$, C, $3P^2$	I, III	$24A$	$24D$	в	$12C$	$12D$	$8A$	$6A$
$3L^2$, $4L^3$, oC, $6P$	I, IV	$24B$	$12B$	колон.	$24E$	$12D$	$4A$	$6A$
$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP	I, II	$24C$	$24D$	косых	$24E$	$12D$	$8A$	$6A$
$3L^4$, $4L^3$, C, $6L^2$, $3P^4$, $6P^2$	I, II, III, IV	48	$24D$	форм	$24E$	$12D$	$8A$	$6A$

Таблица IX (*продолжение*)

Символ симметрии молекулярного многогранника	Косые формы		Формы					
	грани	число граней	параллельные			нормальные		
Шестерная система	Табл., стр. 230		$\{g\,g\,\overline{2g}\,h\}$	$\{g\,o\,\bar{g}k\}$	$\{ghio\}$	$\{11\bar{2}0\}$	$\{10\bar{1}0\}$	$\{0001\}$
Λ^3, oL^2, oC, oP	Кол. I	$3A$	$3A$	$3A$	$3B$	$3B$	$3B$	1
Λ^3, oL^2, C, oP	I, V	$6B$	$6B$	$6B$	$6G$	$6G$	$6G$	$2A$
Λ^3, oL^2, oC, П	I, VI	$6C$	$6C$	$6C$	$3B$	$3B$	$3B$	$2A$
Λ^3, oL^2, oC, $3P$	I, VII	$6D$	$6E$	$3A$	$6H$	$6G$	$3B$	1
Λ^3, oL^2, oC, $3P'$	I, VIII	$6D$	$3A$	$6E$	$6H$	$3B$	$6G$	1
Λ^6, oL^2, oC, oP	I, II	$6E$	$6E$	$6E$	$6G$	$6G$	$6G$	1
Λ^3, $3L^2$, oC, oP	I, III	$6F$	$6C$	$6B$	$6H$	$3B$	$6G$	$2A$
Λ^3, $3L'^2$, oC, oP	I, IV	$6F$	$6B$	$6C$	$6H$	$6G$	$3B$	$2A$
Λ^6, oL^2, C, П	I, II, V, VI	$12E$	$12E$	$12E$	$6G$	$6G$	$6G$	$2A$
Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$	I, III, V, VII	$12F$	$12E$	$6B$	$12K$	$6G$	$6G$	$2A$
Λ^3, $3L'^2$, C, $3P'^2$	I, IV, V, VIII	$12F$	$6B$	$12E$	$12K$	$6G$	$6G$	$2A$
Λ^6, oL^2, oC, $3P$, $3P'$	I, II, VII, VIII	$12G$	$6E$	$6E$	$12K$	$6G$	$6G$	1
Λ^3, $3L^2$, oC, П, $3P'$	I, III, VI, VIII	$12H$	$6C$	$12E$	$6H$	$3B$	$6G$	$2A$
Λ^3, $3L'^2$, oC, П, $3P$	I, IV, VI, VII	$12H$	$12E$	$6C$	$6H$	$6G$	$6G$	$2A$
Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, oC, oP	I, II, III, IV	$12I$	$12E$	$12E$	$12K$	$6G$	$3B$	$2A$
Λ^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, П, $3P^2$, $3P'^2$	от I до VIII	$24F$	$12E$	$12E$	$12K$	$6G$	$6G$	$2A$
Четверная система	Табл., стр. 232		$\{ggh\}$	$\{gok\}$	$\{gho\}$	$\{110\}$	$\{100\}$	$\{001\}$
Λ^4, oL^2, oC, oP	Кол. I, II	$4B$	$4B$	$4D$	$4D$	$4D$	$4D$	1
Λ^2, oC, oP	I, VI	$4C$	$4C$	$4C$	$4D$	$4D$	$4D$	$2A$
Λ^4, oL^2, C, П	I, II, V, VI	$8B$	$8B$	$8B$	$4D$	$4D$	$4D$	$2A$
Λ^4, oL^2, oC, $2P$, $2P'$	I, II, VII, VIII	$8C$	$4B$	$4B$	$8F$	$4D$	$4D$	1
Λ^2, $2L^2$, oC, $2P'$	I, III, VI, VIII	$8D$	$4C$	$8B$	$8F$	$4D$	$4D$	$2A$
Λ^2, oL'^2, oC, $2P$	I, IV, VI, VII	$8D$	$8B$	$4C$	$8F$	$4D$	$4D$	$2A$
Λ^4, $2L^2$, $2L'^2$, oC, oP	I, II, III, IV	$8E$	$8B$	$8B$	$8F$	$4D$	$4D$	$2A$
Λ^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, П, $2P^2$, $2P'^2$	от I до VIII	16	$8B$	$8B$	$8F$	$4D$	$4D$	$2A$
Тройная система	Табл., стр. 234			$\{go\bar{g}k\}$	$\{ghio\}$	$\{11\bar{2}0\}$		$\{0001\}$
Λ^3, oL^2, oC, oP	Кол. I	$3A$		$3A$	$3A$	$3B$		1
Λ^3, oL^2, C, oP	I, III	$6B$		$6B$	$6G$	$6G$		$2A$
Λ^3, oL^2, oC, $3P$	I, IV	$6D$	•	$3A$	$6H$	$6G$		1
Λ^3, $3L^2$, oC, oP	I, II	$6F$		$6B$	$6H$	$3B$		$2A$
Λ^3, $3L^2$, C, $3P^2$	I, II, III, IV	$12F$		$6B$	$12K$	$6G$	·	$2A$

Таблица IX (*продолжение*)

Символ симметрии молекулярного многогранника	Косые формы		Формы					
	грани	число граней	параллельные			нормальные		
Тридвойная система	Табл., стр. 235		{o*hk*}	{*g*o*k*}	{*gh*o}	{100}	{010}	{001}
Λ^2, oL^2, oC, P, P'	Кол. I, IV	$4E$	$2B$	$2B$	$4G$	$2A$	$2A$	1
Λ^2, L^2, L'^2, oC, oP	I, II	$4F$	$4G$	$4G$	$4G$	$2A$	$2A$	$2A$
Λ^2, L^2, L'^2, C, Π, P^2, P'^2	I, II, III, IV	$8G$	$4G$	$4G$	$4G$	$2A$	$2A$	$2A$
Двойная система	Табл., стр. 236				{*ghi*o}	{100}	{010}	{0001}
oL, oC, Π	Кол. I, IV	$2B$			1			$2A$
Λ^2, oC, oP	I, II	$2B$			$2A$			1
Λ^2, C, Π	I, II, III, IV	$4G$			$2A$			$2A$
Асимметричная система	Табл., стр. 236							
oL, oC, oP	Кол. I	1						
oL, C, oP	I, II	$2A$						



ПРИЛОЖЕНИЯ

ОГЮСТ БРАВЕ

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО *

Огюст Браве (Auguste Bravais) родился 23 августа 1811 г. в Annonay (департамент l'Ardèche), маленьком городке, живописно расположенном в ущелье хребта Vivarais. Отец Браве был доктором медицины. В течение сорока лет он безвозмездно исполнял обязанности госпитального врача и в старости практиковал только среди бедных. Кроме врачебных занятий, отец Браве со страстью предавался занятиям ботаникой. Он находился в постоянной переписке и обменивался семенами и образцами растений с самыми знаменитыми ботаниками Парижа и Монпелье. Семья Браве была довольно многочисленна: четыре сына и одна дочь. Самым младшим из сыновей был Огюст Браве, впоследствии знаменитый ученый.

Огюст Браве лишился своей матери в раннем детстве. Трех лет маленький Огюст выучился уже читать, не заметив даже, как это случилось. Самым любимым занятием его было рвать цветы вместе с сестрой, собирать камешки, красивых насекомых. Это были лучшие игрушки его детских лет. Вскоре он был уже в состоянии принимать участие в прогулках своих старших братьев. Каждый раз, когда занятия позволяли, сам доктор Браве руководил экскурсиями своих сыновей. Трогательную картину представляла эта молодая семья, озабоченная составлением различных коллекций под наблюдением и присмотром главы семьи, одновременно отца и учителя. Различные предметы давали тему для серьезных и поучительных бесед, которые отец вел с большим увлечением и таким образом подстрекал еще большее рвение детей к подобным занятиям и воспитывал в них осмысленную любовь к природе.

---

* Подробная биография О. Браве написана известным геологом Эли де Бомоном (Élie de Beaumont. Eloge historique d'Auguste Bravais. Mémoires de l'Academie des sciences de l'Institut Impérial de France, t. XXXV, 1866, pp. XXIII—XCIX). Здесь дается сокращенное изложение этой биографии, опубликованное Я. В. Самойловым в его предисловии к брошюре: Август Бравэ. Исследование о многогранниках симметрической формы. Перев. и предисл. Як. Самойлова. Одесса, 1896, стр. IV—VI.

Молодой Огюст с самых ранних лет обнаруживал большую наблюдательность. Еще ребенком он чрезвычайно внимательно следил за всеми атмосферными явлениями. Каждое утро наблюдал он с террасы небо, ветер, облака. Позднее он устроил на балконе маленькую обсерваторию, откуда обращал внимание всей семьи на тысячу явлений, которые без его указаний прошли бы совершенно незамеченными. На горизонте из отцовского дома виднелась гора Roche de Vent, правда, не очень высокая, но достаточная, чтобы служить до некоторой степени барометром. Облака, сгущавшиеся у этой горы, следы снега, укутывающий ее туман играли большую роль в жизни ребенка. Часто гора эта служила также целью экскурсий детей, хотя подъем на нее и спуск продолжались часа четыре.

Старшие братья Огюста часто отправлялись на более высокую гору Pilat, откуда они приносили новые цветы, особенных насекомых и с интересом рассказывали о восходе солнца за Монбланом. И находки братьев, и их описания сильно действовали на воображение молодого О. Браве, но он был еще слишком мал для таких прогулок: один подъем на вершину с маленьким Огюстом продолжался часов пять-шесть. Однажды Огюст один тайком взобрался на вершину горы, а на следующий день явился со столь желанными растениями, камнями, насекомыми и с увлечением рассказывал о том, как солнце за Монбланом вырисовывало длинную цепь Альпийских гор. В нем сказывался уже будущий знаменитый путешественник.

Рядом с этой наблюдательностью и любовью к природе у него еще с детства обнаружились острый ум и серьезная вдумчивость. Знакомые, бывавшие в доме Браве, нередко обращали внимание на ребенка, погруженного в глубокие размышления; на вопросы, обращенные к нему по этому поводу, мальчик отвечал с очаровательной наивностью: «Я думаю».

Четырнадцати лет он уже закончил свои занятия в collège d'Annonay. Тогда отец Огюста решил послать его в Париж, в collège Stanislas. Скромный и послушный, он привлек к себе общие симпатии. Браве ревностно посещал уроки, внимательно следил за объяснениями в классе, точно приготовлял заданное, но самые глубокие его симпатии были не здесь. На дне его чемодана хранилось несколько книг, скрытых от посторонних взоров. Это были математические книги. Ночью он находил возможность перелистывать их. Он решал задачи и писал весьма интересные письма Рейно, бывшему учителю арифметики и геометрии в collège d'Annonay.

Мальчика решено было готовить к поступлению в Политехническую школу. Проведя два года в Париже, он вернулся в Annonay, где занятиями его снова стал руководить Рейно. Приготовления продолжались всего один год. В 1828 г. Огюст держал вступительный экзамен. Оказалось, что подготовка была слишком слабой: Браве не был принят.

К счастью для юноши и для науки, экзаменатор его, Бурдон, был человек, внимательно относившийся к поступающим молодым людям; он констатировал недостаточность подготовки, но от него не ускользнули выдающиеся дарования Браве. Бурдон вызвал доктора Браве, объяснил ему

положение дела и настойчиво советовал прислать сына на следующий год. Вполне убежденный доводами Бурдона, Браве послал своего сына снова в Париж в институт Barbet, который считался тогда самым лучшим учебным заведением для подготовки к поступлению в Политехническую школу. К концу года на общем конкурсе Браве получил первую отметку по математике и был принят вторым в Политехническую школу. Вскоре он занял первое место по успехам в занятиях.

По окончании курса Браве с согласия своего отца поступил на морскую службу. Море имело для Браве особенное обаяние: представлялась возможность посмотреть далекие страны, познакомиться с самой разнообразной природой и продолжать ее изучение; а это составляло главную мечту его счастливого детства.

Проплавав некоторое время с начала 1832 г. в водах Средиземного моря, он вскоре перешел на судно «Le Loiret», которому было поручено исследование берегов Алжира. В октябре 1833 г. судно, выполнив задание, вошло в гавань Тулона. Морской министр, довольный результатами экспедиции, выразил благодарность командиру и его помощникам, особенно Браве.

Затем «Le Loiret» было назначено для сообщений между Алжиром, Боном и Ораном. Продолжая службу на «Le Loiret, 1 февраля 1834 г. Браве был произведен в лейтенанты.

В беспрерывных переездах судно делало частые остановки в различных портах. Браве при всякой возможности отправлялся на сушу, что давало ему драгоценный случай удовлетворить свое страстное влечение к изучению природы. Растительный и животный мир, значительно отличавшийся от того, к которому он привык с детства, возбуждал его любознательность в чрезвычайной степени. Браве собрал великолепные коллекции растений, насекомых, ракообразных, рыб, наземных и морских моллюсков. Он отправлял большие посылки в Annonay или сам привозил их, пользуясь всяким отпуском для поездки на родину.

Находясь в Annonay, он снова совершал экскурсии на Pilat и Roche de Vent, выбирая самые уединенные и заброшенные тропинки. Интересуясь палеонтологией, он собрал здесь богатую коллекцию ископаемых. Но бóльшую часть времени он отдавал занятиям ботаникой, экскурсируя со своим братом Людвигом Браве, доктором медицины и уже опытным ботаником. Вдвоем Людвиг и Огюст Браве написали исследование: «Essai géométrique sur la symétrie des feuilles curviserièes et rectiseriées», представленное ими в Академию наук в 1835 г. Хотя оказалось, что вопрос этот очень незадолго был разработан другими авторами, чего братья, конечно, не знали, рецензия, сделанная Броньяром по поручению Академии, содержала очень лестный отзыв о труде братьев. С особенной похвалой отозвался Броньяр о чрезвычайно умелом и остроумном пользовании непрерывными дробями, сходящимися рядами и другими математическими выкладками, а эта часть исследования всецело принадлежала Огюсту Браве. Людвиг и Огюст Браве написали вместе еще несколько работ, обративших на себя внимание серьез-

ных ученых. Декандолль посвятил братьям новый вид семейства Bignoniaceae, назвав его Bravaisia.

Не остались безрезультатными и исследования, производимые в эти же годы О. Браве в Алжире. Благодаря различным его находкам он вступил в оживленную переписку со многими учеными, и их отзывы о его трудах еще удваивали усердие молодого исследователя.

Природа щедро одарила Браве. Отличный морской офицер, страстный естествоиспытатель он, по выражению Коши, авторитет которого в данном случае несомненен, был вместе с тем истинным геометром. Как раньше в школе, теперь в каюте судна он проводил ночи за математическими выкладками и решениями задач. Среди других математических трудов, написанных на судне, выделяются Méthodes employées dans les levés sous voiles» и «Equilibre des corps flottants», которые были представлены О. Браве в Лионский университет. За эти сочинения он был удостоен получения степени docteur es sciences. Пуассон, который еще после окончательного экзамена Браве в Политехнической школе советовал молодому человеку посвятить себя исключительно научной карьере, теперь особенно настаивал на этом. В это же время О. Браве представил в Академию наук несколько математических мемуаров, возбудивших к себе самое серьезное внимание Пуассона, Штурма, Савари.

Морской министр, желая дать возможность талантливому Браве заниматься наукой не только урывками, назначил его в чисто научную экспедицию на север. 13 июня 1838 г. корвет «La Recherche» вышел из Гаврской гавани. На нем находилось несколько ученых, имевших все инструменты для будущих исследований. Корвет остановился в Дронтгейме, древней норвежской столице, где к находящимся на судне примкнули норвежские, шведские и датские ученые. После небольшой остановки в Гаммерфесте 25 июля «La Recherche» бросил якорь вблизи Шпицбергена, под 70°30′ сев. ш. Ученые и морские офицеры немедленно принялись за работу. Явления астрономические, физические, метеорологические, движения и температура моря, огромные ледники, спускающиеся с вершин гор до уровня морского, геологическое строение обнажений, следы растительности — все это служило предметом многочисленных исследований. О. Браве, с детства привыкший взбираться на горы, первый достиг вершины, названной его именем. Вместе с товарищами он занялся определениями высот гор, наклонением магнитной стрелки и др.

Но лето на таких широтах не продолжительно. 5 августа был дан сигнал к отплытию. 12 августа корвет снова прибыл в Гаммерфест. Во время переезда Браве и Мартэн провели интересные наблюдения за температурой воды Ледовитого океана на различных глубинах. В Гаммерфесте Браве с одним из своих товарищей по службе и два профессора, шведский и норвежский, высадились, чтобы прозимовать в Лапландии. Корвет возвратился в Брест.

Из-за климатических условий северная часть Атлантического океана в течение зимы бывает окутана густым, непроходящим туманом, который

совершенно скрывает небо от прибрежных жителей. Поэтому высадившиеся в Гаммерфесте решили не оставаться там, а переехать в деревеньку Боссекоп, углубившись на 70 км внутрь страны. Климат там холоднее, но зато небо несравненно яснее, чем у берегов океана.

1 сентября они обосновались уже в Боссекопе и установили свои многочисленные инструменты: телескопы, теодолиты, огромные буссоли, барометры, термометры, актинометры, пиргелиометры и др. Маленький деревянный дом, купленный ими, был обращен в астрономическую обсерваторию; пять соседних хижин были превращены в метеорологические, магнитные обсерватории. Боссекоп расположен под 69°58′ сев. ш., т. е. на 3°25′ севернее Полярного круга. С середины ноября стала показываться только верхняя часть солнечного диска. С 17 ноября солнце совершенно скрылось. В течение некоторого времени еще южный горизонт к полудню прояснялся слабым сумеречным светом, но вскоре и этот свет исчез. Воцарилась безрассветная ночь. Только 31 показался краешек солнечного диска. Первые лучи, брошенные солнцем на землю, были встречены народом, расположившимся на крышах и холмах, криками восторга. Началось празднование «Пробуждения солнца» от сна, продолжавшееся около двух с половиной месяцев. Постоянный день полярного лета имел уже издавна своих наблюдателей, но для ожидания празднования «Пробуждения солнца» в Боссекопе нужно было иметь много мужества и много горячей любви к науке.

Все метеорологические элементы Боссекопа были тщательно собраны исследователями, производившими наблюдения каждые два часа, а иногда и ежечасно, и опубликованы в огромном труде северной научной экспедиции. Четыре наблюдателя распределили между собой время труда и отдыха. Одни следили за пертурбациями магнитной стрелки и определяли положение ее каждые пять минут; другие на чистом воздухе определяли различные фазы Солнца и измеряли его высоту над горизонтом. Металлические части их инструментов настолько охлаждались, что приходилось покрывать их сукном, иначе кожа пальцев моментально приклеивалась к металлу. Когда же случалось особенно интересное явление, например полярное сияние являлось в особенном блеске, тогда уже никто не думал об отдыхе. Несколько глотков кофе помогали бороться со сном, особенно властным среди постоянной полярной ночи.

Кроме участия в общей работе, О. Браве успел написать еще за это время «Mémoire sur les aurores boréales», который был высоко оценен самыми компетентными в этой области судьями.

После семимесячного пребывания в Боссекопе 19 апреля 1839 г. наблюдатели отправились в Гаммерфест, где им предстояло закончить различные работы и ждать прихода корвета, который должен был вторично отвести их на Шпицберген.

Северная природа с удивительной, ей одной свойственной быстротою внезапно ожила. Браве не мог противостоять желанию заняться ботаникой. К несчастью, собираясь сорвать какой-то цветок над ущельем скалы,

он оступился и сломал себе колено. В течение нескольких недель он должен был оставаться неподвижным. Пришел корвет. Все товарищи Браве перешли на «La Recherche». Он один должен был оставаться в Гаммерфесте до конца лета. Не падая духом, несмотря на такое неприятное стечение обстоятельств, Браве продолжал работать: производил метеорологические и магнитные наблюдения и собирал материал, насколько позволяло здоровье, для своих двух больших работ: о морских приливах и о древнем уровне моря.

Такой образ жизни вел Браве до возвращения корвета в Гаммерфест. Здесь ученые снова разделились на маленькие группы. Браве, несмотря на неполное выздоровление, присоединился к доктору Мартэну, чтобы следовать сухим путем. Измеряя различные высоты, собирая растения и так далее, прошли они Лапландское плато. Глухие шведские леса представляли богатый материал для их ботанических наблюдений, результатом которых было, между прочим, появление «Исследования о росте Pinus sylvestris». В Стокгольме они проверили свои инструменты. Такая проверка производилась во всех больших городах, встречавшихся на их пути до Парижа, куда они прибыли в январе 1840 г. Морской министр поручил Браве обработать для печати весь собранный материал по физике.

Выполнение этого поручения не требовало постоянного пребывания Браве в Париже; считалось возможным совместить это занятие с преподавательской деятельностью в каком-нибудь университете. Поэтому 1 февраля 1841 г. он был назначен профессором прикладной математики в Лионском университете. Приготовление курса не помешало Браве написать в это же время несколько выдающихся астрономических работ. С двумя товарищами он основал в Лионе гидрометеорологическое общество. В течение трех лет Браве редактировал издание «Patris», для которого написал несколько статей по географии, физике и пр., отличающихся удивительно ясным и точным изложением.

Лион находился вблизи Савойи и Швейцарии, которые, без сомнения, привлекли внимание Браве. Им предпринимается целый ряд экскурсий, обогативших науку самыми разнообразными и серьезными данными. Он производит метеорологические наблюдения, ботанические исследования, наблюдения над сумеречной дугой и вычисления высоты атмосферы, измеряет температуру кипения воды при различных давлениях, скорость распространения звука и прочее. Не довольствуясь этим, Браве задумывается над восхождением на Монблан. Первый физик, взошедший на Монблан 3 августа 1787 г., был Соссюр. С этого времени физика, быстро прогрессируя, стала задавать все новые и новые вопросы в этой области, и наблюдения над различными феноменами с помощью более совершенных инструментов были очень желательными. Вторыми, поднявшимися на Монблан, были Браве с двумя товарищами. Большое удовольствие может доставить чтение тех страниц, в которых О. Браве описывает свою экскурсию на Монблан. Нужно было питать большую любовь к науке, к природе, уметь

переносить самые разнообразные лишения, чтобы добиться того, что сделано отважными путешественниками.

Вскоре Браве принужден был оставить Лион, потому что началось печатание трудов северной экспедиции. Товарищи выражали большое сожаление, так как успели очень полюбить О. Браве, действительно привлекавшего к себе своими нравственными достоинствами. У него был веселый и вместе с тем вдумчивый характер. Добрый, мягкий и бескорыстный Браве был прекрасным товарищем, всегда готовым подать совет, если к нему обращались. К своим обязанностям он относился со скрупулезной точностью. Курс его привлек многих слушателей. Он умел оживить, придать особенный смысл самому сухому математическому вопросу.

В этот же период Совет Политехнической школы предлагает Браве занять кафедру физики. Приготовление нового, обширного курса придало несколько особенный характер его трудам. В эту пору появляются его глубокомысленные сочинения по атмосферной оптике (радуге) и молекулярному строению тел.

Уже в предыдущих работах ему часто приходилось касаться кристаллических тел: особенно много соображений по поводу кристаллов (льда) было высказано им в последней работе о радуге. Вскоре кристаллография стала привлекать его все больше и больше; он и создает на этом поприще труды, которым суждено было стать бессмертными. Одна за другой появляются такие блестящие работы, как «Note sur les polyèdres symétriques de le géométrie», «Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique» (Journ. de mathématiques, t. XIV), «Mémoire sur les systèmes, formés par des points» (J. de l'Ecole polytechnique, t. XIX), «Etudes cristallographiques» (J. de l'Ecole polytechnique, t. XX).

В начале 1854 г. в Академии наук, в секции географии и мореплавания, освободилось место, на которое был избран О. Браве. Не раз потом приходилось академикам выслушивать серьезные и важные доклады своего молодого товарища.

Казалось, что в Браве нет никакой перемены, что он также бодр и энергичен, но семейные несчастья, имевшие место в это время, наложили на него глубокий отпечаток.

В 1847 г. О. Браве женился на любимой им девушке. Счастливый в своей семейной жизни, он особенно энергично работал в эти годы. Но в 1853 г., за год до избрания О. Браве в академики, умирает его отец, а затем через самый короткий срок умирает его единственный сын. Этот последний удар был роковым для О. Браве. Желая заглушить тоску, он предается самым усиленным занятиям, не зная отдыха. Нарушения гигиенических правил в молодости, когда он проводил ночи напролет за занятиями математикой в каюте «Le Loiret», мало чем сказывались на здоровом, молодом организме; теперь же в более зрелом возрасте, при подавленном нравственном состоянии такое пренебрежительное отношение к своему здоровью имело самые пагубные последствия. Браве стал страдать бессонницей. Работа не давалась уже ему, как прежде. Память его слабела все больше и больше.

Он с ужасом видел, что ум его, еще так недавно смелый и блестящий, меркнет день ото дня. Вскоре пришлось прекратить преподавание в Политехнической школе и оставить Академию. Обнаружилась мозговая болезнь, сопровождаемая сильными страданиями, которые Браве переносил с удивительным терпением. Жена отвезла его в Версаль, надеясь, что спокойная сельская жизнь поправит расстроенное здоровье мужа.

Физически Браве был достаточно бодр. Каждый день он отправлялся на прогулку, часто в сопровождении своих друзей. Но память совсем оставила его: он не узнавал ни предметов, ни лиц, окружавших его. Какую грустную картину представлял этот светлый, острый ум, преждевременно и невозвратно померкший!

30 марта 1863 г. О. Браве скончался.



ДОКЛАДЫ О. Л. КОШИ О ТРУДАХ О. БРАВЕ

ДОКЛАД О МЕМУАРЕ О. БРАВЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ИЛИ СОВОКУПНОСТЕЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК *

Члены комиссии: гг. Био, Бедан, Дюфренуа, Ренье, Ламе, Коши — докладчик.

Одним из наиболее значительных применений геометрии является новая наука, созданная в конце прошлого века автором «Опыта теории структуры» (Р.-Ж. Гаюи). После того как было замечено, что кристаллы представляют собой совокупность однородных молекул, наш знаменитый Гаюи нашел законы объединения и взаимного расположения в кристалле различных молекул. К наблюдениям, которые были им проведены, присоединены новые факты. Обогащенная плодотворными размышлениями минералогов эта наука совершенствовалась, смогла участвовать в развитии молекулярной физики. Тем не менее О. Браве считает, что кристаллография должна быть улучшена. Он исследовал весьма интересные свойства произвольных систем материальных точек, которые могут быть использованы для классификации кристаллов. Изучение этих свойств и их характера является предметом рецензируемого мемуара.

Рассмотрим три последовательности равноудаленных параллельных плоскостей, причем плоскости одной последовательности не параллельны плоскостям другой. Совокупность точек, в которых пересекутся все эти плоскости, будет образовывать ретикулярную систему. Эта система (по замечаниям различных авторов, особенно Делафосса) будет представлять систему точек, с которой в некотором кристалле совпадают центры различных молекул. При этом все три последовательности плоскостей, каждая из которых называется ретикулярной плоскостью (по Браве), разделяют пространство на равные между собой элементарные параллелепипеды. Различные точки системы, содержащиеся в одной и той же ретикулярной

* Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 6 août, 1849, t. XXIX, p. 133.

плоскости, образуют сетку. Клетки этой сетки образуют элементарные параллелограммы, которые служат основанием параллелепипедов. Цепочки образуют стороны этих параллелограммов, и точки их пересечения являются узлами упомянутых параллелограммов. О. Браве назвал параметрами длины этих трех ребер элементарного параллелепипеда, прилегающих к одной вершине. Тетраэдр, построенный на этих трех ребрах, назван автором элементарным. Треугольник, имеющий в качестве сторон две смежные грани элементарного параллелограмма, называется элементарным. Исходя из этого, с помощью геометрии и анализа О. Браве установил общие свойства решеток. Он доказал, в частности, что узлы решеток в то же время задают узлы бесконечного числа других решеток, цепочки которых пересекаются под различными узлами, но площади клеток которых одинаковы. Он доказал, что среди всех возможных элементарных треугольников существует один и толко один треугольник, все три угла которого острые. Ему было дано название основного треугольника. Он имеет в качестве сторон три наименьших параметра, которые можно получить при соединении узлов заданной сетки.

Установив свойства сеток, О. Браве нашел свойства совокупностей (ретикулярных систем). Он распознал, что узлы, объединяющиеся в ретикулярную систему, могут быть представлены бесконечным количеством различных способов как пересечение трех последовательностей параллельных плоскостей, которые соответствуют равным по объему порождающим параллелепипедам различной формы. Он доказал, что среди элементарных тетраэдров, соответствующих ретикулярной системе, т. е. заданной системе узлов, существует основной тетраэдр, в котором каждый двугранный угол либо острый, либо прямой. Одному из оснований этого тетраэдра отвечают два наименьших параметра, которые можно получить, соединяя друг с другом заданные узлы. Наконец, О. Браве назвал осью симметрии ретикулярной системы прямую, выбраную так, что достаточно повернуть систему вокруг этой оси на некоторый угол, чтобы привести узлы к самосовпадению. Он доказал, что угол, который служит мерой вращения, должен быть равен 60, 90, 120, 180°. Так как отношение длины окружности к длине дуги поворота может быть равно 2, 3, 4, 6, то симметрия, следуя терминологии О. Браве, может быть двойной, тройной, четверной и шестерной. С другой стороны, ясно, что если система узлов поворачивается вокруг оси, проходящей через некоторую точку, то движение всей системы вокруг этой оси не отличается от движения вокруг параллельной оси, проходящей через некоторый узел с позиции наблюдателя, совпадающей с тем же узлом. Отсюда непосредственно следует, что всякой оси симметрии, не проходящей ни через один узел данной системы, всегда соответствуют параллельные ей другие оси симметрии, проходящие через различные узлы системы.

Следовательно, всякая ось симметрии, проходящая через заданный узел, обязательно совпадает либо с одним из ребер элементарного параллелепипеда, имеющего этот узел в качестве вершины, либо с одной из диаго-

налей этого параллелепипеда, либо с диагональю одной из его граней. На основе этих принципов можно, как это сделал О. Браве, классифицировать различные ретикулярные системы (точнее, возможные системы узлов) по числу и природе осей симметрии, проходящих через заданный узел. Автор выделил семь классов совокупностей, или систем узлов, различных между собой по выделенным только что признакам.

Системы первого класса, соответствующего первой кристаллической системе минералогов, обладают четырьмя тройными осями, тремя четверными осями и шестью двойными. Этому классу отвечают следующие формы: куб; центрированный куб, ромбоэдр в 120°, октаэдр с квадратным основанием; правильный тетраэдр, правильный октаэдр или ромбоэдр с углом 70°31′44″.

Системы второго класса, соответствующие второй кристаллической системе минералогов, обладают единственной четверной осью и четырьмя двойными осями симметрии. Этому классу отвечают формы: прямая призма с квадратным основанием, прямая центрированная призма с квадратным основанием или октаэдр с квадратным основанием.

Системы третьего класса обладают единственной шестерной осью и шестью двойными осями. Этот класс представлен единственной формой — прямой призмой с основанием в виде равностороннего треугольника.

Системы четвертого класса имеют единственную ось третьего порядка и три двойные оси. В этом классе есть одна форма — ромбоэдр, в котором противолежащие вершины являются выходами тройной оси симметрии. Шесть других вершин яляются вершинами двух равносторонних треугольников, плоскости которых параллельны между собой и делят на три равные части соответствующую диагональ. Третий и четвертый классы соответствуют третьей кристаллической системе минералогов.

Системы пятого класса, соответствующие четвертой системе минералогов, обладают тремя двойными осями. Этот класс дает четыре различные формы: центрированный или нецентрированный прямоугольный параллелепипед и такой же параллелепипед, имеющий две или шесть центрированных граней.

Системы шестого класса, соответствующие пятой кристаллической системе минералогов, имеют одну двойную ось. Этот класс представлен двумя формами: прямая центрированная или нецентрированная призма, имеющая в основании параллелограмм.

Системы седьмого класса, соответствующие шестой кристаллической системе минералогов, не обладают осями симметрии. Этому классу отвечает одна форма: косая призма с основанием в виде параллелограмма.

В целом различные кристаллические системы характеризуются числом и природой их осей симметрии. Расположив эти системы в порядке, указанном числом этих осей, получаем следующую таблицу.

О. Браве вывел различные теоремы, касающиеся подобных граней (точнее, сходных), которые переходят друг в друга при повороте ретикулярной системы вокруг некоторой оси симметрии.

Системы	Число осей симметрии				Общее число осей симметрии
	двойные	тройные	четверные	шестерные	
Тричетверная	6	4	3	—	13
Шестерная	6	—	—	1	7
Четверная	4	—	1	—	5
Тройная	3	1	—	—	4
Тридвойная	3	—	—	—	3
Двойная	1	—	—	—	1
Асимметричная	—	—	—	—	0

Члены комиссии считают, что в этой новой работе О. Браве дал новые доказательства своего таланта, которые он нам продемонстрировал в других изысканиях.

Следовательно, мы придерживаемся мнения, что представленный на рассмотрение мемуар вполне достоин одобрения Академией и опубликования в Le Recueil des Savants étrangers.

Заключения этого доклада приняты.

ДОКЛАД О МЕМУАРЕ, ПРЕДСТАВЛЕННОМ О. БРАВЕ ПОД ЗАГЛАВИЕМ «ЭТЮДЫ ПО КРИСТАЛЛОГРАФИИ» *

Члены комиссии: гг. Дюфренуа, Реньо, Ламе, Коши — докладчик.

В предшествующем мемуаре, который Академия на основании доклада, предствленного шестью ее членами, полагает достойным одобрения, О. Браве рассмотрел систему материальных точек, с которыми совпадают в некотором кристалле центры тяжести различных молекул. Исходя из замечаний, сделанных различными авторами, особенно Делафоссом, эти центры образуют ретикулярную систему. Они сводятся к точкам, в которых пересекаются равноудаленные параллельные плоскости с двумя другими последовательностями параллельных равноудаленных плоскостей. Отсюда О. Браве сделал вывод о необходимости тщательного изучения природы и свойств произвольной ретикулярной системы. Сетки имеют в качестве узлов точки системы, принадлежащие одной из ретикулярных плоскостей. Три последовательности ретикулярных плоскостей делят пространство на равные элементарные параллелепипеды. Узлы сетки дают в то же самое время узлы бесконечного числа других сеток, цепочки которых пересекаются под различными углами, но клетки которых всегда равны по площади первоначальной клетке. Называя осью симметрии ретикулярной системы таким образом выбранную прямую, что достаточно повернуть систему вокруг этой прямой на некоторый угол, чтобы достичь наложения

* Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 25 février 1851, t. XXXII, p. 284.

различных узлов друг на друга, он доказал, что угол, служащий мерой вращения, должен обязательно быть равным 60, 90, 120, 180°. Следовательно, отношение длины всей окружности к длине дуги поворота не может быть иным, кроме 2, 3, 4, 6. Симметрия ретикулярной системы, по терминологии О. Браве, может быть двойной, тройной, четверной и шестерной. Наконец, после установления этих принципов, автор заметил, что они могут быть эффективно использованы при классификации кристаллов. Классифицируя различные ретикулярные системы, или, точнее, системы узлов, которые они могут образовывать, по числу и природе их осей симметрии, О. Браве выделил семь различных систем, характеризуемых осями симметрии. Эти системы мы упоминали в первом докладе: тричетверная, шестерная, четверная, тройная, тридвойная, двойная, асимметричная системы.

В новом мемуаре, который мы рассматриваем, О. Браве не ограничился исследованием свойств ретикулярной системы, образованной центрами тяжести молекул кристалла. Проникая в глубины науки, он изучил различные формы, которые могут образовывать кристаллические молекулы, и влияние, которое эти формы могут оказывать на кристаллизацию.

Еще в мемуаре, представленном Академии 31 августа 1840 г., г. Делафосс обратил внимание на это влияние и заметил, что его достаточно для объяснения кажущихся исключений из закона симметрии, рассматриваемых как аномальные постоянные в некоторых минералах, как пирит, борацит, турмалин, кварц и т. д. Он настаивал на том, что две геометрически сходные части кристалла могут иметь различную структуру или молекулярное строение и что в этом случае нельзя говорить об их идентичности. Делафосс, приписывая образованию кристаллов так называемую гемиэдрию особенностей, которые характеризуют их молекулярное строение, нашел, например, применение гемиэдрии в бораците в тетраэдрической форме молекулы и гемиэдрии кварца в способе искажения ромбоэдрических молекул.

Но, подтверждая этот принцип (форма молекулы оказывает заметное влияние на кристаллизацию), О. Браве приходит, кроме того, к замечательному выводу, что для объяснения всех явлений гемиэдрии достаточно принять во внимание это влияние и эффекты, которые оно может порождать. Для доказательства этого предположения О. Браве начал исследовать различные виды симметрии, которыми могут обладать кристаллические молекулы, рассматриваемые как системы атомов, занимающие вершины многогранников. Затем он исследовал законы, по которым симметрия молекулы частично передается ретикулярной системе, образованной центрами тяжести различных молекул, из которых слагается кристалл. Остановимся более детально на этих двух вопросах.

О. Браве сначала заметил, что многогранник может иметь три вида элементов симметрии: точечный элемент — центр симметрии, линейный элемент — ось симметрии, плоский элемент — плоскость симметрии.

Центр симметрии многогранника — это точка, которая расположена посередине диагоналей, соединяющих попарно взятые противоположные вершины.

Прямая является осью симметрии многогранника, если достаточно сообщить ему вращение вокруг этой оси на некоторый угол, чтобы получить наложение вершин друг на друга. Отношение окружности к наименьшей дуге поворота всегда является целым числом, определяющим порядок симметрии оси. Но это число может быть некоторым целым числом, большим единицы, следовательно, многогранник может обладать не только двойными, тройными, четверными и шестерными осями, как ретикулярная система, но и пятерными, семерными и т. д. осями симметрии.

Тот же многогранник может обладать осями симметрии различных порядков. Две оси одного порядка будут одного рода, если совмещение этих осей влечет совмещение вершин. Они будут различного рода в противоположном случае. В заданном многограннике число разного рода осей симметрии не может превышать трех, но может быть ему равным. Так, например, в кубе ось симметрии может быть двойной осью, соединяющей середины противолежащих ребер, или тройной осью, совпадающей с диагональю, соединяющей противоположные вершины, или четверной осью симметрии, соединяющей центры противолежащих параллельных граней.

Наконец, плоскостью симметрии в заданном многограннике будет плоскость, которая делит многогранник на две симметричные части, причем вершины будут расположены попарно на равном расстоянии от плоскости на прямых, которые ей перпендикулярны. При этом плоскости симметрии, как и оси симметрии, могут быть одного рода и разных родов. В заданном многограннике число различных родов плоскостей симметрии не может превышать трех, но может равняться трем. Так, например, в многограннике, имеющем в качестве вершин вершины правильного шестиугольника и две точки, расположенные на равном расстоянии от плоскости шестиугольника на перпендикуляре, проведенном через центр шестиугольника, плоскостью симметрии может быть плоскость, проходящая через этот перпендикуляр и через две противолежащие вершины шестиугольника, либо через перпендикуляр и середины противолежащих сторон шестиугольника.

О. Браве доказал два следующих предположения. Если в многограннике существует две плоскости симметрии, то их пересечение обязательно будет осью симметрии.

Центр симметрии, плоскость симметрии и ось симметрии четного порядка — это три элемента, связанные между собой так, что присутствие двух элементов симметрии всегда влечет присутствие третьего.

Он назвал основной осью данного многогранника ту ось, которой все остальные оси или плоскости симметрии параллельны или перпендикулярны. Он отметил термином «сфероэдрические» многогранники, обладающие несколькими осями симметрии, но не имеющие главной оси.

О. Браве увидел, что многогранники, рассматриваемые исходя из их симметрии, можно разделить на 23 класса, распределенные между 6 различными группами.

Первая группа содержит все асимметричные многогранники, не обладающие ни осями, ни плоскостями, ни центром симметрии. Во второй группе все симметричные многогранники лишены осей симметрии. В третьей группе симметричные многогранники не имеют главной оси четного порядка. В четвертой группе симметричные многогранники не имеют главной оси нечетного порядка. К пятой группе относятся сфероэдрические многогранники с четырьмя тройными осями. К шестой группе — сфероэдрические многогранники с десятью тройными осями.

После изучения различных видов симметрии, которыми могут обладать, с одной стороны, ретикулярные системы и, с другой стороны, многогранники, представляющие молекулы тела и классы одних и других по числу и природе их элементов симметрии, осталось изучить, какими способами и до какой степени симметрия молекулы может быть перенесена при кристаллизации в ретикулярную систему, образованную центрами тяжести различных молекул, слагающих кристалл. Другими словами, речь идет о решении следующей проблемы.

Даны элементы симметрии молекулы. Найти кристаллическую систему, в которой объединяются эти и другие молекулы того же рода в процессе кристаллизации.

О. Браве отметил, что кристаллизация приводит молекулы в такие положения, что относительно взаимных действий они находятся в устойчивом равновесии. Исходя из этого, он показал, что равновесие легко установить в кристалле в процессе образования, если центры тяжести молекул располагаются таким образом, что оси и плоскости симметрии этих молекул, продолженные до бесконечности, становятся осями и плоскостями симметрии ретикулярной системы, образованной центрами тяжести. Он нашел, стало быть, возможным сформулировать следующее правило.

> Среди семи кристаллических систем молекулы заданного вещества выберут ту, которая будет иметь наибольшее общее число элементов симметрии с симметрией, свойственной соответствующему молекулярному многограннику.

Если многие кристаллические системы могут вследствие этого правила сочетаться с одной и той же молекулой, то та из них, которая обладает наибольшим числом элементов симметрии, будет в целом содержаться среди других как частный случай. Стало быть, молекулы такого вида будут встречаться с несравненно меньшей вероятностью. В результате О. Браве нашел следующее правило.

> Если несколько кристаллических систем имеют одни и те же общие с молекулярным многогранником элементы симмметрии, то кристаллизация пойдет в системе с наименьшей симметрией, т. е. в системе, которая оставляет наибольшее число неопреде-

ленных параметров среди 6 элементов, определяющих ее элементарный параллелепипед.

Использование двух общих правил, которые мы только что рассмотрели, позволило О. Браве не только объяснить различные явления гемиэдрии, наблюдаемой при кристаллизации, но и установить законы, управляющие этими явлениями и условиями, при которых они должны проявляться. Наблюдения показывают, что эти законы и условия справедливы. Столь же удачно то, что после упомянутых исследований ретикулярных систем понятие кристаллической формы (системы соседних граней, представляющих кристалл)* О. Браве применил к анализу сокращенного числа граней при гемиэдрии. Он показал, что с помощью его теории можно объяснить достаточно большое число случаев диморфизма, не исключая внутренней структуры молекулы.

Члены комиссии придерживаются мнения, что работа, представленная на рецензию, дала новые доказательства проницательности, которую О. Браве уже проявил в своих предыдущих изысканиях, и что эта работа, несомненно, будет способствовать развитию кристаллографии. Они считают, следовательно, что новый мемуар О. Браве достоин одобрения Академией и опубликования в Le Recueil des Savants étrangers.

Заключения этого доклада приняты.



* Среди теорем, доказанных О. Браве на эту тему, мы ограничимся следующей. Если грань кристаллической формы не параллельна и не перпендикулярна оси симметрии, то число граней, образующих форму, равно удвоенной сумме

$$1+N_2+2N_3+3N_4+5N_6,$$

где N_2, N_3, N_4, N_6 — число двойных, тройных, четверных и шестерных осей, которыми обладает система.

И. И. Шафрановский и П. Л. Дубов

РОЛЬ О. БРАВЕ В РАЗВИТИИ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Великий французский кристаллограф О. Браве (Auguste Bravais, 1811—1863) является одним из выдающихся основоположников современной структурной кристаллографии. Имя его навсегда связано с выведенными им четырнадцатью группами чистых трансляций, так называемыми «решетками Браве», лежащими в основе теории кристаллического строения. Незабываемы его заслуги и в разработке учения о симметрии вообще и симметрии кристаллов в частности. Творчество Браве оказало существенное влияние на дальнейшее развитие теоретической кристаллографии сперва во Франции (Э. Малляр, П. Кюри, Ф. Валлеран, Г. Фридель и др.), а затем и во всем мире. До сих пор в учебниках элементарной кристаллографии почти дословно повторяются сформулированные им определения основных элементов симметрии, используются предложенные им обозначения и формулы видов симметрии, не говоря уже об его теории решетчатого строения кристаллов, являющейся исходным пунктом учения о внутреннем кристаллическом строении.

В настоящем издании впервые публикуется полный русский перевод знаменитых «Этюдов по кристаллографии», изданных посмертно в 1866 г. и объединяющих все важнейшие кристаллографические сочинения О. Браве.

Цель этого очерка — выявить роль замечательного французского кристаллографа в развитии науки о кристаллах. Для этого нам придется обратиться к истории этой науки, отметив вкратце достижения его наиболее видных предшественников, а затем по возможности проследить и дальнейшее продвижение его идей и положений, так много способствовавших нынешнему расцвету теоретической и структурной кристаллографии.

Первые догадки о строго закономерном внутреннем строении кристаллических образований и связанной с ним симметрией относятся к далекому прошлому.

В 1611 г. гениальный И. Кеплер в небольшом трактате «О шестиугольном снеге»* задался вопросом о первопричине образования звездчатой

* J o a n n i s K e p l e r i s. C. Maiest. Mathematici Strena Seu de Nive Sexangula. Francofurti ad Moenum, apud Godefridum Tampach. MDCXI, p. 21.

шестиугольной формы снежных кристалликов. «Почему только что выпавшие снежинки, прежде чем сбиться в крупные хлопья, всегда являются шестиугольными, пушистыми, как перышки, с шестью лучами?» — вопрошает он.* Далее мысль его обращается к причинам, заставляющим «первичные элементы» снега принимать шестиугольные контуры: «Так как всякий раз, когда падает снег, его первичные элементы неизменно имеют форму шестиугольной звездочки, то это должно иметь определенную причину. Ибо если это случайность, то почему точно так же не выпадают пятиугольные или семиугольные звездочки?»** Нельзя не отметить глубину и дальновидность заданного вопроса. Лишь через двести с лишним лет Браве доказал невозможность существования в кристаллах пятерных и семерных осей симметрии (так же как и осей более высоких порядков), несовместимых с решетчатым строением кристаллических структур. Сперва Кеплер пытается найти причину шестиугольной формы снежинок в природе пара («ведь вещество снега есть пар»). Однако пар «не имеет никакой фигуры», пока не превратится в воду или снег, и, следовательно, искать ответ в его строении невозможно.

В связи с этими затруднениями ученый переходит к обзору известных ему шестиугольных природных образований. Он вспоминает о пчелиных ячейках, имеющих форму ромбододекаэдров, вытянутых вдоль одной из тройных осей симметрии. При этом шесть граней, параллельных тройной оси, образуют как бы гексагональную призму. Грани призмы соприкасаются с шестью соседними ячейками, заполняя без промежутков массу слоя соответственных ячеек. Сечение, перпендикулярное граням шестигранных призм, дает узор, состоящий из равных и параллельных шестиугольников, нацело покрывающих плоскость. Ромбододекаэдры при условии равенства, параллельной ориентировки и смежности по целым граням нацело заполняют пространство, т. е. принадлежат к тем геометрическим фигурам, которые великий русский кристаллограф Е. С. Федоров (1853—1919) назвал в 1885 г. «параллелоэдрами». Вот как пишет об этом сам Кеплер: «Итак, мы имеем дело с известной геометрической фигурой, наиболее правильной, заполняющей пространство так же, как, например, шестиугольник, четырехугольник, треугольник заполняют плоскости».*** Далее ученый обращает внимание на то, что форма зерен внутри плода граната также соответствует ромбододекаэдру. Естественно возникает вопрос: «Кто виновник ромбической (ромбододекаэдрической, — *И. Ш.*, *П. Д.*) фигуры в ячейках пчел и зернышках финикийского яблока (граната)?»**** И здесь Кеплер вспоминает о следующем опыте: одинаковые шарики из мягкого вещества, помещенные в круглый сосуд, сжимаемый со всех сторон медными обручами, принимают форму ромбических тел, т. е. ромбодо-

* И. И. Ш а ф р а н о в с к и й. Кристаллографические представления И. Кеплера и его трактат «О шестиугольном снеге». М., «Наука», 1971, стр. 3.

** Там же.

*** Там же, стр. 4.

**** Там же.

декаэдров. Отсюда он приходит к идее о геометрии шаровых упаковок, играющей и ныне основополагающую роль в структурной кристаллографии.

Обзор различных возможных шаровых упаковок привел его к выводу плотнейшей шаровой кубической упаковки (центры шаров образуют кубическую центрогранную решетку *F*) и двух менее плотных упаковок — простой гексагональной (решетка *H*) и простой кубической (решетка *P*). Плотнейшая гексагональная шаровая упаковка осталась ему неизвестной. Она была открыта В. Барлоу лишь в конце XIX столетия. Исходя из шаровых укладок путем всестороннего их сжатия, Кеплер выводит три идеальных параллелоэдра: ромбододекаэдр, гексагональную призму с пинакоидом и куб (кубооктаэдр Федорова был им пропущен).

Применяя к снежинкам построение из шаровых частиц, Кеплер близко подходит к современным понятиям о строении кристаллов, однако он не принимает окончательного решения и оставляет вопрос открытым.

Несмотря на это, мы видим в нем одного из самых первых предшественников не только Браве, но и позднейших ученых-теоретиков кристаллографии во главе с Е. С. Федоровым.

В 1667 г., т. е. через пятьдесят шесть лет после Кеплера, в «Микрографии» известного английского физика Р. Гука (1635—1703) снова развивается мысль о сложении кристаллов из шарообразных частиц.* К такому выводу этот замечательный исследователь пришел, рассматривая под своим микроскопом мелкие осколки алмаза с треугольными и шестиугольными очертаниями. Объектами его наблюдений являлись также кристаллики алюмокалиевых квасцов, поваренной соли, горного хрусталя и других веществ.

«Думаю, — пишет Гук, — что, обладая достаточным временем и необходимыми возможностями, я мог бы доказать положение, согласно которому все эти правильные фигуры (кристаллы, — *И. Ш.*, *П. Д.*), поразительно разнообразные и причудливо украшающие великое множество тел, образуются в результате лишь трех или четырех расположений или комбинаций сферических частиц. . . Последнее я продемонстрировал ad oculum с помощью нескольких шаровидных ядер и некоторых других очень простых тел. Я убедился, что не было ни одной из известных мне правильных фигур, ни одного из вышеупомянутых тел, которых я не мог бы воспроизвести, сочетая круглые ядра или шарики, а иногда даже просто механически соединяя их вместе».** Прекрасные гравированные изображения спайных осколков алмаза и соответственных построений из шаров наглядно иллюстрируют сказанное.

В 1669 г. вышли в свет два сочинения, заложивших основу будущей геометрической и физической кристаллографии. В первом из них, в трактате «О твердом, естественно содержащемся в твердом», Н. Стенон (1638—

* R. Hooke. Micrographia. London, 1667, p. 85, 86.

** Р.-Ж. Гаюи. Структура кристаллов. Сер. «Классики науки». М.—Л., 1962, стр. 153, 154.

1686) впервые на примере кварца отметил закон постоянства углов для кристаллов определенного вещества.* Во втором трактате Э. Бартолин (1625—1698) описывал «опыты с двупреломляющим исландским кристаллом, которые привели к открытию чудесного и необычного преломления», т. е. двупреломления.** Оба вышеназванных датских ученых, являясь основоположниками кристалломорфологии и кристаллофизики, должны быть упомянуты среди ранних предшественников Браве, хотя они и не высказывали своих суждений о внутреннем строении кристаллов.

Снова к этому вопросу обратился итальянец Д. Гуглиельмини (1655—1710) в небольшом сочинении «Философские размышления, выведенные из форм солей» (1688).*** В отличие от Кеплера и Гука он представлял себе кристаллические структуры сложенными не из шарообразных частиц, а из мельчайших многогранников. Так, например, октаэдрическим кристаллам алюмокалиевых квасцов им приписывается сложение из крохотных октаэдров с тетраэдрическими пустотами между ними. Таким образом, внешний облик кристалла Гуглиельмини пытался связать с формой полиэдрических элементарных частиц.

Вслед за Стеноном и Бартолином он обратил особое внимание на спайность кристаллов и высказал мысль об ее структурной природе: по его предположению, плоскости спайности проходят параллельно граням элементарных полиэдров. Основные формы солей сводились им к кубу, октаэдру, шестигранной и косоугольной призмам. Силы, соединяющие элементарные частицы в кристаллические тела, по Гуглиельмини, имеют магнитный характер.

Х. Гюйгенс (1629—1695) в «Трактате о свете» **** развивает идеи Кеплера и Гука. Спайность по ромбоэдру и оптические свойства исландского шпата объясняются им с помощью гипотезы, согласно которой кристаллы кальцита построены из мельчайших сплющенных эллипсоидов вращения. «Так как углы нашего кристалла и способ, которым он раскалывается, точно соответствуют тому, что получается для фигуры, составленной таким образом из сфероидов, мы имеем большое основание полагать, что частицы его образованы подобным же образом», — заключает он.*****

В своих высказываниях о внутреннем строении кальцита Гюйгенс всецело основывается на форме гипотетических частиц. Однако, по справедливому замечанию Е. С. Федорова, «сущность дела не в форме мельчайших слагающих элементов кристалла, а в их расположении».****** Именно такой подход к вопросу о строении исландского шпата дан в «Оптике»

* N. Stenonis. De Solido Intra Solidum Naturaliter Contento. Florentiae, 1669.

** Erasmi Bartholini. Experimenta Crystalli Islandici Distiaclastici quibus mira et insolika Refractio detegitur. Hafniae, 1969.

*** Domenico Guglielmini. Reflessioni Filosofiche Dedotte dalle Figure de Sali. . . In Bologna, MDCLXXXIX.

**** Chr. Huygens. Traité de la lumière. . . Leyden, 1690.

***** Гюйгенс. Трактат о свете. М.—Л., 1935, стр. 120.

****** Е. С. Федоров. Из итогов 35-летия. М., 1904, стр. 11.

И. Ньютона (1643—1727).* «Частицы исландского шпата, — пишет он, — действуют на лучи все в одном направлении, вызывая необыкновенное преломление; поэтому нельзя ли предположить, что при образовании этого кристалла частицы не только установились в строй и ряды, застывая в правильных фигурах, но также, посредством некоторой полярной способности, повернули свои одинаковые стороны в одинаковом направлении?»** В этой цитате, как указывает акад. С. И. Вавилов, совершенно четко сформулирована идея кристаллической решетки.***

В середине XVIII в. замечательные мысли о кристаллах были высказаны М. В. Ломоносовым (1711—1765). Год написания его диссертации «О рождении и природе селитры» (1749) можно считать датой зарождения русской научной кристаллографии. Строение кристаллов селитры представлялось ему в виде плотнейшей укладки из шаровых частиц. Таким образом, Ломоносов выступил сторонником гипотез Кеплера и Гука, развивая идею о сложении кристаллов из шарообразных корпускул.

Приведем выдержку из вышеупомянутой диссертации, ярко выражающую представления нашего ученого о строении кристаллических тел. «Частичка селитры, если мы предположим ее сферической формы (а такую по большей части имеют ничтожнейшие природные тела, собирающиеся в кучу), позволит очень легко объяснить, почему селитра вырастает в шестиугольные кристаллы. Правда, все это основано на одном почти что воображении, однако превосходно отвечает природе составных частей селитры и потому как бы доставляет некоторую поддержку. Пусть шесть корпускул расположены друг около друга так, что прямые линии, соединяющие их центры, образуют равносторонние треугольники; в результате получится фигура, ограниченная шестью линиями, подобная призмам, образуемым селитрою. . . Углы кристаллов селитры соответствуют предполагаемому расположению частичек, так как большинство их в отдельности составляет 120°. . . На основании нашей гипотезы можно легко объяснить другие роды кристаллов, например кубические кристаллы поваренной соли, где линии, проходящие через центры частичек, составляют квадраты».**** В приведенном отрывке Ломоносов не только обосновывает теорию кристаллической структуры, но и вполне отчетливо формулирует закон постоянства углов исходя из гипотезы о строении кристаллов из шарообразных частиц.

В «Рассуждении о жидкости и твердости тел» (1766) им описывается пространственное расположение шариков, слагающих кристалл. Это описание, а также приложенная к оригинальному тексту гравюра показывают, что ученый различал два типа шаровых укладок: плотнейший и разре-

---

* J. Newton. Opticus or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. London, 1721.

** И. Ньютон. Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. Перев. С. И. Вавилова. М., 1954, стр. 294, 295.

*** Там же, стр. 361.

**** М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч., т. 2. М.—Л., 1951, стр. 273—275.

женный. Первый соответствует кубической центрогранной решетке (на плоскости шарики располагаются в виде ромбов и шестиугольников), второй образует простую кубическую решетку (плоскостное расположение шариков отвечает квадратам).

Свои теоретические взгляды Ломоносов применял на практике. Большое значение для того времени имело высказанное им положение о постоянстве (вернее, характерности) форм кристаллов рудных минералов: «Руды показываются двояким образом, из которых иные держатся свойственной себе постоянной фигуры, как кубические марказиты (пирит, — *И. Ш.*, *П. Д.*), желтый сферический колчедан (халькопирит, — *И. Ш.*, *П. Д.*), угловатый белый колчедан, иглам подобная сурьма (антимонит, — *И. Ш.*, *П. Д.*) и многие другие», — читаем мы в ломоносовском «Слове о рождении металлов» (1757).*

Для того чтобы понять важность этого положения, предвосхитившего закон Браве о важнейших гранях, достаточно противопоставить ему мнение известного французского натуралиста Ж. Бюффона (1707—1788), согласно которому «кристаллическая форма не имеет постоянного характера и более разнообразна и изменчива, нежели любой признак, позволяющий различать минералы».**

Ломоносову же принадлежат одни из самых ранних измерений углов на кристаллах. В этом отношении нижеследующая выдержка из знаменитого ломоносовского трактата «О слоях земных» занимает почетное место в истории кристаллографии. «Наконец, отличною фигурой известные*** и больше всех дорогие камни последуют в своем рождении законам геометрическим углами и плоскостями. Многие из них родятся ромбоической фигуры, имея два угла по шестьдесят и два по сто двадцать градусов, что я нарочно мерил у некоторого немалого неграненного алмаза и у других прозрачных камней».****

Закон постоянства кристаллографических углов снова привлек внимание ученых лишь в самом конце XVIII в. Он окончательно утвердился в науке после выхода в свет «Кристаллографии» французского естествоиспытателя Ж. Б. Ромэ-Делиля (1736—1790), который утверждал, что грани кристалла могут изменяться по своей форме и относительным размерам, но их взаимные наклоны постоянны и неизменны для каждого рода кристаллов. В этой формулировке Ромэ-Делиль обобщил свои многолетние труды по измерению многочисленнейших углов на кристаллах разнообразных веществ. Закон постоянства углов явился надежным фундаментом для развития геометрической кристаллографии и, помимо этого, дал

* То же, т. 5. М.—Л., 1954, стр. 340.

** M. De Romé de l'Isle. Cristallographie.. ., v. 1, Paris, 1783, p. XVIII.

*** М. В. Ломоносов. Полн. собр. соч., т. 5, стр. 599. Очевидно, Ломоносов измерял кривогранный кристалл алмаза ромбододекаэдрической формы. Плоские углы на гранях ромбододекаэдра равны 70°38' и 109°28'.

**** См. в кн.: Н. Стенон. О твердом, естественно содержащемся в твердом. М.—Л., 1957, стр. 138.

богатейший материал для установления истинной симметрии кристаллических тел. Вместе с тем, подобно своему прямому предшественнику Н. Стенону, Ромэ-Делиль, старательно изучая кристаллы и измеряя углы между гранями, не позволял себе углубляться в рассуждения о внутреннем кристаллическом строении. «Ограничимся же тем, что нам дается наблюдением, если мы не хотим подменить плодами нашего воображения величественного молчания природы относительно ее первичных элементов», — демонстративно провозглашал осторожный ученый.* Такого же взгляда придерживался и глава описательной немецкой минералогической школы А. Г. Вернер (1749—1817), обращавший все свое внимание на внешние признаки, а в том числе и внешние формы минералов.

Гораздо смелее в этом отношении был Р.-Ж. Гаюи (1743—1822), младший современник и удачливый соперник Ромэ-Делиля. Кристалл кальцита в виде гексагональной призмы, разбившийся на множество ромбоэдрических спайных осколков, навел ученого на мысль о новой теории строения кристаллов. Являясь прямым продолжателем идейной линии Кеплера, Гука, Ломоносова, Гаюи, в отличие от них, вслед за Гуглиельмини приписал элементарным кристаллическим частицам не шаровую, а полиэдрическую форму (до него, также основываясь на спайности, аналогичную идею выдвигал Т. Бергман). По воззрениям Гаюи, кристаллы представляют как бы своеобразные кладки из мельчайших «кирпичиков», соответствующих по форме предельно малым спайным осколкам. Закономерно уменьшая число «кирпичиков» в последующих наслоениях, слагающих кристалл, можно построить разнообразные формы одного и того же кристаллического вещества. Так, например, из «кубических частиц» по «законам убывания» складываются ромбододекаэдр, пентагон-додекаэдр, октаэдр и проч. Ясно, что грани в подобных постройках будут иметь характер лестничных ступенек, а не идеальных плоскостей. Такие мельчайшие ступеньки в большинстве случаев невидимы для глаз, но иногда они проявляются в виде штрихов, бороздок и проч.

Как указывалось выше, основным материалом для построения теории Гаюи служили спайные осколки, тщательно изучавшиеся и измерявшиеся с помощью прикладного гониометра. В связи с этим Ромэ-Делиль, враждебно настроенный против теории Гаюи, ядовито называл его «кристаллокластом», т. е. «раскалывателем кристаллов». Чисто опытным путем Гаюи нашел следующие пять типов примитивных спайных «кирпичиков»: параллелепипед, гексагональную призму, ромбододекаэдр, октаэдр и тетраэдр. За исключением двух последних, все соответствуют федоровским «параллелоэдрам», однако, в отличие от Федорова, Гаюи не вывел их теоретически, а нашел экспериментально. (Среди «примитивных форм» Гаюи, так же как и у Кеплера, отсутствует фёдоровский «гептапараллелоэдр» в виде кубооктаэдра). Дальнейшее деление примитивных форм вдоль плоскостей, параллельных их граням, приводит к осколкам в виде тетраэдров,

* Там же, стр. 143.

трехгранных призм и параллелепипедов. Этим простейшим по числу граней замкнутым многогранникам (тетраэдр — 4 грани, тригональная призма 5, параллелепипед — 6) Гаюи приписал роль «интегрирующих молекул». Складываясь, они образуют примитивные «кирпичики», а из последних строятся кристаллические образования. Анализ таких фигур показывает, кроме того, что все они могут складываться в системы параллелепипедов. Придя к выводу о наличии в каждом кристалле совокупностей мельчайших параллелепипедов, равных между собой и смежных по целым граням, Гаюи тем самым заложил основу для будущей теории параллелепипеидально-решетчатого строения кристаллов, развитой Браве. Как видим, несмотря на всю свою наивность с современной точки зрения, концепция старинного французского кристаллографа сыграла большую историческую роль. Мало того, отдельные ее детали, хотя и в измененном виде, дожили и до наших дней. Достаточно вспомнить хотя бы знаменитый закон рациональности двойных отношений параметров (закон Гаюи), на котором базируется современное учение о кристаллографических символах. Очень важно отметить также, что Гаюи одним из первых обратил внимание на симметрию кристаллов. «Законы убывания, — писал он, — подчиняются другому закону, который мы назовем законом симметрии. . . Идентичные части ядра (кристалла) обладают между собой таким сходством, что при их взаимной замене путем перемещения ядра относительно глаза облик ядра будет казаться неизменившимся».* Говоря о теории Гаюи, мы всегда должны помнить о том, что автор пытался ее обосновать на экспериментальном материале. Углубленное изучение явлений спайности позволило ему сделать замечательные открытия. Так, например, исходя из октаэдрической спайности флюорита, он нашел взаимное расположение октаэдрических и тетраэдрических фрагментов структуры, в точности соответствующее расположению атомов кальция и фтора в современной структурной модели этого минерала.

Вскоре Э. Митчерлих (1794—1863) окончательно установил в науке и сделал широко известными явления полиморфизма и изоморфизма.

Открытие полиморфных модификаций серы, углерода, углекислого кальция, а также многочисленных изоморфных рядов, столь характерных для минералогии, казалось бы, нанесло жестокий удар основным воззрениям Гаюи.

Лишь сравнительно недавно изучение строения кристаллов с помощью рентгеноанализа позволило выяснить сущность полиморфизма и изоморфизма и выявить физико-химическую динамику реальных кристаллических структур. Тем самым получил окончательное решение вопрос о единстве строения и химизма кристаллов. Однако в начале прошлого столетия об этом вопросе судили иначе.

После краткого триумфа теория Гаюи была, казалось бы, ниспровергнута и временно забыта.

---

* Р.-Ж. Гаюи. Структура кристаллов. Избр. тр. М.—Л., 1962, стр. 132.

Школа немецких кристаллографов во главе с Х. С. Вейсом (1780—1856), категорически отказавшись от атомистической гипотезы и отбросив вопрос о кристаллическом строении, вернулась к усиленным наблюдениям над внешней формой кристаллов.

Позиции этих ученых несколько напоминают уже пройденные этапы. Прямым их предшественником был Ромэ-Делиль. По характеристике Е. С. Федорова, «. . . теория Вейса по сравнению с теорией Гаюи была явным шагом назад, так как вместо систематического развития идеи, положенной Гаюи, как надежное основание будущего здания, Вейс, уступая духу эмпиризма, в значительной мере стал делать шаги ощупью».*

И все же, несмотря на это, Вейсу удалось открыть закон поясов, лежащий в основе зональной кристаллографии.

Выдающейся заслугой Вейса является также установление кристаллографических систем (сингоний), описанных в статье «Наглядное изложение естественного деления систем кристаллизации» (1813—1815). Сингонии, как хорошо известно, являются краеугольным камнем кристаллографии. Примечательно то обстоятельство, что при характеристике сингоний Вейс исходил из особенностей кристаллографических координатных осей. Однако четких указаний на симметрию этих осей у него еще не было.

Вскоре после выхода в свет работы Вейса начались ожесточенные споры по поводу приоритета установления сингоний. Одни приписывали честь этого открытия Вейсу, другие указывали на то, что еще до опубликования статьи Вейса профессор минералогии в Вене Ф. Моос (1773—1839) в своих лекциях подразделял кристаллы на те же системы.** В «Основах минералогии», появившихся в 1822 г., Моос описывает свою классификацию кристаллов. Так же как и Вейс, он определяет кристаллические формы с помощью кристаллографических осей, но для моноклинных и триклинных кристаллов принимает косоугольные системы. В этом отношении им сделан шаг вперед по сравнению с Вейсом.

Многочисленные последователи Вейса и Мооса (Ф. Науманн, Г. Розе и др.), отказавшись от теоретических обобщений, посвятили себя всецело изучению и описанию кристаллических форм, основываясь главным образом на точных гониометрических измерениях.

Несмотря на временную победу немецкой описательной кристаллографической школы, ряд авторов пытался все же продолжить и структурное направление в кристаллографии. Исходя из теории Гаюи, они стремились внести в нее ряд поправок и уточнений. Выдающийся английский ученый В. Г. Волластон (1766—1828) обратил внимание на то, что полиэдрическая форма кристаллических молекул Гаюи может быть выведена из элементарных шариков Гука и эллипсоидов вращения Гюй-

* Е. С. Федоров. Из итогов 35-летия. М., 1904, стр. 10, 11.

** Имя Ф. Мооса памятно главным образом по общеизвестной шкале твердости, до сих пор употребляющейся в минералогической практике.

генса.* Так, например, положив на плоскость три соприкасающихся равных шарика и поместив в гнездо между ними четвертый вышележащий шарик, мы увидим, что центры этих четырех шариков образуют правильный тетраэдр. Уложив в гнезда между четырьмя шариками, образующими на плоскости квадрат, пятый шарик сверху и шестой снизу, мы получим октаэдр. Добавив к двум противолежащим граням такого октаэдра еще два шарика, получим острый ромбоэдр, представляющий фрагмент кубической центрогранной решетки. В точности такой же ромбоэдр, исходя из плотнейшей шаровой укладки, вывел в свое время, как было сказано выше, и Ломоносов. Такая совокупность шаров дает наглядное представление о структуре кристаллов с октаэдрической спайностью.

При выводе строения гексагональных призматических кристаллов берилла и других минералов Волластон заменял шаровую форму элементарных частиц вытянутыми эллипсоидами вращения. Предвосхищая позднейшие достижения структурной кристаллографии, он предлагал для кристаллов с кубической спайностью использовать укладки шаров двух сортов (черные и белые), расположенных точно так же, как расположены ионы натрия и хлора в современных моделях строения поваренной соли. Волластон отмечал также, что шарообразные частицы можно заменять математическими точками, вокруг которых действуют взаимно уравновешенные силы притяжения и отталкивания, так что шаровая форма частиц является, по сути дела, мнимой. Это его высказывание напоминает нынешние представления о сферах действия атомов и ионов внутри кристаллических структур. Вместе с тем замена шариков центральными точками подводила вплотную и к идее о пространственных решетках.

Еще ближе к выводам Браве подошел в 1824 г. профессор физики во Фрейбурге А. Зеебер.** Прежде всего, он обратил внимание на то, что вплотную прилегающие друг к другу элементарные «кирпичики» Гаюи не объясняют ряда явлений, и в частности расширения кристаллов при нагревании и их сжатия при охлаждении. Далее, он пришел к выводу о невозможности сказать вообще что-либо достоверное об истинной форме гипотетических элементарных «кирпичиков». Все это натолкнуло его на мысль заменить их центрами тяжестей. Такой подход привел Зеебера к системе точек, которую он и назвал впервые «пространственной решеткой». К аналогичным выводам пришел позднее ученик и последователь Гаюи Г. Делафосс.***

Наконец, в лице профессора М. Л. Франкенгейма (1801—1869) мы имеем непосредственного предшественника, а затем и конкурента Браве.

---

* W. H. Wollaston. On the elementary Particles of certain crystals. Phil. Transact., 1813, p. 51—63.

** L. A. Seeber. Versuch einer Erklärung des innern Baus der festen Körper. Gilberts. Ann. d. Phys., 1824, **76**, S. 229—248.

*** G. Delafosse. Recherches sur la cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques. Mém. pres. divers savants à l'Acad.-Roy. Sci. l'Inst. de France, 1843, t. 8.

В 1835 г. он опубликовал геометрическое исследование различных возможных типов пространственных решеток.* Полученные им типы обсуждались в отношении их согласования с имеющимися в природе формами кристаллов. В результате им было выведено 15 «сетчатых», т. е. решетчатых, расположений точек, которым по габитусам и спайности соответствовали 15 основных кристаллических форм.

К сожалению, Франкенгейм допустил ошибку, приняв за две разные одну и ту же моноклинную решетку. Впоследствии, в 1856 г., уже вслед за Браве он должен был признать это упущение и уступить приоритет правильного и исчерпывающего вывода пространственных решеток своему французскому сопернику.

По-иному сложились обстоятельства относительно вывода видов симметрии для конечных фигур. В этом вопросе, как оказалось впоследствии, первенствующее место принадлежит марбургскому профессору минералогии и пробирного искусства И. Ф. Гесселю (1796—1872). Последний в 1830 г. полностью разработал и опубликовал в физическом словаре теорию симметрии для конечных фигур, а в том числе и для кристаллических многогранников.** Среди выведенных им законов конечной симметрии находятся и те 32 вида симметрии, без которых сейчас не обходится ни одна классификация кристаллов. При этом Гессель учел и сложные (инверсионные и зеркально поворотные) оси симметрии. Однако в то время замечательные результаты прошли совершенно незамеченными. По словам Федорова, «поразительная неподготовленность большинства минералогов к восприятию идей, имеющих математическую подкладку, сделала бесполезным для науки труд Гесселя».***

В 1849 г. О. Браве опубликовал свой известный мемуар «Исследование о многогранниках симметричной формы». Вслед за ним появилась серия других статей, посвященных вопросам симметрии и геометрии кристаллического строения. Среди них мы выделим здесь те, которые сыграли наиболее выдающуюся роль в развитии геометрической кристаллографии.

«Исследование о многогранниках симметричной формы» — основная работа, в которой дан вывод всех видов конечной симметрии и в их числе 31 кристаллического класса. К сожалению, набор элементов симметрии, на основании которого был произведен вывод групп симметрии, не полон. В них отсутствуют сложные (инверсионные или зеркально-поворотные) оси симметрии. Это привело к тому, что инверсионно-примитивный вид тетрагональной сингонии не попал в список кристаллических классов. Система обозначений, набор теорем сложения элементов

---

* M. L. Frankenheim. Die Lehre von der Cohäsion. Breslau, 1835, S. 311, 312; System der Crystalle. Nova Acta Acad. Caesareae Leopoldino—Carolinae Naturae Curiosorum, 1842, t. 19, S. 471—660.

** I. F. Hessel. Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie. Ostwalds Klassiker, Leipzig, 1897, № 88.

*** Е. С. Федоров. О сочинениях немецкого минералога Гесселя. Зап. СПб. минералог. общ., 1891, т. 27, стр. 462.

симметрии и сам вывод сочетаний элементов симметрии оказались настолько удачными, что кристаллографы и минералоги до сих пор пользуются ими. Всего получено 23 класса симметрии, перекрывающие 31 точечную пространственную группу и дающие, кроме того, все некристаллографические группы симметрии.

Общность используемых методов позволила автору в неявном виде получить все инверсионно-планальные группы симметрии и, за исключением одной группы, все инверсионно-примитивные группы симметрии.

Запись таких видов имеет следующую форму:

$[\Lambda^{2q}, 2qL^2, oC, 2qP]$ — $[\bar{4}2m]$,

$[\Lambda^{2q+1}, oL^2, oC, \Pi]$ — $[\bar{6}]$,

$[\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, oC, \Pi, (2q+1)P]$ — $[\bar{6}2m]$,

$[\Lambda^{2q+1}, oL^2, C, oP]$ — $[\bar{3}]$,

$[\Lambda^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P]$ — $[\bar{3}m]$.

«Мемуар о системах точек, правильно распределенных на плоскости и в пространстве» посвящен теории пространственной решетки, где впервые и окончательно дан вывод 14 решеток, названных впоследствии решетками Браве. Эта работа оказала основополагающее влияние на развитие кристаллографии и послужила логическим обоснованием для разделения всего массива кристаллических образований на 7 систем (сингоний).

«Кристаллографические этюды» — самая крупная работа, посвященная физической кристаллографии, интерпретируемой с помощью геометрических методов. В ней нашли свое отражение все ранее написанные работы О. Браве. Более того, «Кристаллографические этюды» весьма напоминают развернутый курс кристаллографии, где подведен итог и творчески переосмыслено наследие наиболее крупных его предшественников.

Вначале кристаллическое тело рассматривается как совокупность точек, правильно распределенных в пространстве. Методы теории позволяют автору обосновать и вывести закон зон, решить вопрос установки кристалла, определить решетки Браве для реальных кристаллических тел.

Во второй части работы кристалл рассматривается как совокупность молекул, занимающих в пространстве правильную систему точек. На основании естественных соображений и с помощью геометрических методов в этой части получены ряды простых форм, расположенных в порядке их преобладания на естественной огранке кристалла, принадлежащего соответствующему виду симметрии.

Объединение симметрии молекулярных многогранников с геометрией кристаллической решетки позволяет объяснить с теоретических позиций явление мероэдрии. Многочисленные примеры естественных мероэдрических кристаллов подтверждают выводы, сделанные ученым.

На основании тех же самых соображений в третьей части «Кристаллографических этюдов» дано объяснение двойникования и гемитропии кристаллических тел.

В настоящей книге помещены все вышеупомянутые труды О. Браве. Следовательно, нет необходимости более подробно останавливаться на их содержании.

Блестящие достижения Браве в области теоретической кристаллографии получили всеобщее признание далеко не сразу. Первыми оценили его выводы математики (см. отзыв О. Л. Коши, стр. 281—288). Значительно позднее к ним обратились минералоги и кристаллографы.

Одним из первых, положивших теорию решетчатого строения в основу систематического изложения математической кристаллографии, был известный французский минералог и кристаллограф Э. Малляр (1838—1894). В предисловии к своему «Курсу геометрической и физической кристаллографии» (1879) он выражает удивление по поводу малой известности замечательных работ Браве. После его выступления эти работы обратили на себя внимание других ученых и прежде всего представителей французской кристаллографо-минералогической школы (П. Кюри, П. Валлеран, Г. Фридель и др.).

В 1884 г. знаменитый Пьер Кюри выступил со статьей «О симметрии».* где ввел понятие о новом элементе конечной симметрии — «плоскости перемежающейся симметрии», соответствующей зеркально-поворотной оси сложной симметрии. Тем самым он восполнил пробел, имевший место в мемуаре Браве «Исследование о многогранниках симметричной формы». Однако здесь надо напомнить о том, что еще в 1867 г. А. В. Гадолин в своем «Выводе всех кристаллографических подразделений из одного общего начала» дал совершенно ясное понятие о сложных инверсионных осях, а еще раньше, в 1830 г., И. Гессель, хотя и в очень громоздкой форме, уже намечал сущность этого понятия.

Е. С. Федоров в статье «Заметки об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие»** писал о совпадении полного вывода видов конечной симметрии П. Кюри со своим собственным, изложенным в «Началах учения о фигурах» (1885). Задержка публикации этой монографии привела к тому, что федоровский вывод, законченный задолго до выхода в свет, появился годом позже статьи Кюри. Однако вопрос о приоритете, естественно, отпал после того, как Л. Зонке в 1892 г. заново открыл совершенно забытый вывод Гесселя. Этому открытию посвящена статья Е. С. Федорова «О сочинениях немецкого минералога Гесселя и о приоритете его в разрешении некоторых вопросов теоретической кристаллографии».*** Впоследствии Федоров неоднократно отмечал неполноту вывода Браве, противопоставляя ему полный, хотя и весьма тяжеловесный, вывод Гесселя (см. стр. 306).

* P. Curie. Bull. de la Soc. minéral. de France, 1884, 7, p. 418.

** Зап. СПб. минералог. общ., 1890, т. 26, стр. 345.

*** Зап. СПб. минералог. общ., 1891, т. 27, стр. 462—464.

Теория решетчатого строения кристаллических структур, навсегда связанная с именем Браве, получила свое дальнейшее развитие в трудах французского математика М. Э. К. Жордана (1838—1922) и немецкого физика Л. Зонке (1842—1892). В «Мемуарах о группах движений» Жордана дан математический вывод всех возможных групп движения.* Отсюда вытекала возможность вывода бесконечно протяженных систем точек, способных в различных положениях совмещаться самим с собой. Л. Зонке использовал теорию Жордана для вывода правильных систем точек, соответствующих центрам тяжестей элементарных частиц в кристаллических структурах. Ему принадлежит следующее определение: «Кристаллы, мыслимые как неограниченные тела, являются правильными бесконечными точечными системами, т. е. такими, в которых вокруг каждой материальной точки расположение остальных точно такое, как вокруг любой другой материальной точки». Или: «Кристалл является конечным куском бесконечной правильной системы точек».**

Придя к понятию правильных систем точек, Зонке противопоставлял их пространственным решеткам Браве, почти отвергая значение последних. Однако, как показал Е. С. Федоров, точки, образующие правильную систему, разбиваются на подгруппы параллельно ориентированных точек, соответствующих узлам решеток Браве. Вывод правильных систем точек требует прежде всего вывода законов бесконечной симметрии, так называемых пространственных групп, т. е. совокупностей элементов симметрии, которым должны подчиняться расположения точек правильных систем. В таких симметричных группах выделяются подгруппы чистых трансляций, с помощью которых выводятся совокупности параллельно ориентированных точек. Они-то и соответствуют в нынешнем понимании решеткам Браве.

Как известно, Зонке осуществил лишь частичный вывод пространственных групп. Характеризуя точки правильных систем пучками лучей, направленных от данной точки к остальным точкам той же системы, он предположил, что такие пучки должны быть обязательно совместимо равными. Ограничившись подобными правильными системами точек, Зонке вывел для них 65 совокупностей элементов бесконечной симметрии, представляющих так называемые пространственные группы первого рода. В «Началах учения о фигурах» Е. С. Федоров впервые указал на неполноту вывода Зонке: пучки лучей для точек правильной системы могут быть не только совместимо-равными, но и отраженно-равными. Обнаружив упущение Зонке, Федоров опубликовал в 1890 г. свой геометрический вывод 230 пространственных групп — 230 геометрических законов симметрии, по которым должны располагаться элементарные частицы в кристал-

---

* C. Jordan. Mémoire sur les groupes de mouvement. Ann. Matem., ser. II, 1868, t. II, Milano, 1868.

** L. Sohncke. Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig, 1879, S. 10.

лических структурах.* В 1891 г. немецкий математик А. Шенфлис (1853—1928) обнародовал свой вывод тех же 230 пространственных групп, основываясь на математической теории групп.** Публикации трудов обоих ученых предшествовала длительная переписка между ними, в результате которой после обстоятельных обсуждений были достигнуты тождественные окончательные результаты.

В настоящее время пространственные группы Федорова—Шенфлиса лежат в основе всей современной структурной кристаллографии и нынешнего рентгеноструктурного анализа.

Однако нельзя забывать и того, что каждая пространственная группа характеризуется прежде всего своей подгруппой чистых трансляций, т. е. решеткой Браве. Особенно наглядно это выражается в общепринятых формулах пространственных групп (формулы Германа—Могэна), где на первом месте стоят большие латинские буквы, обозначающие соответственные решетки Браве.

Далее нельзя не остановиться на прежних русских переводах и изложениях кристаллографических трудов Браве, а также на отзывах о нем самом наших выдающихся ученых.

В 1885 г. в Записках Петербургского минералогического общества появилась статья профессора Киевского университета и Ново-Александрийского института химика-кристаллографа И. А. Тютчева (1834—1893) под названием «Учение о правильном распределении точек в приложении к кристаллографии».***

Приведем краткое введение к этой публикации: «Настоящая статья составлена с целью познакомить читателей с трудами Браве. Не касаясь, в частности, кристаллических форм и систем, в ней рассматриваются общие вопросы, как например об углах граней, поясах, осях симметрии и т. п. При изложении образцом служил труд Малляра, одного из последователей Браве».****

Текст статьи начинается с упоминания теории Р.-Ж. Гаюи. Далее автор статьи переходит к Браве: «В новейшее время Браве является как бы продолжателем Гаюи; хотя Браве и его последователи не касаются интегрирующих молекул, но они стараются объяснить внутреннее строение кристаллов предположением о размещении в них центров тяжести частиц. . . Настоящая статья имеет целью изложить основные положения учения Браве в применении их к кристаллографии».*****

После этого следует краткое изложение основ теории решетчатого строения кристаллов. Вторая часть статьи имеет подзаголовок «О симметрии многогранников и сетей». Начинается она так: «В тесной связи

* Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Зап. СПб. минералог. общ., 1891, т. 28, стр. 1—146.

** A. Schoenflies. Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig, 1891.

*** Зап. Сиб. минералог. общ., 1885, т. 20, стр. 130—184.

**** Там же, стр. 130.

***** Там же, стр. 132.

с теорией правильного распределения точек находится учение о симметрии. Хотя русская литература обладает классическим трудом по этому предмету г. Гадолина (Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала. СПб., 1868), тем не менее считаем не лишним изложить здесь главнейшие положения о симметрии и осях как они вытекают из учения о сетях и их сочетаниях в многогранниках».*

Сама статья И. А. Тютчева не представляет сейчас интереса: это краткий добросовестный пересказ основных положений Браве в том упрощенном виде, который им дал впоследствии Э. Малляр. Вместе с тем знаменательно само появление этой статьи на страницах Записок минералогического общества. Оно указывает на назревшую необходимость перехода от описательной кристаллографии в духе немецкой школы Вейса и Науманна к теоретическим структурным началам этой науки, заложенным Браве. О том, что для такого перехода вполне созрело время, свидетельствует и тот факт, что в том же 1885 г. на страницах тех же Записок минералогического общества появился первый классический мемуар Е. С. Федорова «Начала учения о фигурах». В 1896 г. известный профессор минералогии Ново-Александрийского и Московского сельскохозяйственных институтов, а после и Московского университета Я. В. Самойлов (1870—1925) опубликовал русский перевод сочинения Браве «Исследование о многогранниках симметрической формы».** Предисловие переводчика начинается следующими фразами: «В области познания материи одним из самых глубоких вопросов является вопрос о строении кристаллического вещества. К решению его подходят, особенно в последнее время, не эмпирическим путем, а дедуктивным. Чисто теоретические построения, нашедшие себе самое блестящее применение к данным, экспериментально добытым, открывают перед нами новые и чрезвычайно широкие горизонты. До известной степени основание этому плодотворному и увлекательному методу и во всяком случае гениальное развитие его дал Август Браве».*** Далее Я. В. Самойлов отмечает недостаточную популяризацию трудов французского ученого: «Несмотря на все высокие достоинства трудов Браве, они оставались неизвестными даже на его родине, по поводу чего Э. Малляр в своем введении к учебнику кристаллографии высказывает совершенно справедливое удивление. Пожалуй, и теперь, когда имя Браве поставлено на должную высоту в области кристаллографии, нет еще достаточного знакомства с его работами, чего последние вполне заслуживают».****

Мотивируя публикацию своего перевода, Я. В. Самойлов пишет: «Мы остановились именно на этом исследовании „О многогранниках симметрической формы“, как на более раннем труде Браве, служащем до из-

* Там же, стр. 166.

** Август Браве. Исследование о многогранниках симметрической формы. Перев. и предисл. Як. Самойлова. Одесса, 1896, стр. 34.

*** Там же, стр. III.

**** Там же.

вестной степени введением к дальнейшим, быть может, более совершенным произведениям талантливого ученого. . . Весь этот мемуар Августа Браве представляет стройное, гармоничное и неразрывное целое. Мы смеем думать, что чтение этого исследования как такового, помимо каких бы то ни было дальнейших приложений его, может доставить истинное удовольствие всякому, склонному к математическому мышлению».*

После этих вступительных замечаний следует краткая биография Браве, изложенная по очерку Эли де Бомона, приведенная и в настоящем издании (см. стр. 273—280).

Перейдем далее к наиболее значительным отзывам о Браве, принадлежащим нашим выдающимся кристаллографам и минералогам. Прежде всего, остановимся на ряде высказываний Е. С. Федорова. В «Заметке об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие» ** мы находим следующую замечательную характеристику достижений Браве в области теории строения кристаллов. «Явившаяся теперь теория явно превосходила по достоинству все другие гипотезы, сделала их ненужными и, явно неся на себе признаки истинности, побудила ученых разных стран к детальной ее разработке. Франкенгейм более подробно разработал эту теорию, но собственно Браве принадлежит та совершенная, безукоризненная ее обработка, которая делает ее господствующей до настоящего времени.

Признаки истинности этой теории сказались в возможности предсказания некоторых явлений, так как это может служить пробным камнем для всяких теорий вообще. Особенно поразительно совпадение предсказаний этой теории с наблюдаемыми фактами относительно возможных кристаллографических систем; полная математическая ее обработка привела, как к возможным, к тем именно кристаллографическим системам, которые наблюдаются в природе и которые были уже твердо установлены наблюдениями во время работ Браве. Таким образом, вопрос о возможных кристаллографических системах со времени Браве перестал быть вопросом фактов или наблюдений, но стал дедуктивным выводом из теории. Эта же теория дала возможность предвидеть, хотя еще в весьма неопределенной форме, какие именно возможны плоскости спайности, каковы должны быть наиболее частые простые формы в кристаллах и т. п. Однако в теории этой с самого начала оказались и слабые места. Сам Браве не мог объяснить посредством нее наблюдаемых видов мэроэдрии и должен был относить эти особенности симметрии кристаллов к особенности частиц, располагающихся в кристалле по пространственным решеткам».***

Переходя к разбору правильных систем точек по Зонке, Федоров отмечает, «что все правильные системы точек могут быть сведены к пространственным решеткам Браве, если в них одну точку или частицу за-

* Там же, стр. IV.
** Зап. СПб. минералог. общ., 1890, т. 26, стр. 345—377.
*** Там же, стр. 358, 359.

меним группою равных и распределенных по строго установленному закону».*

Еще более яркой характеристикой достижений Браве открывается классический труд Е. С. Федорова «Симметрия правильных систем фигур» (1890). Приведем небольшой отрывок из нее: «Точному геометрическому изучению фигур должно предшествовать изучение точек; поэтому и в этой области представление о правильных системах фигур развилось в точные математические понятия, когда вместо них Браве задался правильными системами точек. Однако и здесь, как и в учении о симметрии конечных фигур, основатель теоретической кристаллографии несколько сузил основное определение, ограничившись лишь тем видом правильных систем точек, который получил впоследствии название пространственных решеток.

Первые результаты математической теории правильных систем точек есть в то же время и триумф человеческого ума в области изучения кристаллов, так как выводы, шедшие из глубины кабинета, совпали как раз с тем, что составляло результат обширного опыта, принявшего со временем колоссальные размеры. Перед строгими кабинетными выводами как бы преклонилась природа, и кристаллы расположились в тех системах, которые явились необходимым математическим выводом из понятия о правильных системах точек (пространственных решетках)».**

Ограничимся приведенными здесь отрывками из сочинений Е. С. Федорова, но отметим, что и в ряде других его работ имеются отзывы о выводах Браве. Справедливость требует отметить, что наряду с панегирическими высказываниями, наш ученый неоднократно отмечал и ошибочные данные французского кристаллографа. Так, например, в «Курсе кристаллографии» (1897), перечисляя сочинения Браве во главе с мемуаром «О полиэдрах симметричной формы», Федоров пишет: «Первое из них положило основание учению о симметрии, дотоле не существовавшему. Слабою стороною является отсутствие общего определения симметрии и замена его произвольно избранными элементами: центром, осью и плоскостью симметрии».***

В этом вопросе Е. С. Федоров противопоставляет французскому ученому И. Ф. Гесселя: «Современник Гесселя Браве настолько не имел представление о его труде, что сделал заведомый шаг назад, так как не мог даже сделать ясного вывода видов симметрии кристаллов. В труде Браве не дано ответа на самый первый вопрос учения о симметрии: что такое элемент симметрии».****

Вслед за высказываниями Е. С. Федорова нельзя не привести целиком чудесную, глубоко прочувствованную характеристику жизни и твор-

* Там же.

** Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Зап. СПб. минералог. общ., 1891, т. 28, стр. 1.

*** Е. С. Федоров. Курс кристаллографии. СПб., 1897, стр. X.

**** Е. С. Федоров. Из итогов 35-летия. М., 1904, стр. 11.

чества Браве, помещенную В. И. Вернадским в его «Основах кристаллографии». Он пишет: «В области научного синтеза в кристаллографии первыми самостоятельными работниками были Делафосс и его ученик Браве, исходившие из идей Гаюи, Гессель и Франкенгейм, независимо разрабатывавшие и продолжавшие воззрения Вейса. В это время были впервые исследованы основные принципы симметрии, регулирующие все физические свойства кристаллов, и правильно поняты многочисленные случаи гемиэдрий, так же как гемиморфизм, который до тех пор считался чем-то случайным. Исходя из законов симметрии, И. Ф. Гессель (1796—1872) в Марбурге впервые открыл среди кристаллов независимые немногие определенные классы, 32 строения, и дал ясное представление о всех возможных среди них многогранниках. Исходя из тех же принципов, им независимо открытых, несколько позже, в 1840—1850 гг., Браве перенес вопрос глубже и в ясных простых выражениях дал законы полиэдрического распределения молекулярных систем твердого тела. Огюст Браве (1811—1863) был сперва морским офицером, потом профессором математики и астрономии. Он занимался главным образом вопросами физической географии и метеорологической оптики и случайно перешел к изучению кристаллов, при решении некоторых вопросов о кристаллизации льда, необходимых ему для объяснения кругов около солнца и луны. Он смотрел на природу глазами геометра, и это Платоново чувство природы проявилось как в одной из его первых научных работ о симметрии в растениях, так и в его трудах по метеорологической оптике в воззрениях на кристаллы.

В кристаллографических работах О. Браве проявил необычайную ясность, изящество и глубину мысли, и его мемуары, несмотря на все новые работы в этой области, сохранили до сих пор свое значение.

Ему не удалось закончить блестяще начатое дело. Потеряв вскоре единственного малолетнего сына, он думал забыться в научной работе и здесь, среди усиленных занятий, вдруг потерял память и через несколько лет умер в полном и мучительном сознании своего несчастья.

Ни Делафосс, ни Франкенгейм не достигли таких общих результатов, как Гессель и Браве. Забытые в свое время работы их возродились в 1870-х годах».*

Для того чтобы дать понятие читателю об оценке достижений Браве в свете современной науки о кристаллах, приведем в заключение небольшой отрывок из обобщающей статьи крупнейшего советского кристаллографа акад. А. В. Шубникова (1887—1970). «Наиболее замечательным достижением Браве является исчерпывающее установление параллелепипеидальных систем точек, называемых ныне пространственными решетками Браве. С помощью этих решеток, состоящих из неограниченно малых, равных параллелепипедов, примыкающих друг к другу (в параллельном положении) равными сторонами и запол-

* В. И. Вернадский. Основы кристаллографии, вып. 1. М., 1904, стр. 28, 29.

няющих пространство без промежутков, Браве объяснил вполне удовлетворительно для своего времени строение кристаллов: он предположил, что молекулы их располагаются по узлам решеток. Далее Браве показал, что закон рациональных отношений, или, как его теперь называют, закон целых чисел, есть простое следствие строения кристаллов. Отождествляя грани кристалла с сетчатыми плоскостями своих решеток, Браве ввел понятие ретикулярной плотности граней кристаллов (число молекул, приходящихся на единицу площади грани кристалла) и установил закон, носящий теперь его имя и утверждающий, что при росте кристаллов наибольшую вероятность появления имеют наиболее плотные грани. Работы Браве о пространственных решетках оказали большое влияние на дальнейшее развитие учения о строении кристаллов, блестяще завершенного трудами Федорова и Шенфлиса и подтвержденного опытом Лауэ (1918)».*

Мы надеемся, что опубликованный в настоящем издании полный перевод «Кристаллографических этюдов» О. Браве, а также приложенные к нему статьи и комментарии позволят читателю изучить и оценить замечательный вклад в науку о кристаллах, сделанный более ста лет тому назад выдающимся французским ученым.



* А. В. Шубников. Браве. БСЭ, т. 7. М., 1927.

Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин,
М. И. Штогрин

ТЕОРИЯ БРАВЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА n-МЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

Главное достижение Браве — разбиение решеток на 14 типов и вывод так называемых параллелепипедов Браве для этих типов [1] — имело огромное значение для всей геометрической кристаллографии. Эта работа может быть поставлена в один ряд только с такими замечательными достижениями, как вывод 32 кристаллических классов, 47 простых форм и 230 пространственных групп.

В настоящее время усиленно развиваются 4-мерная и n-мерная кристаллография, которую уже трудно строить на основании элементарно-геометрических соображений. Основным методом n-мерной кристаллографии на сегодняшний день является так называемый арифметический метод, т. е. применение конечных групп целочисленных матриц. Важнейшим применением этого метода была в свое время (1948 г.) работа Цассенхауза [2], в которой автор показал, что для любого n, если известны все неэквивалентные n-мерные группы целочисленных матриц, все n-мерные федоровские группы получаются уже автоматически. А в настоящее время (1971 г.) немецкими учеными Вондрачеком, Нойбюсером и Бюловым этим методом получено окончательное решение вопроса о 4-мерных типах Браве решеток [3—5].

В данной работе подробно рассмотрены только те стороны арифметического метода, которые непосредственно связаны с работами Браве.

В первой части работы излагается непосредственный геометрический подход к трехмерным типам Браве решеток с различных точек зрения. Затем дается теория n-мерных решеток и N-мерный метод их исследования. В конце изложена теория абсолютного приведения, ведущая к решению задачи о типах Браве n-мерных решеток.

ЧАСТЬ I

3-МЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

Глава 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ БРАВЕ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЕШЕТКАХ

Декартовым координатным репером $\mathscr{E}$ трехмерного пространства называются три вектора $\mathbf{a}=\overline{OA}$, $\mathbf{b}=\overline{OB}$, $\mathbf{c}=\overline{OC}$, исходящие из общего начала O и не лежащие в одной плоскости. Длины его векторов и углы между ними называются метрическими параметрами репера.

Координатами точки M относительно заданного координатного репера $\mathscr{E}$ называются три действительных числа x, y, z, показывающие, сколько раз (положительное, отрицательное, целое, дробное или иррациональное число раз) надо отложить от точки O сначала вектор $\mathbf{a}$, затем $\mathbf{b}$ и, наконец, $\mathbf{c}$, чтобы прийти в точку M.

Решеткой, построенной на репере $\mathscr{E}$, называется совокупность всех точек с целыми (положительными, отрицательными или нулевыми) координатами относительно репера $\mathscr{E}$. Сам репер называется основным репером решетки, а параллелепипед, построенный на этом репере, — основным параллелепипедом решетки (в кристаллографии его называют примитивным). Заметим, что одна и та же решетка может быть построена на различных основных реперах.

Лемма 1. Всякий вектор, соединяющий две точки решетки и отложенный из любой точки решетки, имеет свой конец также в точке решетки.

Эта параллельная переносность решетки следует из того, что координаты любого вектора суть разности координат его концов, т. е. целые числа.

Лемма 2. (Дискретность решетки). Всякая решетка обладает своим радиусом дискретности r, отличным от нуля, т. е. таким радиусом, что никакие две точки не лежат ближе друг к другу, чем на расстоянии r.

В силу параллельной переносности решетки достаточно показать, что существует r, ближе которого нет точек решетки к ее точке O — началу репера, на котором она построена. Концы векторов основного репера обозначим через A, B и C.

Действительно, если точка A лежит от точки O на расстоянии h_1, то на прямой OA все точки решетки находятся от точки O на расстоянии, большем или равном h_1. Далее, точки решетки в плоскости OAB, не лежащие на прямой OA, лежат на прямой b, проходящей через точку B и параллельной OA, кроме того, лежат и на других таких прямых, не более близких к прямой OA, чем прямая b. Следовательно, расстояние до любой такой точки от точки O не меньше, чем длина h_2 перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую b. Наконец, все точки решетки, не лежащие в плоскости OAB, лежат на параллельной ей плоскости,

проходящей через точку C, и на других более далеких параллельных ей плоскостях. Следовательно, расстояние до них не меньше h_3, где h_3 — расстояние от точки O до плоскости c. Поэтому за радиус дискретности, например, может быть выбрано наименьшее из трех чисел h_1, h_2, h_3.

Лемма 3. Параллельно переносная и дискретная трехмерная система точек есть трехмерная решетка (двухмерная — двухмерная решетка или сетка, а одномерная — одномерная решетка или линейный ряд точек).

Доказательство. Если система трехмерная, то в ней существуют 4 точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости, т. е. такие, что векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ образуют репер. Построим на этом репере параллелепипед. В силу параллельной переносности другие его вершины будут тоже точками системы. Число точек этой системы, лежащих внутри или на границе параллелепипеда, конечно, так как иначе среди них были бы сколь угодно близкие точки, что противоречит дискретности системы.

В силу параллельной переносности на прямой OA лежит линейный ряд точек (одномерная решетка) с периодом OA и, может быть, еще какие-либо точки. Из всякой точки системы, в силу параллельной переносности, исходит линейный ряд, равный и параллельный исходному. Прямая каждого из таких линейных рядов, пересекающая параллелограмм AOB, образует с ним хорду длиною OA, и поэтому в каждом таком линейном ряде есть точка, лежащая внутри или на границе этого параллелограмма. Но число точек рассматриваемой системы, принадлежащих этому параллелограмму, конечное, так как иначе существовали бы в нем сколь угодно близкие друг к другу точки системы, что противоречило бы существованию в системе радиуса дискретности r. Поэтому число таких хорд конечно. Возьмем ближайшую к прямой OA такую хорду. Ввиду параллельной переносности все точки системы лежат в плоскостях, параллельных OAB и имеющих на себе сетки, равные и параллельные двухмерной решетке, построенной на репере OAB, а может быть, и еще какие-нибудь другие точки. Пересечения каждой из таких плоскостей с параллелепипедом представляют параллелограмм, равный и параллельный параллелограмму OAB, и поэтому в силу имеющейся на каждой из этих плоскостей плоской сетки, равной и параллельной OAB, каждому из этих сечений (этажей) принадлежит хотя бы одна точка нашей решетки. Опять ввиду конечности числа точек системы, принадлежащих параллелепипеду $OABC$, существует лишь конечное число таких этажей. Рассмотрим такой этаж ближайший к плоскости OAB. Теперь рассмотрим следующие точки нашей системы, принадлежащие параллелепипеду $OABC$: точку A_0, ближайшую к O на отрезке OA; B_0 — какую-нибудь из точек ближайшей к OA хорды OAB и C_0 — какую-нибудь из точек ближайшего к OAB этажа. Ввиду параллельной переносности нашей системы все точки решетки Λ, построенной на репере $OA_0B_0C_0$, будут принадлежать нашей системе точек. А в силу выбора точек A_0, B_0, C_0 параллелепипед $OA_0B_0C_0$ нигде, кроме как в своих вершинах, не будет содержать точек нашей системы. Поэтому эта решетка Λ будет исчерпывать всю нашу систему. Действи-

тельно, если бы в нашей системе была еще какая-либо точка, то, в силу параллельной переносности, внутри или на границе параллелепипеда $OA_0B_0C_0$ была бы точка, отличная от его вершин.

Будем называть *параллелепипедом решетки* всякий параллелепипед, хотя бы не основной, вершины которого суть точки решетки.

Лемма 4. Параллелепипед решетки основной тогда и только тогда, когда он не имеет точек решетки ни внутри, ни на границе, кроме как в своих вершинах.

Действительно, если это так, то, прикладывая такие параллелепипеды друг к другу по целым граням, мы получим, в силу параллельной переносности решетки, что совокупность их вершин будет представлять решетку, построенную на репере, составленном тремя ребрами рассмотренного параллелепипеда, исходящими из одной его вершины, и никаких других точек, кроме вершин всех этих параллелепипедов, в нашей решетке не будет, так как если бы в каком-либо параллелепипеде была бы точка решетки, не лежащая в вершинах, то, в силу параллельной переносности, такая точка была бы и в исходном параллелепипеде, чего мы не предполагали.

Лемма 5. Объемы всех основных параллелепипедов решетки одинаковы.

Если выписать координаты векторов преобразованного репера через векторы некоторого заданного репера, то абсолютная величина определителя, составленного из этих координат, дает отношение объема параллелепипеда, построенного на новом репере, к объему параллелепипеда, построенного на исходном репере.

Пусть имеется два основных репера решетки $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Так как векторы репера $\mathscr{E}_2$ суть векторы решетки, построенной на репере $\mathscr{E}_1$, то координаты их — целые числа и, следовательно, определитель, из них составленный, есть целое число. Аналогично являются целыми и координаты векторов репера $\mathscr{E}_1$ по отношению к реперу $\mathscr{E}_2$. И, следовательно, определитель перехода от $\mathscr{E}_2$ к $\mathscr{E}_1$ есть тоже целое число. Но эти определители суть взаимно обратные числа. А число, обратное целому, есть целое только тогда, когда само исходное число равно ± 1. Отсюда ясно, что объемы обоих основных параллелепипедов равны, т. е. вообще все возможные основные параллелепипеды одной и той же решетки имеют один и тот же объем.

§ 2. ТЕОРЕМА ПРИМИТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, ПОСТРОЕННОГО НА ТРЕХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МИНИМУМАХ РЕШЕТКИ

Пусть $\overline{OA}$ — самый короткий вектор трехмерной решетки Λ; $\overline{OB}$ — самый короткий вектор Λ, не параллельный вектору $\overline{OA}$; и $\overline{OC}$ — самый короткий вектор решетки Λ, не параллельный плоскости OAB. Такие три

вектора называются тремя последовательными минимумами решетки Λ, а параллелепипед Π, построенный на этих векторах, — приведенным параллелепипедом решетки Λ.

Теорема 1. Приведенный параллелепипед Π примитивный (пустой).

Впервые эта теорема была геометрически доказана Дирихле в 1848 г. [6]. Это доказательство, приведенное в [7], всегда казалось кристаллографам несколько сложным, и поэтому Н. В. Белов предложил другое доказательство [8]. Ниже мы предлагаем доказательство, которое является еще более простым [9].

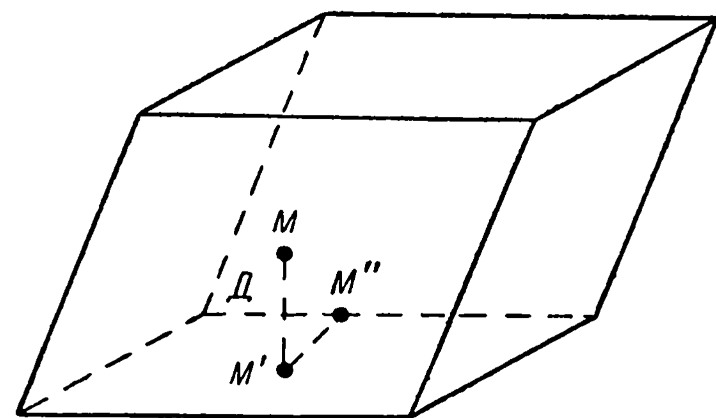


Рис. 1.

Пусть M — любая внутренняя точка приведенного параллелепипеда Π решетки Λ (рис. 1); M' — основание перпендикуляра, опущенного из M на ту из двух плоскостей какой-либо пары параллельных граней Π, к которой M ближе; M'' — основание перпендикуляра, опущенного из M' на ближайшую к M' прямую линейного ряда этой плоскости, параллельную какому-либо из ребер этой грани; и D — ближайший к M'' узел этого ряда. Из построения следует, что каждый из отрезков MM', $M'M''$, $M''D$ не превосходит половины соответствующего ребра Π, а тем самым и половины наибольшего его ребра c, и что все эти отрезки попарно взаимно перпендикулярны. По теореме Пифагора, мы получаем

$$MD \leqslant \frac{c\sqrt{3}}{2} < c.$$

Таким образом, никакая внутренняя точка Π не может быть точкой решетки Λ, так как вектор $\overline{MD}$ решетки Λ был бы тогда не параллелен плоскости OAB и короче вектора $\overline{OC}$. Аналогично доказывается, что никакая внутренняя точка грани или ребра Π не может быть точкой решетки Λ.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ЛЕММЫ ОБ ЭЛЕМЕНТАХ СИММЕТРИИ РЕШЕТКИ

Осью симметрии решетки называют любую ось, после поворота вокруг которой решетка совмещается сама с собой.

Пусть после поворота вокруг оси a решетка совмещается сама с собой и пусть M — какая-нибудь точка решетки, не лежащая на этой оси, P — плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к этой оси. При всех поворотах вокруг этой оси, совмещающих решетку с собой, точка M будет занимать разные положения на окружности плоскости P, через нее проходящей с центром на оси. Ввиду существования радиуса дискретности r таких положений будет конечное число, так как иначе оказались бы две точки решетки на этой окружности, расстояние между которыми было бы меньше, чем r. Поэтому будет существовать два поло-

жения точки M на этой окружности — M' и M'' — самые близкие между собой. Повторяя поворот, передвигающий точку M' в M'', 2, 3, . . . и т. д. раз, мы получим вершины правильного многоугольника. Он сомкнется потому, что иначе на окружности оказалось бы два образа точки M, более близкие между собой, чем M' и M''. Никаких других положений точки M на окружности не будет, в противном случае на ней оказались бы точки, более близкие друг к другу, чем M' и M''. Если этот многоугольник имеет n сторон, то наименьший поворот вокруг оси a, совмещающий решетку с собой, есть поворот на $1/n$ часть окружности, т. е. на угол $2\pi/n$, а ось a называется осью n-го порядка.

Лемма 6. Порядок поворотной оси, совмещающей решетку с собой, может быть только 2, 3, 4 или 6.

Для доказательства примем за точку M самую близкую к оси точку решетки, лежащую в плоскости P, перпендикулярной к оси a, но не лежащую на самой оси a. Для всех правильных многоугольников, кроме двуугольника, правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, откладывая соответствующим образом вектор, соединяющий две последующие его вершины, из какой-нибудь его вершины, можно получить точку N решетки, лежащую в плоскости P, не лежащую на оси, но лежащую к ней ближе, чем точка M, что противоречит нашему предположению о точке M.

Лемма 7. Совокупность всех точек решетки, лежащих в плоскости, перпендикулярной какой-либо оси и проходящей через какую-либо точку O решетки, есть сетка, т. е. двумерная подрешетка.

Действительно, пусть A — точка решетки, не лежащая на оси. Тогда после поворота на наименьший угол вокруг оси она превратится в точку A'; отрезок AA' станет перпендикулярен этой оси. Пусть B — точка решетки, не лежащая в плоскости, проходящей через ось и A. После поворота B перейдет в B'; в результате BB' будет перпендикулярно этой оси и непараллельно AA'. Отложим векторы $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ из точки O. Получим три неколлинеарные точки, лежащие в плоскости P. Следовательно, совокупность точек решетки, лежащих в этой плоскости, двухмерная. Но, в силу дискретности решетки, она дискретная, а в силу параллельной переносности решетки, — параллельно переносная. В силу леммы 3, эта совокупность точек есть двухмерная решетка.

Лемма 8. На любой оси симметрии, проходящей через точку O решетки, лежит линейный ряд точек, т. е. одномерная решетка.

Действительно, возьмем произвольный вектор решетки, выходящий из точки O и не перпендикулярный оси. Такой вектор имеется, так как решетка трехмерная. Векторы, эквивалентные этому вектору относительно данной оси, идут по ребрам правильного гоноэдра. Сумма этих векторов есть вектор $\overline{OA}$ решетки, лежащей на этой оси. Итак, на этой оси лежит одномерная система точек решетки. Но, в силу дискретности и параллельной переносности решетки, она дискретная и параллельно переносная. Следовательно (лемма 3), она есть линейный ряд точек.

Лемма 9. Если в решетке имеется ось симметрии n-го порядка, то через точку O решетки проходит параллельная ей ось симметрии того же порядка.

Действительно, пусть точка O не лежит на данной оси. Произведем какой-либо поворот вокруг этой оси. Точка O тогда перейдет в некоторую точку O', а решетка совместится сама с собой. Сделаем затем параллельный перенос $O'O$. После этого решетка окажется расположена так, что точка O останется на месте, а сама она будет повернута на угол φ вокруг оси, проходящей через точку O и параллельной рассматриваемой оси.

Лемма 10. Центрами инверсии решетки будут те и только те точки, координаты которых имеют вид $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$, где x, y, z — целые числа.

Действительно, пусть какая-либо точка M есть центр инверсии решетки. Тогда любая точка A решетки имеет себе симметричную относительно M точку B решетки, т. е. M есть середина вектора решетки AB и, следовательно, координаты M суть полусуммы целых координат точек A и B. Пусть, наоборот, взята точка M с координатами $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$, где x, y, z — целые числа, и некоторая точка A решетки имеет координаты u, v, w относительно основного репера решетки. Они будут целые. Вектор OM будет иметь координаты $\frac{x}{2}-u, \frac{y}{2}-v, \frac{z}{2}-w$. Тогда вдвое большей длины вектор $\overline{AB}$ будет иметь координаты $x-2u$, $y-2v$, $z-2w$, т. е. целые числа. Следовательно, B будет точкой решетки, симметричной с A по отношению к точке M. Из доказанного следует, что всякий основной параллелепипед решетки имеет следующие центры инверсии решетки: его вершины, середины его ребер, центры его граней, его собственный центр.

§ 4. ВЫВОД 7 ГОЛОЭДРИЙ

Определение. Полная группа поворотов решетки вокруг некоторой ее точки O, совмещающая решетку с собой, называется полной точечной группой решетки, или голоэдрией решетки.

Голоэдрии вполне задаются набором своих поворотов 1-го рода, т. е. связкой своих осей, так как всякая решетка совмещается с собой отражением в ее точке, которое является движением 2-го рода, и поэтому все ее движения 2-го рода суть движения 1-го рода, умноженные на отражение в точке. Вообще, если какая-либо группа движений G (точечная или пространственная) состоит как из движений 1-го рода, так и из движений 2-го рода, то совокупность ее движений только 1-го рода G_1 образует подгруппу и вся группа G по этой подгруппе G_1 разлагается на две смежные системы $G=G_1+g_2G_1$, где за g_2 можно принять любое ее движение 2-го рода. Это обстоятельство следует из того, что произведение любых двух движений 2-го рода есть движение 1-го рода.

Если в связке осей голоэдрии имеются оси 2-го порядка, то угол, образованный двумя такими осями, может быть только 30, 45, 60, 90°, так как во всяком другом случае они порождали бы перпендикулярные им оси, порядок которых отличался бы от 2, 3, 4 и 6.

Теорема 2. Точечная группа может либо вовсе не иметь осей 2-го порядка, либо иметь только одну ось 2-го порядка, либо иметь несколько осей 2-го порядка. Поскольку в последнем случае углы между такими осями 30, 45, 60 или 90°, то связка осей 2-го порядка имеет один из пяти вполне определенных видов, такой как у гексагональной призмы, у прямой квадратной призмы, у ромбоэдра, у прямоугольного параллелепипеда или у куба.

Доказательство. Пусть наименьший угол между осями в рассматриваемой связке осей 2-го порядка 30°. Тогда в результате взаимодействия этих двух осей появится им перпендикулярная ось 6-го порядка и образуется указанная на рис. 2, *а* связка осей, такая как у гексагональной призмы.

Покажем, что никаких других осей 2-го порядка в этом случае быть не может. Действительно, если бы некая другая ось 2-го порядка пересекла сферу внутри сегмента AOB или по дуге AB, то она образовала бы с осью 2-го порядка C угол больше 60° и меньше 90°, чего не может быть по предположению. Если бы она пересекала сферу в точке дуги AO, то, как легко убедиться, получилась бы ось 6-го порядка, проходящая через точку C или точку A. Но в обоих случаях внутри треугольника AOB появилась бы ось 2-го порядка, чего по вышедоказанному не может быть.

Если наименьший угол между осями 2-го порядка нашей связки есть 45°, то в результате их взаимодействия получается ось 4-го порядка и образуется указанная на рис. 2, *б* связка осей 2-го порядка такая, как у прямой квадратной призмы.

Новая ось 2-го порядка не может пересечь сферу внутри треугольника AOB и по дуге AB, так как она образовала бы с осями C и D углы больше 45° и меньше 90°, но не равные одновременно 60° (рис. 2, *б*), чего быть не может. Дугу AO ось 2-го порядка могла бы пересечь только в ее середине, так как иначе она образовала бы угол меньше 45° либо с осью A, либо с осью O. Но если ось 2-го порядка пересекает дугу AO в ее середине (в точке *1*), то в точке 2 уже не может появиться новая ось, так как угол между этими осями был бы меньше 45°. Комбинируя уже отмеченные оси 2-го порядка с новой осью, мы получаем связку осей 2-го порядка, такую как у куба (рис. 2, *в*).

Если наименьший угол между осями 2-го порядка нашей связки есть 60°, то в результате их взаимодействия получается ось 3-го порядка и образуется указанная на рис. 2, *г* связка осей 2-го порядка, как у ромбоэдра. Покажем, что никаких других осей 2-го порядка в этом случае быть не может. В треугольнике AOB новая ось 2-го порядка может проткнуть сферу только в точке 1, так как только в этой точке она образует

угол 60° одновременно с осями A и B, а в других точках угол с какой-либо из осей A или B меньше 60°, либо больше 60° и равен 90° только в том случае, если эта ось 2-го порядка совпадает с осью 3-го порядка, т. е. появляется ось 6-го порядка, что ведет к появлению осей 2-го порядка, угол между которыми меньше 60°. Пусть ось 2-го порядка пронизывает сферу в точке 1. Взаимодействуя с осью D, она даст новую ось

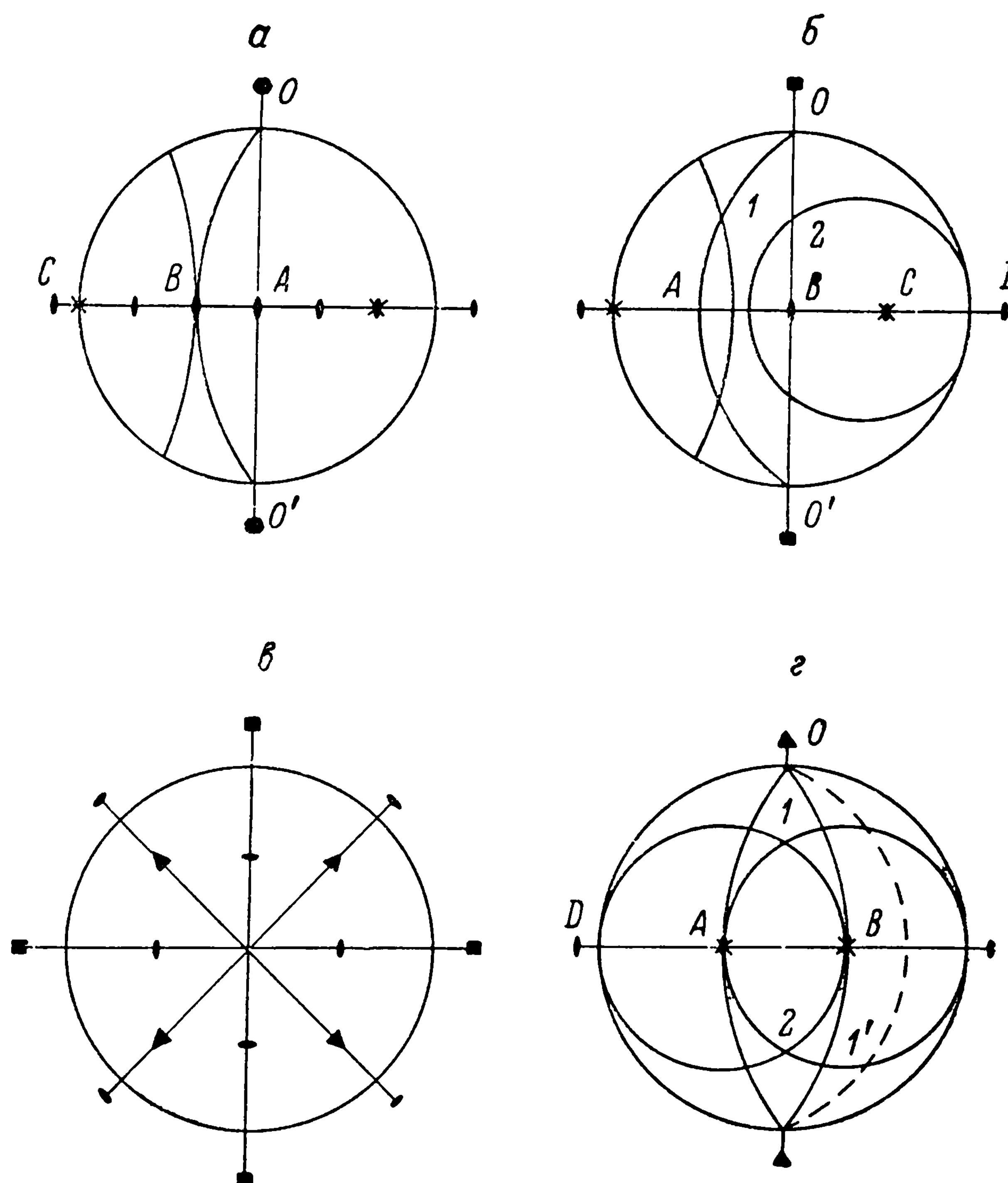


Рис. 2.

2-го порядка, которая должна проткнуть сферу в точке 2 (иначе она образовала бы угол больше или меньше 60° с осями A и B). Но в этом случае она образует угол меньше 60° с осью 1′, которая получается из оси 1 поворотом на 180° вокруг оси B.

Очевидно, что связка, в которой оси 2-го порядка пересекаются под углом 90°, только одна.

Теорема 3. Каждая из 7 вышеприведенных связок есть связка всех осей 2-го порядка некоторой решетки.

Действительно, для последовательности наших связок такими решетками являются, например, решетки, построенные: на общем параллеле-

пипеде; на прямом параллелепипеде, основанием которого является общий параллелограмм; на прямом параллелепипеде, основанием которого является ромб с углом 120°; на прямом параллелепипеде с квадратным основанием; на кубе; на ромбоэдре и, наконец, решетка, построенная на прямоугольном параллелепипеде. На рис. 3 приведено расположение осей 2-го порядка во всех этих параллелепипедах и гексагональной призме.

Теорема 4. В решетке каждая ось высшего порядка, т. е. 3, 4 или 6-го, есть произведение пары ее осей 2-го порядка, и, следовательно, все голоэдрии решеток будут найдены, если каждую из полученных 7 связок

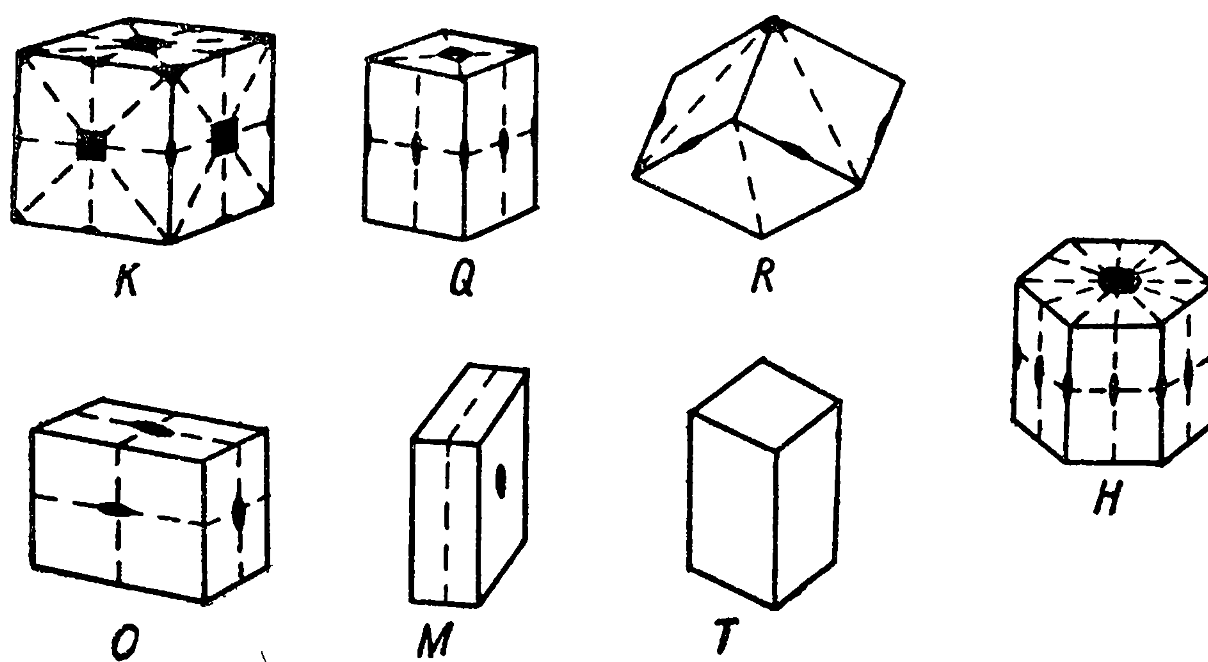


Рис. 3.

осей 2-го порядка дополнить всеми осями высших порядков, получающихся из всех пар осей связки, и еще дополнить центром инверсии. Всего голоэдрий, таким образом, 7.

Действительно, рассмотрим случай оси 3-го порядка, проходящей через точку O решетки. По лемме 7, все точки решетки, лежащие в перпендикулярной ей плоскости, проходящей через точку O, образуют сетку S_O, одной из точек которой является точка O, и эта сетка имеет исходную ось своей осью третьего порядка. Следовательно, S_O построена, как легко видеть, на правильном треугольнике и является гексагональной сеткой. По лемме 8, на данной оси 3-го порядка есть линейный ряд точек; предположим, что B — ближайшая к O точка этого ряда. Через точку B, очевидно, проходит сетка S_B, равная и параллельная S_O. Если S_B — ближайшая к S_O, то получается гексагональная решетка, и наша ось есть собственно ось 6-го порядка. Очевидно, что в такой решетке существуют оси 2-го порядка, порождающие ось 6-го порядка.

Если же наша ось не 6-го, а 3-го порядка, то имеются промежуточные этажи, в которых лежат такие же гексагональные сетки, которые наша ось пронизывает в центрах их правильных треугольников. Пусть ось 3-го порядка пронизывает ближайшую к ней параллельную сетку в центре треугольника MNP. Вершины этого треугольника — ближайшие к оси

точки этой плоской сетки. Дополнив треугольники OMN, MOP, ONP до ромбов, получим точки решетки M', N', P', лежащие в следующей плоской сетке. Дополнив треугольники $MN'P'$, $NM'P'$, $PM'N'$ до ромбов, получим в совокупности ромбоэдр, являющийся основным параллелепипедом решетки. Следовательно, в этой решетке имеются оси 2-го порядка, порождающие оси 3-го порядка.

В случае оси 4-го порядка аналогично легко видеть, что сетка, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси 4-го порядка, и проходящая через точку O, квадратная, а соседняя, параллельная ей сетка либо передвинута на вектор OB, либо есть еще один промежуточный этаж, в котором ось 4-го порядка пронизывает сетку в центре квадрата. В обоих случаях имеются оси 2-го порядка, порождающие ось 4-го порядка.

Следовательно, любая голоэдрия полностью определяется связкой осей 2-го порядка.

Таким образом, существует 7 и только 7 голоэдрий: кубическая K, квадратная Q, ромбоэдрическая R, ортогональная O, моноклинная M, триклинная T, гексагональная H.

§ 5. 14 ТИПОВ БРАВЕ РЕШЕТОК

Браве заметил, что в каждой решетке (исключая гексагональную) может быть выбран параллелепипед решетки (может быть не основной), полная группа поворотов которого совпадает с голоэдрией решетки. Наименьший такой параллелепипед, а если возможен такой прямоугольный, то наименьший из таких прямоугольных, называется **параллелепипедом Браве** решетки. Найдем эти параллелепипеды для каждой (кроме гексагональной) голоэдрии.

Триклинная голоэдрия. За параллелепипед Браве принимается любой основной параллелепипед решетки.

Моноклинная голоэдрия. По лемме 7, в решетке с моноклинной голоэдрией существует плоская сетка, перпендикулярная оси 2-го порядка и проходящая через точку O этой оси. Комбинируя ось 2-го порядка с центром симметрии O, мы убедимся, что плоскость P этой сетки является плоскостью симметрии решетки. Рассмотрим одну из ближайших параллельных ей плоских сеток P'. Возможны два случая: ось 2-го порядка пронизывает P' в ее точке, и тогда получается примитивный прямой параллелепипед с произвольным параллелограммом в основании; ось пронизывает плоскость P' не в точке плоской сетки, а в середине между точками лежащей в ней плоской сетки. В этом случае получается прямой параллелепипед, основания которого лежат в плоскостях P' и ей симметричной относительно O плоскости P''. В зависимости от выбора основания он будет либо объемно-центрированным, либо бокоцентрированным. В кристаллографии принято так выбирать основание, чтобы он был бокоцентрированным, его и будем называть параллелепипедом Браве такой решетки.

Итак, в моноклинной голоэдрии имеется два типа прямых параллелепипедов Браве: 1) основной, основание которого есть общий параллелограмм; 2) бокоцентрированный.

Ортогональная голоэдрия. В силу существования двух осей второго порядка, лежащих в плоскости P, перпендикулярной к третьей оси, лежащая в ней плоская сетка будет либо прямоугольная, либо ромбическая. Рассмотрим ближайшие к ней параллельные плоские сетки, лежащие в плоскостях P' и P''. Если ей перпендикулярная ось 2-го порядка пересекает эти сетки по точке сетки, то, если эта сетка прямоугольная, получается простой прямоугольный параллелепипед. Если эта сетка ромбическая, то получается прямоугольный параллелепипед с центрированным основанием. Предположим теперь, что эта ось пересекает плоскости P' и P'' не по точке сетки. Тогда если эта сетка прямоугольная и ось пересекает ее в середине стороны прямоугольника, то получается бокоцентрированный параллелепипед, а если ось пересекает сетку в центре прямоугольника, то получается объемно-центрированный параллелепипед. Если же эта плоская сетка ромбическая и ось ее пересекает в центре ромба, то получается гранецентрированный параллелепипед. Пересекать сетку в середине стороны ромба ось не может, так как это противоречило бы существованию плоскостей симметрии, проходящих через эту ось.

Итак, в ортогональной голоэдрии имеется 4 типа прямоугольных параллелепипедов Браве: 1) основной, 2) объемно-центрированный, 3) базоцентрированный, 4) гранецентрированный прямоугольный параллелепипед.

Квадратная голоэдрия. Так как ось 4-го порядка содержит и ось 2-го порядка, то, повторяя рассуждения моноклинного случая, убеждаемся, что в решетке есть прямой параллелепипед, боковое ребро которого идет по этой оси 4-го порядка, причем сетка, проходящая через O и перпендикулярная этой оси, — квадратная. Если наш параллелепипед простой, то он является прямой квадратной призмой. Если он центрированный, то центрирующие сетки могут пересекаться с осью 4-го порядка, очевидно, только в центре своего квадрата, и, следовательно, получается объемно-центрированная прямая квадратная призма.

Итак, в квадратной голоэдрии имеется два типа параллелепипедов Браве: 1) основная прямая квадратная призма, 2) объемно-центрированная прямая квадратная призма.

Кубическая голоэдрия. В кубической голоэдрии какой-либо одной из осей 4-го порядка соответствует: 1) основная прямая квадратная призма либо 2) объемно-центрированная квадратная призма. Две другие оси 4-го порядка должны лежать в основании этой призмы и могут быть направлены либо по ребрам квадрата основания и тогда в случае 1) параллелепипедом Браве будет простой куб, а в случае 2) — объемно-центрированный куб, либо по направлению диагоналей квадрата, но это может быть только в случае 2), причем тогда, когда высота этой призмы равна диаго-

нали квадрата основания. В этом случае параллелепипед Браве есть гранецентрированный куб.

Таким образом, в кубической голоэдрии имеется 3 типа параллелепипедов Браве: 1) основной куб, 2) объемно-центрированный куб, 3) гранецентрированный куб.

Ромбоэдрическая голоэдрия. В § 4 было показано, что с ромбоэдрической голоэдрией имеется только один тип решеток. Параллелепипедом Браве этих решеток является ромбоэдр.

Гексагональная голоэдрия. Как было показано в § 4, решетки с гексагональной голоэдрией задаются основным параллелепипедом, построенным на трех ребрах правильной гексагональной призмы, исходящих из одной вершины. Этот параллелепипед тоже называется параллелепипедом Браве гексагональной решетки.

За кристаллографический координатный репер, или репер Браве, принимают репер, составленный ребрами параллелепипеда Браве, а в случае ромбоэдрической голоэдрии — репер, векторы которого исходят из вершины ромбоэдра, лежащей на его оси 3-го порядка.

Лемма 11. В одной и той же решетке не может быть параллелепипедов Браве двух разных (из 14) типов.

Действительно, в каждой данной решетке, исключая триклинные и моноклинные решетки, как метрика, так и центрировка параллелепипеда Браве однозначно определяется решеткой.

В моноклинной голоэдрии один вектор репера Браве есть примитивный вектор, идущий по оси 2-го порядка, выбор которого всегда однозначен. Два других вектора репера Браве образуют основной репер, векторы которого перпендикулярны оси 2-го порядка. В триклинной голоэдрии параллелепипедом Браве является любой основной параллелепипед решетки.

Таким образом, мы видим, что если решетка дана, то тип ее параллелепипеда Браве уже задан. Более того, во всех голоэдриях, кроме моноклинной и триклинной, он задан метрически.

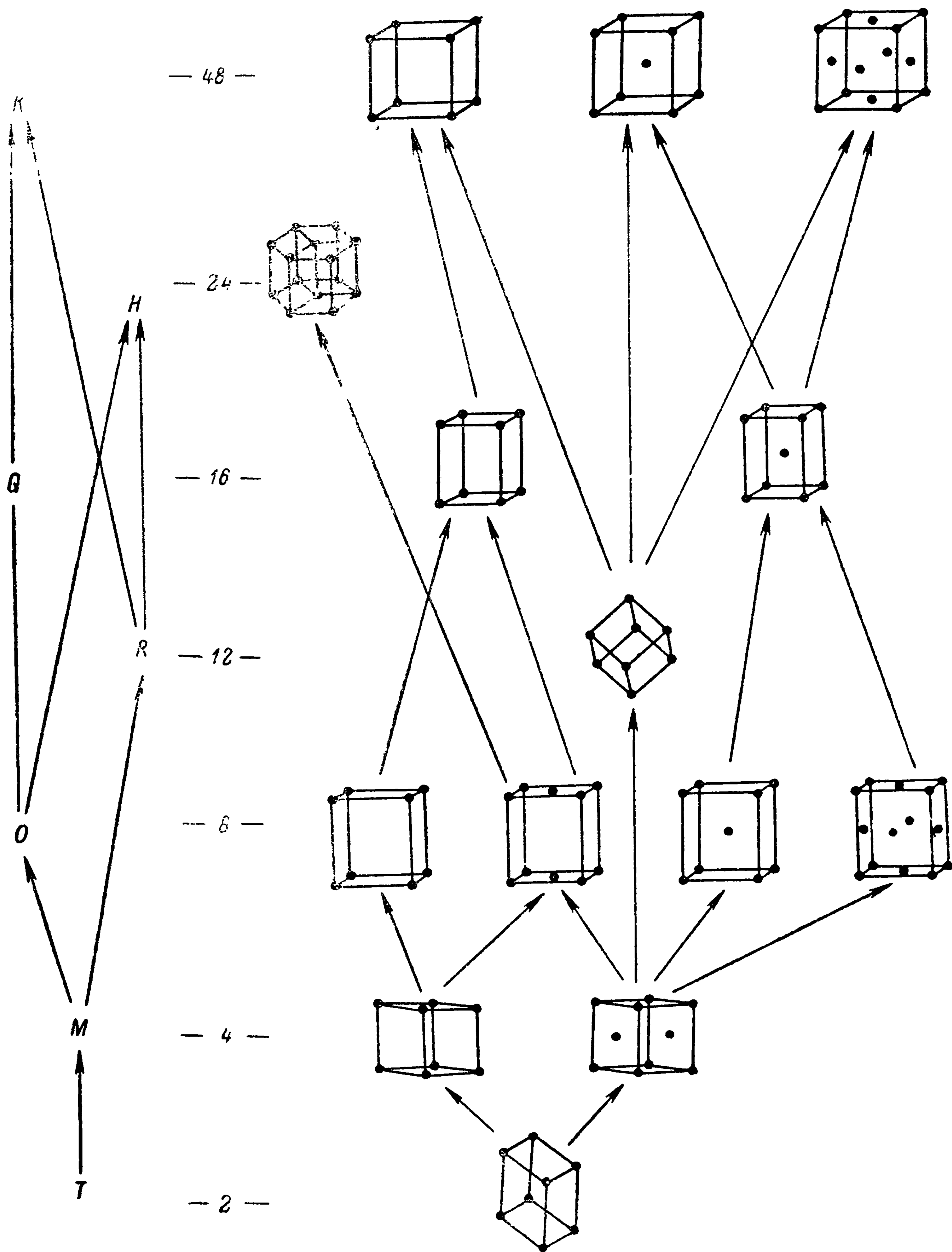
Итак, параллелепипед Браве любой решетки есть один и только один из 14 параллелепипедов. Этот факт позволяет расклассифицировать все решетки на 14 типов — на типы Браве.

Определение. Две решетки будем относить к одному и тому же типу Браве, если они имеют один и тот же тип своего параллелепипеда Браве.

Вывод этого фундаментального результата Браве не вполне совпадает с выводом самого Браве. А именно в отличие от Браве мы сначала при помощи осей 2-го порядка выводим 7 голоэдрий. Для получения своего результата Браве приходилось опираться на выведенный им в другой работе [10] полный список конечных точечных групп (как кристаллографических, так и некристаллографических).

В табл. 1 представлены 14 параллелепипедов Браве. Стрелками указано соподчинение классов Браве. Аналогичное соподчинение голоэдрий указано в левой части табл. 1.

Таблица 1



Глава 2

ВЫВОД ГОЛОЭДРИЙ И ТИПОВ БРАВЕ РЕШЕТОК ПРИ ПОМОЩИ ОБЛАСТЕЙ ДИРИХЛЕ

§ 1. ОБЛАСТИ ДИРИХЛЕ. РАЗБИЕНИЯ ДИРИХЛЕ

Областью Дирихле (или Вороного) точки O решетки Λ называется множество всех тех точек пространства, которые отстоят от точки O не дальше, чем от любой другой точки этой решетки.

Область Дирихле точки O, которую мы будем обозначать D_0, можно получить так. Соединим отрезками точку O с каждой из остальных точек решетки Λ и через середину каждого из этих отрезков проведем перпендикулярную к нему плоскость (плоскость Вороного). Пересечение полупространств, отрезаемых этими плоскостями, в которых лежит точка O, очевидно, и будет областью Дирихле точки O относительно решетки Λ.

Теорема 1. Области Дирихле решетки суть выпуклые многогранники, образующие нормальное, т. е. попарно смежными целыми гранями, параллельно переносное разбиение $\{D\}$ пространства.

Выпуклость этих многогранников следует из того, что каждый из многогранников Дирихле есть пересечение полупространств, т. е. выпуклых множеств. Многогранники Дирихле покрывают все пространство, так как каждая точка пространства может быть либо ближе к какой-либо точке O решетки Λ, чем ко всем остальным точкам этой решетки, и тогда она попадает внутрь области Дирихле точки O; либо может быть на одинаковом расстоянии от нескольких точек решетки Λ и ближе к ним, чем ко всем остальным точкам решетки, и тогда она попадает на границу области Дирихле. Области Дирихле не имеют общих внутренних точек, так как точка пространства не может быть одновременно ближе к точке A, чем к точке B, и обратно. Следовательно, области Дирихле образуют разбиение пространства. Нормальность этого разбиения следует из того, что если бы по одной и той же грани D_0 к ней прилегали по одной ее части одна D_1, а по другой — другая D_2, то эта грань не была бы перпендикулярна, по крайней мере, к одному из отрезков, соединяющих центр D_0 с центрами D_1 и D_2. И, наконец, разбиение это параллельно-переносное, так как все точки решетки Λ эквивалентны по группе T параллельных переносов решетки.

Замечание. Вообще равные и параллельные выпуклые многогранники, дающие нормальное разбиение пространства, по Федорову [11], называются параллелоэдрами. Е. С. Федоров установил, что существует всего лишь 5 типов параллелоэдров, из которых один общий (примитивный) и четыре специальных. Г. Ф. Вороной построил общую теорию n-мерных параллелоэдров [12]. Он показал, что любой примитивный (такой, что в каждой вершине разбиения сходится лишь $n+1$ параллелоэдр) n-мерный параллелоэдр является аффинным образом параллелоэдра Дирихле. В работе О. К. Житомирского [13] требование примитивности

для верности теоремы Вороного уменьшено. Но совсем исключить его до сих пор не удалось. Для параллелоэдров Дирихле Г. Ф. Вороной дал алгорифм нахождения (при каждом n) всех комбинаторно различных их типов [7, 12].

§ 2. ВЫВОД 5 ТИПОВ ТРЕХМЕРНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ ДИРИХЛЕ СПОСОБОМ СЛОЕВ

Два многогранника относят к одному и тому же комбинаторному типу, если существует отображение одного многогранника на другой, при котором совокупность граней первого многогранника взаимно однозначно отображается на совокупность граней второго многогранника, совокупность ребер первого многогранника взаимно однозначно отображается на совокупность ребер второго многогранника и совокупность вершин первого многогранника взаимно однозначно отображается на совокупность вершин второго многогранника, так что при этом сохраняются все инцидентности в обе стороны, т. е. если, например, какое-нибудь ребро первого многогранника принадлежит такой-то его грани, то соответствующее ребро второго принадлежит соответствующей его грани и т. д.

Если при произвольном, достаточно малом изменении всех параметров решетки не изменяется комбинаторный тип ее параллелоэдра Дирихле, то такой параллелоэдр Дирихле называется *общим*. В противном случае параллелоэдр Дирихле называется *специальным*.

Лемма 1. Области Дирихле и их грани имеют центры симметрии.

Это следует из того, что как точка решетки, так и любая середина отрезка между двумя точками решетки есть центр симметрии решетки.

Лемма 2. Каждому ребру многогранника D соответствует замкнутая зона его граней.

Действительно, в каждом ребре α сходится две грани D. Рассмотрим одну из этих граней. Она имеет центр симметрии, а следовательно, имеет ребро α', противоположное, равное и параллельное ребру α. Грань, с ней смежная по ребру α', совсем аналогично имеет противоположное, равное и параллельное ему ребро α'' и так далее. Так образуется зона граней, все ребра которой одинаковой длины. Зона эта замкнутая, так как ее проекция на плоскость, перпендикулярную ребру α, представляет собой многоугольник S, который является проекцией на эту плоскость многогранника D, и его стороны суть проекции отдельных граней этой зоны. Но прямая с выпуклым телом пересекается только по одному отрезку (так как пересечение должно быть тоже выпукло), и, следовательно, каждая вершина многоугольника S проекций есть проекция одного и только одного ребра зоны.

Лемма 3. Зональная проекция S области D на плоскость P, проходящую через O и перпендикулярную ребру зоны, представляет собой область Дирихле точки O той плоской сетки P, которая состоит из точек Λ, лежащих в плоскости, проходящей через O и перпендикулярной к α.

Действительно, центры A, B, C, ... тех D, которые смежны с D_0 по граням рассматриваемой зоны, лежат в этой плоскости, так как отрезки OA, OB, OC, ... все перпендикулярны к этим граням, а следовательно, и к ребру α. Многоугольник, который представляет собой область Дирихле в этой плоскости (определение области Дирихле для плоскости совершенно аналогично тому, которое было дано для пространства) точки O сетки P, очевидно, лежит в зональной призме рассматриваемой зоны D, так как все ее точки лежат ближе к точке O, чем к точкам A, B, C, ... С другой стороны, не может существовать в сетке P такой точки K, для которой перпендикуляр через середину OK, а следовательно, и плоскость Вороного для отрезка OK рассекали бы призму. В этом случае она отрезала бы одно из ребер этой зоны, и оно не могло бы быть ребром D.

Лемма 4. Совокупность тех D, центры которых составляют сетку P, образуют непроницаемый слой.

Это следует просто из того, что те D, которые соответствуют смежным S, сами смежны по соответственным граням рассматриваемой зоны.

Лемма 5. Совокупность всех D разбивается на параллельные друг другу непроницаемые слои.

Это следует из того, что, исходя из любого D и соответственного ребра α, можно построить такой непроницаемый слой. С другой стороны, если бы два слоя пересекались, то вследствие их непроницаемости они должны были бы иметь общие D, но тогда они не могли бы быть различны, так как всякое D предопределяет тот слой, в котором находится.

Рассмотрим некоторый слой 0 и обозначим через I тот параллельный ему и расположенный под ним слой, который не отделен от него никаким другим слоем. Очевидно, что всякая грань любого D из слоя 0, которая принадлежит верхней шапочке, покрывающей сверху (ребро α мы предполагаем вертикальным) зону, есть одновременно грань нижней шапочки одного из D, принадлежащих слою I, так как еще выше лежащие слои II, III, ... отделены от слоя 0 непроницаемым слоем I. Проекция верхней шапочки D получается, если рассмотреть, как врезаются проекции многоугольников S' слоя I в многоугольник S слоя 0.

Найдем теперь все комбинаторно различные разбиения $\{S\}$ для плоских сеток P. Многоугольники S любой плоской сетки, очевидно, равны, параллельно расположены, выпуклы, не входят друг в друга, покрывают всю плоскость P и смежны по целым сторонам. Пусть β — одна из этих сторон. Если мы рассмотрим непроницаемый ряд 0 тех S, которые смежны друг с другом по сторонам, параллельным стороне β, то могут быть только два случая: ближайшая к 0 параллельная полоска I областей S не имеет бокового смещения по отношению к полоске 0, и тогда S — прямоугольник (рис. 4), или же она имеет боковое смещение, и тогда S — шестиугольник с центром симметрии. Отрезки, соединяющие его центр с центрами тех S, которые ему смежны по сторонам, перпендикулярны к этим

сторонам и проходят через их середины; из этого следует, что шестиугольники S вписуемы в круг.

Выведем теперь все различные комбинаторные типы многогранников D. Если S — шестиугольник, то возможно 4 случая, соответственно

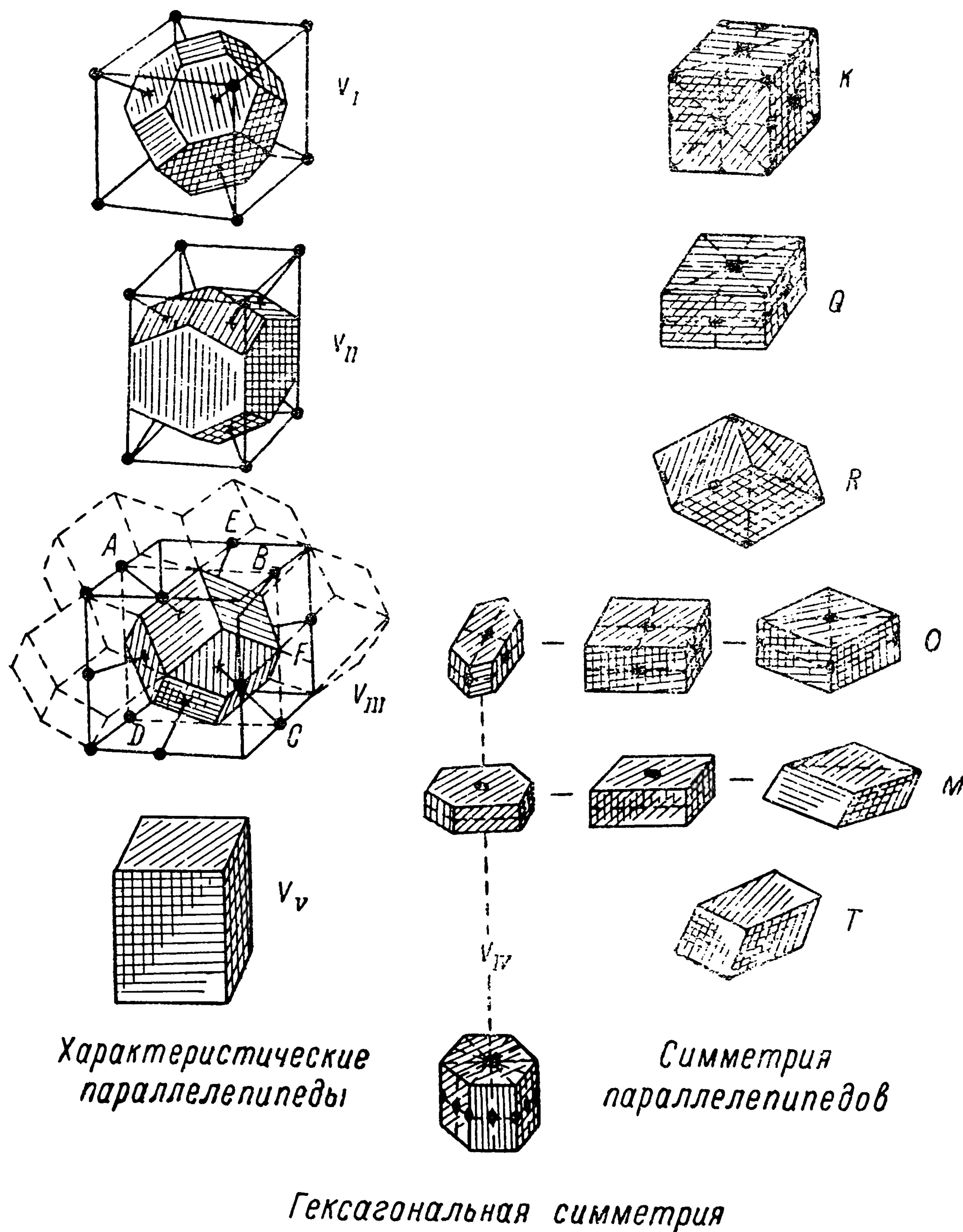


Рис. 4.

тому, куда проектируется точка τ схождения трех S I слоя: 1) внутрь одного из параллелограммов p, g, r; 2) на одну из сторон $P'H$, $Q'H$, $R'H$; 3) в точку H; 4) в одну из точек P', Q', R' (рис. 5). В этих случаях получаются соответственно проекции $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}'$, $\overline{\text{III}}$, $\overline{\text{IV}}$ (рис. 4). Если же S —

прямоугольник, то получаются проекции $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{IV}}'$, $\overline{\text{V}}$. Итак, получаются многогранники I, II′, III, IV, II, IV′, V. Многогранники II и II′, IV

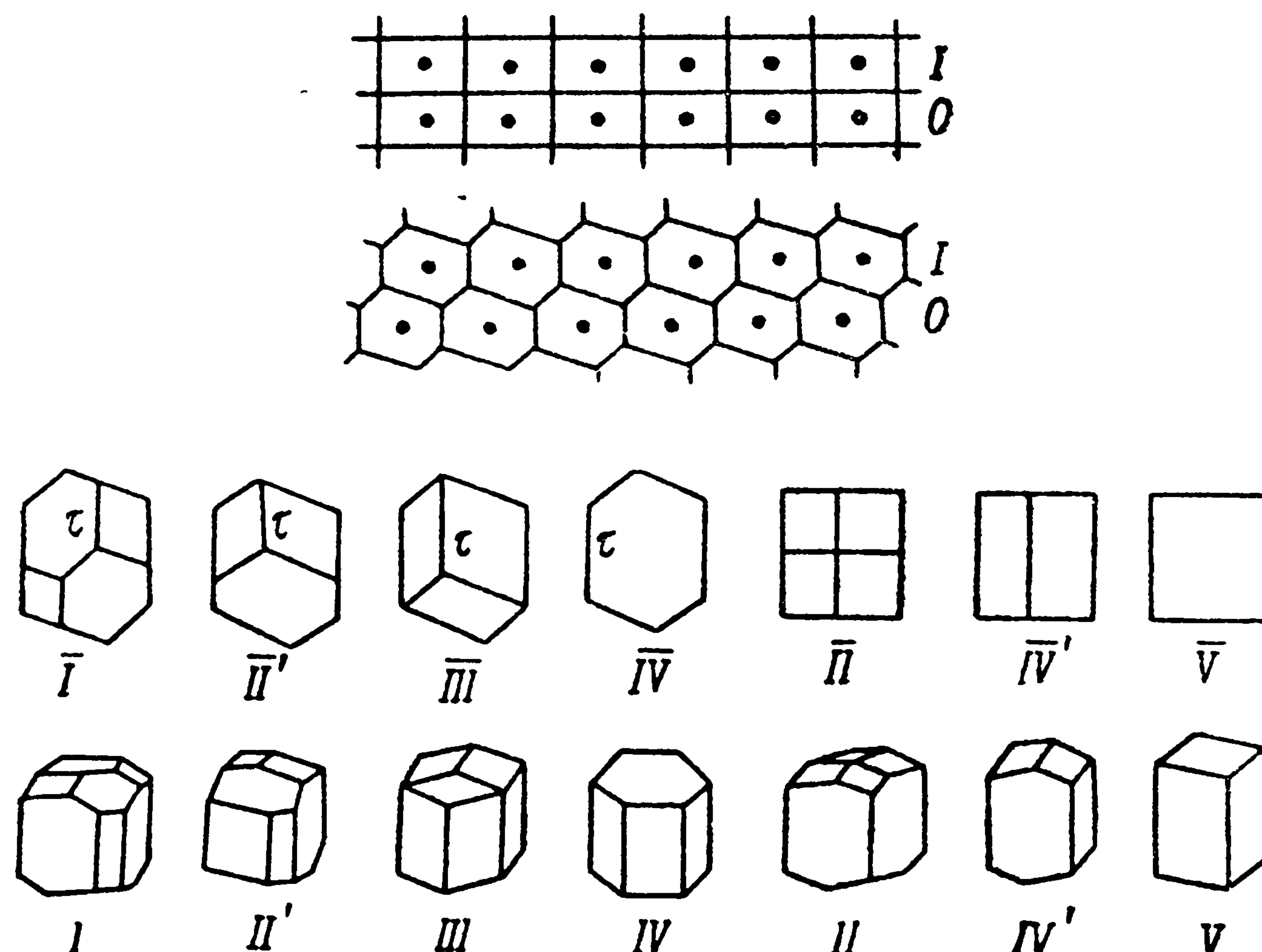


Рис. 4 (*продолжение*).

и IV′ комбинаторно одинаковы, а соответствующие их проекции суть проекции комбинаторно одинаковых многогранников, но вдоль комбинаторно различных зон. Получается всего 5 комбинаторно различных многогранников D: четырнадцатигранник D_1; додекаэдр D_2, четыре из граней которого шестиугольники; додекаэдр D_3, все грани которого параллелограммы; прямая шестиугольная призма D_4 и прямоугольный параллелепипед D_5.

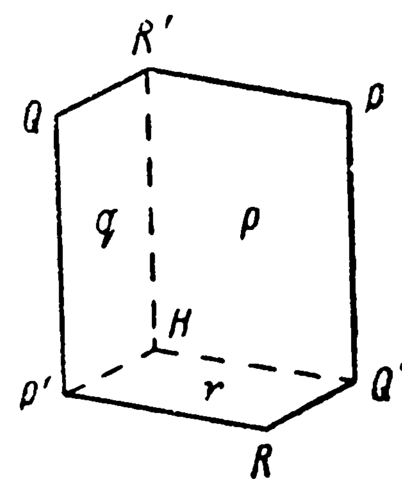


Рис. 5.

Лемма 6. Многогранники D_2, D_3, D_4 и D_5 — специальные и представляют собой предельные случаи многогранника D_1, который является общим.

Действительно, если D не D_1, то мы можем произвести такую сколь угодно малую вариацию основного параллелепипеда решетки Λ, чтобы S сетки P сделался шестиугольником, если он сначала был прямоугольником, и чтобы слой I получил такое боковое смещение относительно слоя 0, что точка τ оказалась бы внутри одного из параллелограммов p, g, r. Если вариация эта достаточно мала, ребро α изменится сколько угодно мало и не станет нулем, и, следовательно, все слоевое построение D, исходящее из этого ребра, останется в силе, тогда как D превратится в D_1.

Строгое доказательство того, что при малой вариации основного параллелепипеда ни одно ребро α не превратится в нуль, следует из того, что при такой вариации все плоскости Дирихле, которые соответствуют близким к O точкам Λ, лишь очень мало перемещаются в тех своих частях, которые не очень далеки от точки O, и, следовательно, плоскости, не параллельные ребру α, срезать его до нуля не могут.

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

Очевидно, что всякий поворот решетки Λ в себя вокруг ее точки O преобразует область Дирихле D_0 точки O решетки Λ также в себя. Очевидно, имеет место обратное, так как если некоторый поворот преобразует D_0 в себя, то он преобразует в себя и совокупность центров граней D_0, т. е. и совокупность центров тех D, которые с этим D_0 смежны, а следовательно, преобразует в себя и всю решетку. Таким образом, чтобы найти все голоэдрии решеток, достаточно найти все возможные группы поворотов в себя параллелоэдров Дирихле.

Имеет место следующее замечательное обстоятельство: в случаях D_1, D_2, D_3 и D_5 в решетке имеется так называемый характеристический параллелепипед (может быть не основной), весьма просто связанный (в каждом из этих случаев по-своему) с D и обладающий той же поворотной группой, что и D.

Теорема 2. В решетках с параллелоэдром Дирихле типа D_1, D_2, D_3, D_5 всегда существует характеристический параллелепипед.

Для D_1 это — параллелепипед, вершинами которого являются центры D_1, смежные с данным по шестиугольным граням (рис. 4). Это следует просто из того, что его соответственные ребра суть отрезки, соединяющие центры эквивалентных пар D, и, следовательно, равны и параллельны. Очевидно, что всякий поворот, преобразующий D_1 в себя, преобразует и этот параллелепипед в себя и обратно. Полученный характеристический параллелепипед есть, очевидно, объемно-центрированный параллелепипед решетки.

Для D_2 характеристическим будет тот параллелепипед, вершины которого лежат в центрах D_2, смежных с данным D_2 по параллелограмматическим граням (рис. 4). Получившийся характеристический параллелепипед есть, очевидно, объемно-центрированный параллелепипед решетки. Для D_3 характеристический параллелепипед следующий (рис. 4): рассмотрим те 12 D_3, которые смежны с данным D_3 по всем его граням. Каждый из них имеет три внутренние диагонали, каждая из которых соединяет противоположные четверные вершины D_3, т. е. такие вершины D_3, в которых сходятся по 4 грани. У каждого из этих 12 D_3 только одна из этих трех диагоналей идет параллельно той грани этого D_3, по которой он смежен с рассматриваемым D_3. Эти 12 диагоналей суть ребра некоторого параллелепипеда, и центры этих 12 D_3 — середины этих ребер.

Мы будем считать этот параллелепипед характеристическим для D_3. Он опять имеет характерное свойство — каждый его поворот в себя есть вместе с тем такой же поворот для D_3 и обратно. Если параллельно передвинуть этот параллелепипед на 1/2 его ребра, то он превратится в гранецентрированный параллелепипед Λ. В D_5 сам D_5 есть характеристический параллелепипед. Если его передвинуть на 1/2 телесной диагонали, то он дает основной параллелепипед Λ. Таким образом, чтобы найти все голоэдрии решеток, достаточно найти все различные полные группы параллелепипедов и отдельно исследовать D_4.

Ось симметрии параллелепипеда может прорезать его поверхность или в центре граней, и тогда она 4 или 2-го порядка, или в серединах ребер — тогда она 2-го порядка, или в вершинах — тогда 3-го порядка. Если параллелепипед — куб, то он имеет все оси, которые вообще топологически может иметь параллелепипед. Если параллелепипед не куб, но все-таки имеет ось 4-го порядка, то он имеет, очевидно, форму Q (рис. 4), т. е. может быть получен из куба сжатием или растяжением вдоль одной из его осей 4-го порядка. Если параллелепипед не куб, но все-таки имеет ось 3-го порядка, то он, очевидно, имеет форму R, т. е. может быть получен из куба сжатием или растяжением вдоль одной из его осей 3-го порядка. Наконец, параллелепипед может иметь только одну ось 2-го порядка, причем если она проходит через центры двух граней, то он будет иметь первую форму M, т. е. будет прямым параллелепипедом, в основании которого произвольный, разносторонний и не прямоугольный параллелограмм; если же она проходит через середины ребер, то он имеет вторую форму M, т. е. в основании его ромб (или квадрат), а параллелепипед скошен вдоль одной из диагоналей его основания. Если все оси только 2-го порядка, но их несколько, то получаются только оба случая O, т. е. прямоугольный параллелепипед, все три ребра которого разные, или же прямой параллелепипед, основание которого — ромб (но не квадрат). Другие формы в этом случае невозможны, потому что если бы две оси 2-го порядка принадлежали двум смежным ребрам одной и той же грани, то была бы ось 3-го порядка, а если бы две оси 2-го порядка принадлежали двум противолежащим ребрам одной и той же грани или ребру и центру одной и той же грани, то была бы ось 4-го порядка, в чем легко убедиться, если произвести один за другим те два поворота, которые соответствуют этим осям 2-го порядка.

Наконец, параллелепипед может быть совсем произвольным, косым параллелепипедом, тогда он не удовлетворяет ни одному из предыдущих условий и, следовательно, не имеет никаких осей симметрии. Каждый параллелепипед имеет центр симметрии; каждая из его осей есть одновременно и инверсионная ось того же наимёнования и обратно, каждая его плоскость симметрии перпендикулярна к одной из его осей четного порядка и обратно. Произведенный сейчас вывод всех элементов симметрии параллелепипеда дает, следовательно, и полную группу симметрии параллелепипеда.

Таким образом, получается всего шесть групп (голоэдрий) симметрии: кубическая K, квадратная Q, ромбоэдрическая R, ортогональная O, моноклинная M и триклинная T.

Действительно, группы самих преобразований симметрии в обоих случаях O тождественны (т. е. набор и взаимное расположение элементов симметрии в этих случаях одинаковы), причем оба эти случая различаются только расположением элементов симметрии по отношению к параллелепипеду. Аналогичная картина наблюдается и для обоих случаев M.

Будем считать, что два параллелепипеда принадлежат одной и той же голоэдрии, если группы симметрий их тождественны, и что они одного и того же сорта, если сверх того еще и расположение элементов симметрии по отношению к обоим параллелепипедам одинаково.

Для D_4 в решетке имеется прямая призма, основание которой — шестиугольник с центром симметрии, вписанный в круг. Очевидно, что если этот шестиугольник не имеет равных пар противоположных сторон, то получается случай M, если две из этих пар одинаковы, то — случай O, и, наконец, если все три одинаковы, т. е. основание — правильный шестиугольник, а следовательно, и сама призма правильная, появляется новая группа симметрии — гексагональная. В последнем случае характеристического параллелепипеда не существует, так как D_4 имеет ось 6-го порядка, а параллелепипед такой оси не имеет.

Таким образом, решетка может иметь 7 и только 7 голоэдрий — K, Q, R, O, M, T, H.

§ 4. ВЫВОД 14 ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ БРАВЕ

Для D_1 и D_2 характеристический параллелепипед объемно-центрированный.

Лемма 7. Характеристический параллелепипед решеток с областью Дирихле D_3 имеет равные ребра.

Действительно, пусть E и F (рис. 4) — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$, причем диагональ BD этого параллелограмма перпендикулярна к отрезку EF, так как она перпендикулярна к грани EF области D. Но это может иметь место только в том случае, когда параллелограмм $ABCD$ — ромб.

Из 8 сортов симметрии параллелепипеда только 5 могут иметь место для D_3, так как для Q, в первом варианте O и в первом варианте M ребра параллелепипеда не могут быть равны друг другу. Кроме того, в этом случае вместо самого характеристического параллелепипеда мы всегда можем рассмотреть тот, который получается из него параллельным переносом на половину его ребра, т. е. гранецентрированный параллелепипед.

Для D_5 перенос характеристического параллелепипеда на половину его внутренней диагонали дает основной прямоугольный параллелепипед решетки Λ, имеющий точки Λ только в своих вершинах.

Таким образом, достаточно рассмотреть 8 сортов симметрии объемно-центрированного параллелепипеда, 5 сортов симметрии гранецентрированного параллелепипеда, 3 сорта основных прямоугольных параллелепипедов и 3 упомянутых сорта симметрии шестиугольной призмы, чтобы получить 14 параллелепипедов Браве, задающих 14 типов Браве решеток.

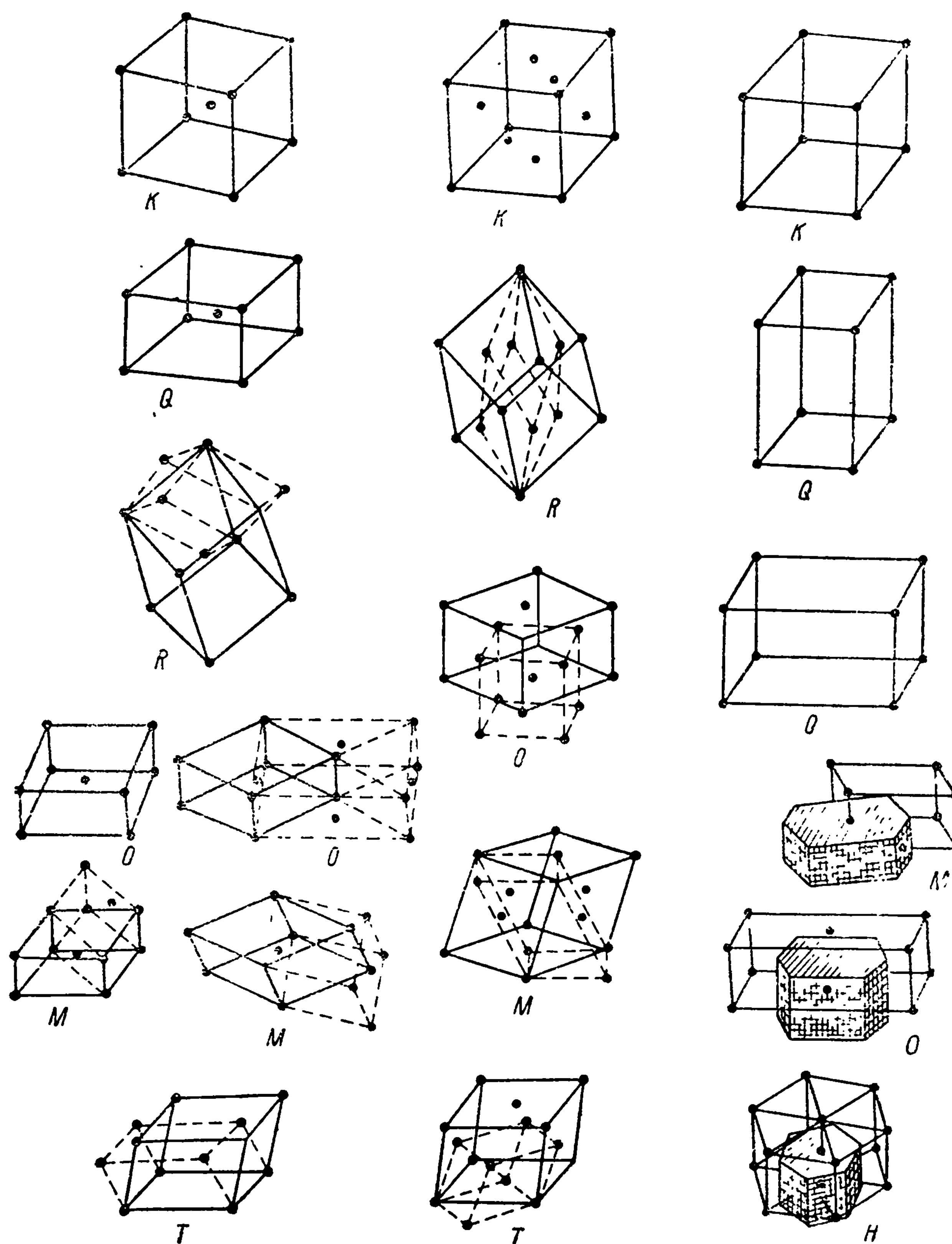


Рис. 6.

Действительно, D_1 — общий, и потому при достаточно малых изменениях его решетки Λ, т. е. его характеристического параллелепипеда, из объемно-центрированного куба можно получить характеристические параллелепипеды всех 8 сортов (рис. 6). Для D_2 можно получить характеристические параллелепипеды не всех 8 сортов, а только случаи Q, первый вариант O, два моноклинных и триклинный, но они не дадут ничего нового по сравнению с D_1. Для D_3, в силу равнореберности характеристического параллелепипеда, можно, как легко видеть, получить не-

большим изменением куба 5 сортов параллелепипедов (рис. 6). Для D_5 возможно, очевидно, лишь три сорта. Для этих 16 случаев за параллелепипед Браве выбирается либо сам характеристический параллелепипед, либо просто с ним связанный (пунктир, рис. 6). Таким образом получаем, что в D_1, D_2, D_3, D_5 имеется 11 разных параллелепипедов Браве. Шестиугольная призма дает еще три случая, и всего получится 14 параллелепипедов Браве, которые были выведены в гл. 1.

Для K, Q, R, O, H параллелепипед Браве однозначно задан решеткой. В M и T, если исходить только из определения, приведенного в § 5 гл. 1, он может быть выбран весьма разнообразно. В следующей главе будут даны дополнительные условия, при которых и в этих случаях параллелепипед Браве выбирается однозначно.

§ 5. СОРТА РЕШЕТОК

Пусть дан совсем произвольный комбинаторно-топологический объект S (например, какой-нибудь многогранник или разбиение пространства на области Дирихле точек решетки и т. д.) и некоторая группа G его изоморфных комбинаторно-топологических отображений на себя (может быть, и не полная, т. е. группа не всех его отображений на себя). Тогда символ (S, G) будем называть парой. Две пары (S, G) и (S', G') будем относить к одному и тому же сорту тогда и только тогда, когда: 1) сами объекты S и S' комбинаторно-топологически изоморфны, т. е. можно установить такое взаимно-однозначное соответствие между элементами одинаковой размерности этих объектов (между вершинами, ребрами, гранями и т. д. одного объекта и вершинами, ребрами, гранями и т. д. другого объекта), что если какие-нибудь два элемента первого объекта инцидентны (т. е. один из этих элементов входит в состав другого, например данная вершина есть конец такого-то ребра или есть вершина такой-то грани или данное ребро есть сторона такой-то грани), то соответственные элементы другого объекта тоже инцидентны и обратно; 2) группы G и G' абстрактно изоморфны; 3) эти группы одинаково действуют на этих объектах, т. е. если $g \in G$ переводит элемент A первого объекта в элемент B, то соответствующий по изоморфизму групп элемент $g' \in G'$ переводит элемент A', соответствующий элементу A, в элемент B', соответствующий элементу B.

Разделение Браве решеток на 14 типов, как мы увидим в гл. 4, есть собственно классификация решеток по абстрактному изоморфизму полных групп движений, совмещающих их с собой. В работе Б. Н. Делоне [15] впервые была предложена классификация решеток на сорта. Их оказалось 24. Но так как в одном и том же сорте абстрактный вид полных групп движений, совмещающих решетки с собой, один и тот же, то типы Браве являются просто объединениями сортов.

Определение. Две решетки будем относить к одному и тому же сорту тогда и только тогда, когда соответствующие им пары (S, G) и (S', G')

одного сорта. Здесь S и S' — разбиения пространства на области Дирихле точек этих решеток, а G и G' — полные группы движений, совмещающих эти разбиения с собой.

Разбиения S и S' будут комбинаторно-топологически изоморфны тогда и только тогда, когда сами области Дирихле этих решеток D и D' комбинаторно-топологически изоморфны, т. е. будут принадлежать к одному и тому же из 5 типов. Из результатов гл. 4 видно, что группы G и G' будут абстрактно-изоморфны и начнут одинаково действовать на разбиения S и S' тогда и только тогда, когда голоэдрии D и D' одинаковы и соответствующие оси этих голоэдрий комбинаторно-топологически одинаково связаны с D и D', т. е. когда сами D и D' одинаковых сортов.

Чтобы задать сорт параллелепипеда, достаточно указать, где пересекают параллелепипед оси 2-го порядка голоэдрии.

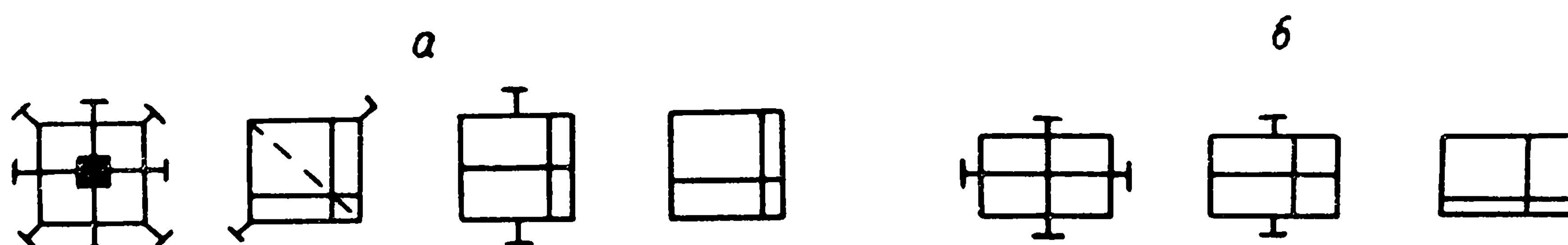


Рис. 7.

Теперь выведем все возможные сорта каждого из 5 типов параллелоэдров Дирихле. D_1, D_2, D_3 и D_5 обладают характеристическими параллелепипедами, весьма просто с ними связанными, причем у D_1 и D_2 он объемно-центрированный, у D_3 — гранецентрированный, а у D_5 — простой. Легко видеть, что характеристический параллелепипед во всех этих 4 случаях так связан с областью Дирихле, что если области Дирихле одного и того же сорта, то и их характеристические параллелепипеды одного и того же сорта и обратно.

D_1 — общая область Дирихле, и поэтому при любом достаточно малом изменении решетки она останется типа D_1. Но все 8 сортов параллелепипеда могут быть получены из куба сколь угодно малым его изменением. Поэтому характеристический параллелепипед для D_1 может быть всех 8 разных сортов. Что касается D_2, то для него, очевидно, исключаются случаи K и R, так как D_2 уже по комбинаторно-топологическим соображениям не может иметь оси 3-го порядка. Для D_2 исключается еще и 2-й ортогональный случай, так как в характеристическом параллелепипеде для D_2 имеется одна особая пара прямоугольных граней (соответствующая особой зоне), которая не может переходить ни в какую другую пару никакими поворотами этого параллелепипеда в себя, а между тем у 2-го ортогонального сорта параллелепипеда имеется две и только две пары прямоугольных граней, и они переходят друг в друга при помощи осей 2-го порядка. Остальные 5 сортов возможны (рис. 7).

Таблица 2

	I	II	III	IV	V
K					
Q					
R					
O					
M					
T					
H					

У D_3, как мы видели, характеристический параллелепипед равнореберный, и, следовательно, исключаются случаи Q, O_2 и M_2. Остальные 5 типов, как видно из рисунков, аналогичных рисункам 7, *а* и *б*, существуют. Для D_5, очевидно, возможны только случаи K, Q, O. Для D_4 исследования надо проводить отдельно, и они сводятся к исследованию шестиугольного основания, у которого могут быть три или две пары одинаковых сторон, или все три пары различные (рис. 4).

Таким образом, параллелоэдров Дирихле может быть 24 сорта и только 24 (табл. 2).

Вывод необходимых и достаточных условий принадлежности решетки к тому или иному сорту будет дан в гл. 3, § 7.

Глава 3

ТЕОРИЯ ПРИВЕДЕНИЯ

§ 1. ЗАДАЧА ПРИВЕДЕНИЯ

Основной репер однозначно определяет решетку, но обратного действия это не имеет, т. е. сама решетка своего основного репера однозначно не задает. Он может быть выбран бесконечным числом способов, а именно любой данный основной репер решетки преобразуется во все остальные ее основные реперы любыми унимодулярными целочисленными матрицами. Таким образом, решетка и основной ее репер связаны не взаимно однозначно. Изучение данного основного репера данной решетки может непосредственно не вскрыть многих свойств этой решетки, так как при этом мы изучаем как свойства данной решетки, так и случайные, быть может, не характерные для этой решетки индивидуальные свойства рассматриваемого ее основного репера. Так, например, двумерная решетка может быть просто квадратной и, следовательно, имеющей разные дополнительные элементы симметрии: поворот в себе на 90° вокруг точки и так далее, но она может быть задана не основным ее квадратом, а каким-нибудь косым и сильно вытянутым ее основным параллелограммом, и тогда, изучая этот параллелограмм, мы непосредственно не заметим этих ее симметрий и других специальных свойств. Если две решетки заданы какими-то своими основными реперами, то, вообще говоря, нельзя, даже непосредственно рассматривая эти реперы, сказать, тождественны эти решетки или нет.

Одна из самых основных задач всей теории решеток, так называемая задача приведения, состоит в нахождении таких условий, наложенных на параметры основного репера, чтобы в любой решетке существовал удовлетворяющий этим условиям основной репер и притом

только один (если не считать различными реперы, которые получаются из данного движениями, совмещающими всю решетку с собой).* Единственный в своем роде такой основной репер называется приведенным. Алгорифм, при помощи которого мы, исходя от любого основного репера $\mathcal{E}$, можем найти приведенный основной репер, называется алгорифмом приведения. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный основной репер $\mathcal{E}$ был приведенным, называются условиями приведения.

Впервые приведение двухмерной решетки было подробно рассмотрено Лагранжем в 1768 г. в его выдающемся мемуаре о неопределенных уравнениях 2-й степени с двумя неизвестными, но рассмотрено как чисто арифметическая задача без всякого упоминания о геометрии [16]. Причем Лагранж нашел как условия приведения, так и весьма удобный алгорифм приведения, позволяющий в конечное число шагов перейти от любого данного основного репера к приведенному.

Гаусс в своем знаменитом сочинении [17] особенно тщательно разработал метод Лагранжа, но, несмотря на все его усилия, ему не удалось решить аналогичных вопросов для трехмерного случая. Это было сделано Зеебером в большой работе 1831 г. [18]. Своей сложностью эта работа вызвала возмущение математиков, на что Гаусс выступил с небольшой статьей, указав в ней, что другие математики, да и он сам, до Зеебера вообще не смогли решить этот вопрос, и поэтому их критика беспочвенна [19]. До этой статьи Гаусса как Лагранж, так и Гаусс, и Зеебер в своей работе 1831 г. занимались этим как чисто арифметическим вопросом о приведении квадратичных форм. Только в конце статьи [19] Гаусс отметил, что вопрос этот, собственно говоря, геометрический, и указал на «условие диагоналей», о котором пойдет речь ниже.

Дирихле в работе 1848 г. [6] дает, наконец, геометрическое доказательство того, что приведение Лагранжа и Зеебера состоит в выборе репера, составленного тремя последовательными минимумами, и что в 2- и 3-мерном случае такой репер всегда является основным репером решетки. Еще более любопытно, что тот же Зеебер в работе 1824 г. [20] о внутренней структуре твердых тел, может быть, первый в литературе указал на важность использования положительных тройничных квадратичных форм в кристаллографии.

В 1850 г. Браве перенес эти идеи о приведенном параллелепипеде решетки из теории чисел в кристаллографию. Кроме того, он ввел одно новое понятие в этой области — особенный приведенный тетраэдр, который он назвал главным тетраэдром. Это — основной тетраэдр решетки, все двугранные углы которого не тупые. Наконец, Браве перенес в кристаллографию теорию репера, взаимного к данному, которую разработал еще Лагранж в 1773 г. в своей работе о треугольных пирамидах [16].

---

* Выполнялось ли условие единственности такого репера, будет пояснено дальше.

§ 2. ПРИВЕДЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ПО ЛАГРАНЖУ И ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ПО ЗЕЕБЕРУ

Репер $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, задающий сетку (двумерную решетку), определяется обычно длинами a, b двух его векторов и углом γ между ними. Однако все три параметра этого репера можно задать однородными по размерности, если задать квадраты длин его векторов и произведение этих векторов на косинус угла между ними, т. е. числа

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \quad k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

которые называются скалярными квадратами и скалярным произведением этих векторов.

Если x, y — координаты некоторой точки M пространства по отношению к рассматриваемому реперу $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, т. е. M — конец вектора $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y$, проведенного из начала O, то, применив правило скалярного умножения, мы убеждаемся, что

$$OM^2 = (\mathbf{a}x + \mathbf{b}y)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2kxy. \quad (1)$$

Выражение (1) называется положительной двойничной квадратичной формой. Когда говорят, что сетка (решетка) задана квадратичной формой, то под этим надо понимать только то, что скалярные квадраты векторов некоторого основного репера этой сетки равны a^2, b^2, а их скалярное произведение равно k.

Аналогично в трехмерном случае репер $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, задающий решетку, обычно определяемый длинами a, b, c трех его векторов и углами α, β, γ между ними, можно задать однородно в отношении размерности всех шести параметров, если задать квадраты длин его векторов и попарные произведения этих векторов на косинусы углов между ними, т. е. числа

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \quad c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad g = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad h = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}, \quad k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

которые называются скалярными квадратами и скалярными произведениями этих векторов. Если x, y, z — координаты некоторой точки пространства по отношению к рассматриваемому реперу $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, т. е. M — конец вектора $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z$, проведенного из начала O, то, применив правило скалярного умножения, убеждаемся, что

$$OM^2 = (\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy. \quad (2)$$

Форму (2) часто обозначают при этом символом $\begin{pmatrix} a^2, & b^2, & c^2 \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$. Эти параметры называются параметрами Лагранжа—Гаусса.

Приведенный по Лагранжу основной репер двухмерной решетки. Репер 2-мерной решетки называется приведенным по Лагранжу, если он составлен двумя последовательными минимумами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ решетки и угол γ между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не тупой (что можно всегда достигнуть, изменив один из векторов,

если нужно, на обратный). В силу теоремы 1 гл. 1, такой репер всегда основной.

Пусть метрическая форма репера {a, b} $a^2x^2+2kxy+b^2y^2$. Рассмотрим репер, удовлетворяющий так называемым неравенствам приведения Лагранжа,

$$0 \leqslant 2k \leqslant a^2 \leqslant b^2. \quad (3)$$

Эти три неравенства равносильны тому, что конец B вектора **b** лежит в заштрихованной области Ω (рис. 8). Если репер {a, b} составлен последовательными минимумами с не тупым углом между ними, то это, оче-

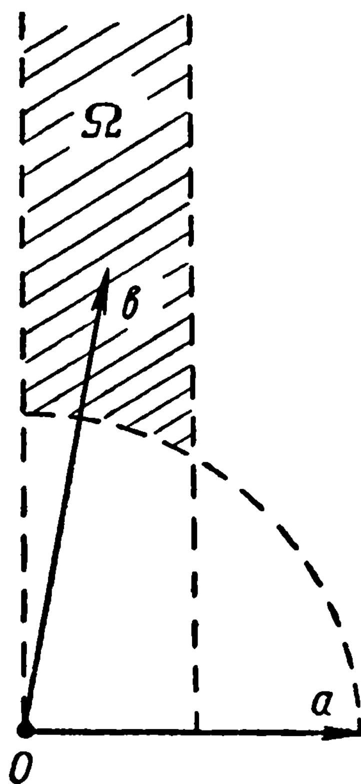


Рис. 8.

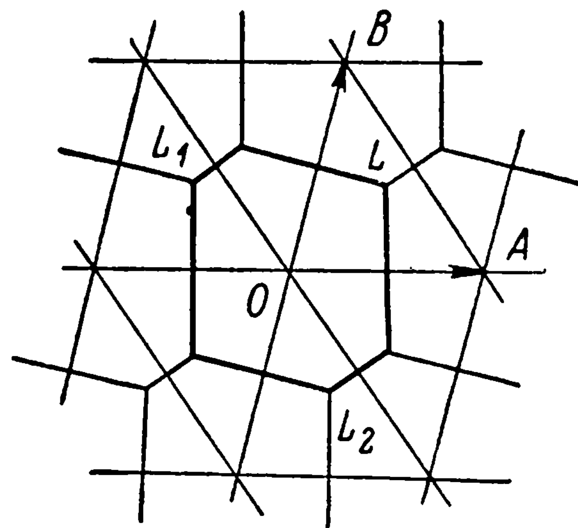


Рис. 9.

видно, имеет место, так как (по теореме 1 § 2) репер {a, b} тогда основной и, следовательно, B лежит в ближайшем к OA параллельном ряду и ближе всех его точек к O. Наоборот, если B лежит в Ω, то **b** — кратчайший из неколлинеарных с **a** векторов решетки, так как в этом случае OD_2, где D_2 — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую b_2 2-го параллельного OA ряда, как легко видеть, уже длиннее, чем OB. А так как $OA < OB$ и вектор **a** пустой, то **a** — кратчайший вектор решетки. Итак, условие (3) эквивалентно тому, что репер составлен двумя последовательными минимумами, угол между которыми не тупой.

Будем считать, что параллелограмм удовлетворяет «условиям диагоналей», если даже самая короткая его диагональ длиннее самой длинной его стороны. Пусть параллелограмм построен на двух последовательных минимумах **a**, **b**. Диагонали его суть векторы не коллинеарные **a**, и, следовательно, в силу самого выбора **b**, каждая из них длиннее наибольшей его стороны **b**.

Пусть, наоборот, параллелограмм основной и для него выполнено условие диагоналей. В таком случае он построен на последовательных

минимумах. Действительно, пусть $a < b$ и угол между **a** и **b** острый. Поскольку диагональ AB больше вектора OB и длина вектора OB больше длины вектора OA, то точка B лежит в области Ω. Следовательно, в силу доказанного выше, векторы его **a** и **b** суть последовательные минимумы.

Еще одно важное для нас замечание. Приведенный по Лагранжу репер OAB дает основной остроугольный треугольник решетки, так как угол AOB, по условию, был выбран острым, а против каждого из двух других лежит не наибольшая сторона треугольника. В остроугольном треугольнике перпендикуляры к серединам сторон пересекаются внутри его. Шестиугольник (рис. 9) есть, очевидно, область Дирихле точки O в решетке, построенной на репере $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Действительно, все точки этого шестиугольника не дальше от O, чем L, L_1, L_2, и, следовательно, область Дирихле точки O есть этот шестиугольник или его часть, но частью она быть не может, так как для каждой точки область Дирихле была бы тоже только такой же частью ее, а между тем области Дирихле должны покрывать всю плоскость. Но область Дирихле вписана в окружность с центром в точке O, так как вершины области Дирихле равноудалены от центров тех трех областей Дирихле, которые в ней сходятся. Следовательно, $OL=AL=BL$. Но $AL=OL_1$, а $BL=OL_2$ по параллельной переносности. Покажем еще, что радиус ρ этой окружности меньше или равен $\frac{OB}{\sqrt{2}}$. Действительно, при увеличении острого угла φ до $90°$ без изменения длин сторон OA и OB, его образующих, катет OE прямоугольного треугольника OEL остается неизменным, а катет EL возрастает до $\frac{OB}{2}$. При увеличении же стороны OA до OB катет OE возрастает до $\frac{OB}{2}$. Следовательно, ρ может быть не больше $\frac{OB}{\sqrt{2}}$.

Приведенный по Зееберу основной параллелепипед трехмерной решетки. Репер трехмерной решетки называется приведенным по Зееберу, если он составлен тремя последовательными минимумами $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ решетки, все три угла между которыми одновременно либо не тупые, либо не острые. Такой репер всегда основной. Покажем, что параллелепипед $OABC$, на нем построенный, удовлетворяет «условиям диагоналей», т. е. даже самая короткая диагональ любой его грани не короче самой длинной стороны этой грани, а самая короткая его телесная диагональ не короче самого длинного его ребра. Действительно, в двухмерных решетках, лежащих в плоскостях любой его грани ab, ac или bc, векторы **a**, **b**, **a**, **c** и **b**, **c** суть, очевидно, последовательные ее минимумы, и, следовательно, для любой грани удовлетворяется условие диагоналей. Но вектор OC — кратчайший не компланарный с **a**, **b** вектор решетки, и, следовательно, OC короче всех телесных диагоналей. Пусть, наоборот, удовлетворяется условие диагоналей. Покажем, что тогда векторы **a**, **b** и **c** — три последовательных минимума решетки.

Из удовлетворения условия диагоналей для основания **a**, **b** следует, что **a** и **b** — последовательные минимумы сетки, лежащей в плоскости основания (см. выше). Не умаляя общности, будем считать, что **a** и **b** образуют не тупой угол. Рассмотрим плоскость S_1, ближайшую к параллельной ей сетке. Тогда, в силу условий диагоналей для телесных диагоналей и для диагоналей боковых граней, основание D_1 перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость P_1, будет находиться от точки C лежащей в ней сетки не дальше, чем от точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (рис. 10), т. е. ввиду приведенности по Лагранжу параллелограмма OAB основание D_1 будет лежать внутри или на границе шестиугольника Дирихле точки C этой сетки. Из выведенного выше неравенства для ρ следует, что $\rho < \frac{1}{\sqrt{2}} OC$, а следовательно, $OD_1 > \sqrt{OC^2 - \frac{OC^2}{2}}$, т. е. больше $\frac{1}{\sqrt{2}} OC$, а следовательно, длина перпендикуляра OD_2, опущенного из точки O на плоскость P_2 следующей сетки, больше $\sqrt{2}\, OC$ (и тем более для следующих за ней сеток), т. е. $\overline{OC}$ есть кратчайший не компланарный векторам **a**, **b** вектор решетки. Итак, условие диагоналей эквивалентно тому, что параллелепипед, для которого оно удовлетворяется, построен на трех последовательных минимумах решетки.

Рис. 10.

В случае, когда все три угла между последовательными минимумами **a**, **b** и **c** острые, условия приведения Зеебера в этом репере имеют вид:

$$0 \leqslant 2k \leqslant a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2,$$
$$0 \leqslant 2g \leqslant b^2,$$
$$0 \leqslant 2h \leqslant a^2.$$

Если же все три угла между последовательными минимумами **a**, **b** и **c** не острые, условия приведения Зеебера имеют вид

$$0 \leqslant -2k \leqslant a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2,$$
$$0 \leqslant -2g \leqslant b^2,$$
$$0 \leqslant -2h \leqslant a^2,$$
$$0 \leqslant a^2 + b^2 + 2k + 2h + 2g.$$

Если в случае, когда все три угла между последовательными минимумами **a**, **b** и **c** не острые, перейти к реперу **a**, —**b**, **c**, то вторая система

Зеебера перейдет в другую, которая вместе с первой системой Зеебера дает систему неравенств приведения Минковского, а именно:

$$0 \leqslant 2k \leqslant a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2,$$
$$0 \leqslant 2g \leqslant b^2,$$
$$-a^2 \leqslant 2h \leqslant a^2,$$
$$0 \leqslant a^2 + b^2 - 2k + 2h - 2g.$$

В следующем параграфе будет рассмотрено другое приведение трехмерных решеток, которое приобрело в последние годы большую популярность в кристаллографии.

§ 3. ПАРАМЕТРЫ ЗЕЛЛИНГА. СИМВОЛ ДЕЛОНЕ

Параметры Зеллинга более однородны, чем параметры Лагранжа—Гаусса [21]. Пусть $\mathbf{d}$ — такой вектор, что $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$, т. е. $\mathbf{d}$ — сумма векторов $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, взятая с обратным знаком. Мы будем называть совокупность четырех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ четырехсторонником Зеллинга.

Если квадраты длин векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ обозначить через a^2, b^2, c^2, d^2, а через g, h, k, l, m, n — их попарные скалярные произведения (см. рис. 11), то сумма чисел, стоящих в одной и той же строчке таблицы

	a	**b**	**c**	**d**
a	a^2	k	h	l
b	k	b^2	g	m
c	h	g	c^2	n
d	l	m	n	d^2,

равна нулю. Действительно, рассмотрим, например, скалярное произведение $\mathbf{a}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})=a^2+k+h+l$; оно равно нулю, так как вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$ равен нулю. Мы имеем, следовательно,

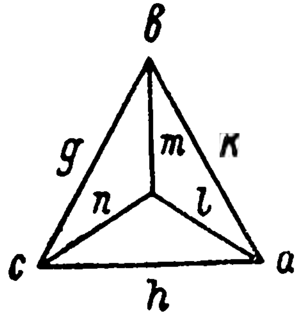
$$\begin{aligned} a^2 + k + h + l &= 0, \\ k + b^2 + g + m &= 0, \\ h + g + c^2 + n &= 0, \\ l + m + n + d^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Параметры Лагранжа и Гаусса a^2, b^2, c^2, g, h, k, определяющие основной репер $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, выражаются, таким образом, однозначно через параметры g, h, k, l, m, n Зеллинга и обратно. Сам Зеллинг назвал эти параметры «gleichartige Koeffirienten»; мы же будет называть их параметрами Зеллинга.

Преимущество параметров Зеллинга над параметрами Лагранжа—Гаусса заключается в том, что хотя эти последние и одной размерности

(чем они превосходят привычные кристаллографам параметры a, b, c, α, β, γ), однако, они геометрически неоднородны: a^2, b^2, c^2 — скалярные квадраты векторов, а g, h, k — скалярные произведения. Параметры же Зеллинга и геометрически вполне однородны.

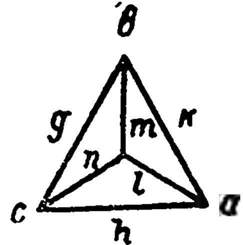
Для записи четырехсторонника $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ Зеллинг использует символ $\begin{pmatrix} g, & h, & k, \\ l, & m, & n \end{pmatrix}$, аналогичный символу Гаусса, и тем самым теряет это преимущество геометрической однородности своих параметров. Действительно, почему выделять g, h, k, а не вполне геометрически аналогичные g, m, n или h, l, n, или k, l, m.

Б. Н. Делоне [22] использует символ 

, который представляет собой как бы проекцию тетраэдра $ABCD$ (рис. 11), вершины которого соответствуют концам векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ четырехсторонника Зеллинга. На ребрах этого тетраэдра поставлены числа g, h, k, l, m, n, т. е. величины скалярных произведений соответственных пар сторон четырехсторонника. Если рассматривать этот символ как пространственный, как проволочную модель тетраэдра, не отдавая предпочтения никакой его проекции, то окажется не только выбор параметров, но и запись решеток совсем однородной. Этот символ в [23] назван символом Делоне.

Переход от других записей к символу Делоне и обратно. Если даны кристаллографические параметры a, b, c, α, β, γ, то прежде всего надо перейти к параметрам Лагранжа—Гаусс по формулам

$$g = bc\cos\alpha,\quad h = ca\cos\beta,\quad k = ab\cos\gamma,$$

и тогда можно получить l, m, n из того свойства символа 

, что сумма значений параметров трех ребер, сходящихся в одной вершине, и параметра самой вершины равна нулю. Итак,

$$l = -a^2 - h - k,\quad m = -b^2 - g - k,\quad n = -c^2 - g - h.$$

Пусть, наоборот, заданы параметры Зеллинга на символе Делоне. Пользуясь свойством (1), находим числа a^2, b^2, c^2 и получаем, таким

образом, запись Лагранжа—Гаусса $\begin{pmatrix} a^2, & b^2, & c^2 \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$. Кристаллографические параметры a, b, c, α, β, γ находим по формулам:

$$a=\sqrt{a^2},\quad b=\sqrt{b^2},\quad c=\sqrt{c^2},\quad \cos\alpha=\frac{g}{bc},\quad \cos\beta=\frac{h}{ca},\quad \cos\gamma=\frac{k}{ab}.$$

§ 4. ПРИВЕДЕННЫЙ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИК

Область Дирихле решетки в общем случае является четырнадцатигранником D_1 и имеет восемь шестиугольных граней. Рассмотрим четыре из этих граней (рис. 12), которые попарно не смежны друг с другом, и обозначим через A, B, C, D центры тех D_1, которые смежны с данным D_1 по этим граням. Векторы OA, OB, OC, OD образуют основной четырехсторонник Зеллинга, рассматриваемой решетки. Четырехсторонник, связанный таким образом с областью Дирихле решетки, будем называть приведенным четырехсторонником этой решетки. Из самого определения очевидно, что если не считать симметричного этому четырехсторонника, связанного с другой четверкой шести угольных граней, то в решетке имеется один и только один такой приведенный четырехсторонник.

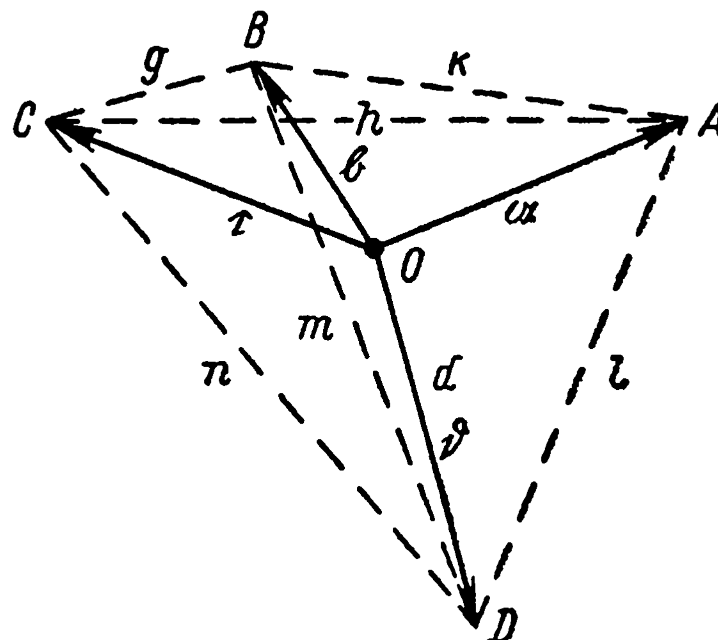


Рис. 11.

Всякая «не примитивная» решетка, т. е. если ее D есть D_2, D_3, D_4 или D_5, может рассматриваться как предельный случай примитивной. При этом приведенными будем считать такие четырехсторонники, в которые превращаются приведенные четырехсторонники тех примитивных решеток, которые получаются бесконечно малой вариацией данной непримитивной решетки.

Теорема 1. Все параметры g, h, k, l, m, n приведенного четырехсторонника отрицательные или нули.

Действительно, какой, например, смысл имеет параметр l? Предположим сначала, что решетка примитивная. Угол φ между OA и OD (рис. 12 и 13) тупой, так как проекция зоны с ребром δ на плоскость, перпендикулярную к этому ребру, представляет собой шестиугольник, вписанный в круг. Угол HKL острый, так как он опирается на диаметр HL, а вершина его лежит вне окружности. Но угол φ дополняет этот угол до двух прямых, так как OA и OD перпендикулярны к HK и LK. Следовательно, для примитивного D $l=OA\cdot OD\cos\varphi<0$.

Теперь рассмотрим решетки с D_2, D_3, D_4 или D_5 и прежде всего равномерное сжатие и растяжение решетки вдоль ребра одной из зон D_1.

До тех пор пока это ребро не станет равным нулю, рассматриваемая зона остается замкнутой и все слоевое построение, исходящее от этой зоны, сохраняет свою силу. Проекция этой зоны на плоскость, перпендикулярную к ребру этой зоны, очевидно, не меняется при таком преобразовании решетки, так как плоская сетка решетки, лежащая в рассматриваемой плоскости, вовсе не изменяется. Проекция граней «шапочки» тоже не меняется, так как слой I при таком преобразовании не претерпевает никакого бокового смещения относительно слоя 0. Значит, D изменяется только метрически, но не комбинаторно, и его грани остаются связанными с теми же точками решетки в том смысле, что при таком преобра-

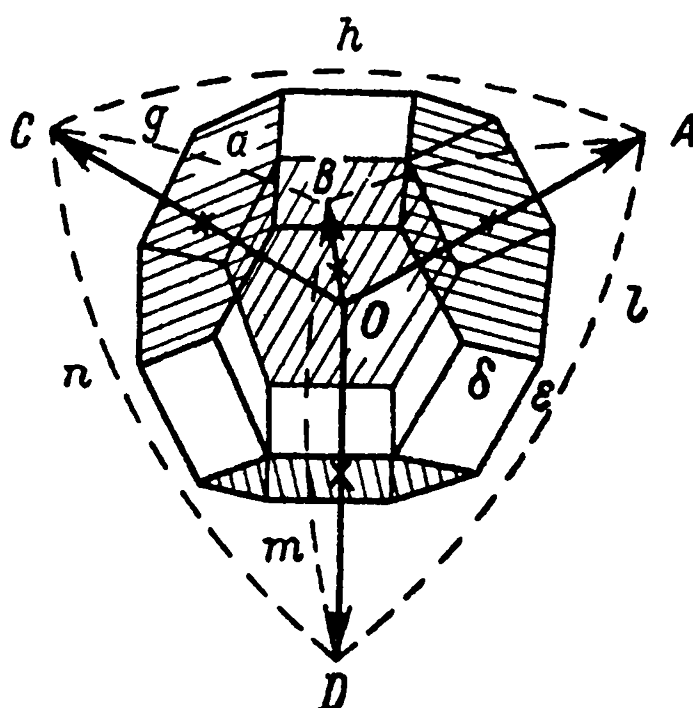


Рис. 12.

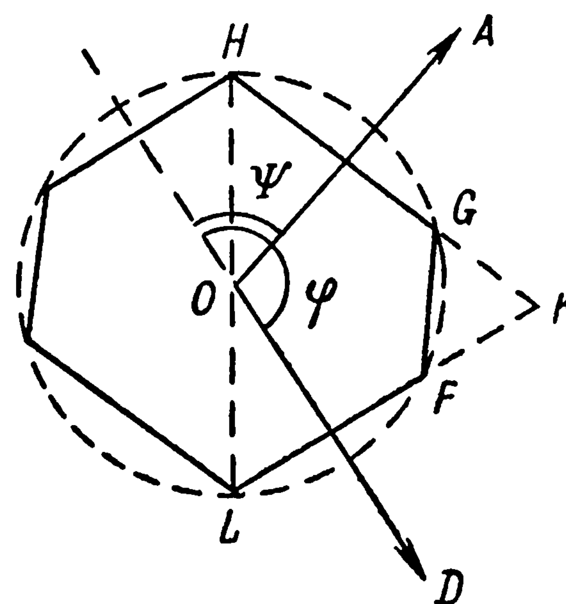


Рис. 13.

зовании образы тех же самых точек решетки остаются центрами тех D, которые смежны с данным D по данным граням. Такое растяжение или сжатие решетки, параллельное ребру одной из зон D, при котором ребра эти не превращаются в нуль, будем называть в а р и а ц и е й з о н ы. Посмотрим, что происходит при такой вариации с параметрами g, h, k, l, m, n.

Пусть, например, произведена вариация зоны с ребром ε (рис. 12), т. е. растяжение или сжатие решетки перпендикулярно к плоскости OBC. Параметр g при этом, очевидно, не изменяется, так как ни сами векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, ни угол между ними при этом не изменяются. Параметры h, k, m, n, т. е. скалярные произведения векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OD}$ с векторами $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, также на изменяются, поскольку при таком преобразовании проекции векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OD}$ на векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ не меняются, так как точки A и D передвигаются перпендикулярно плоскости OBC. Стало быть, при вариации зоны с ребром ε будет изменяться только параметр l. Наоборот, если изменять только параметр l, то будет получаться описанная вариация зоны с ребром ε, поскольку в таком случае, как это сле-

дует из формул, длины векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, угол между ними, а также проекции векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OD}$ на $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ остаются постоянными.

При каком значении l ребро ε превратится в нуль? Чтобы это решить, рассмотрим зону с ребром δ, которая пересекается с рассматриваемой зоной с ребром ε. Когда ε становится нулем, ребро δ грани $\varepsilon\,\delta$ сливается с ему противоположным ребром той же грани и проекция зоны с ребром δ из шестиугольника превращается в прямоугольник (рис. 13); угол AOD становится тогда прямым и, следовательно, l равно нулю. Превращение в нуль ребра зоны соответствует при вариации этой зоны превращению в нуль параметра, соответствующего этой зоне, и обратно. Каждую из непримитивных областей D можно получить из D_1 превращением в нуль

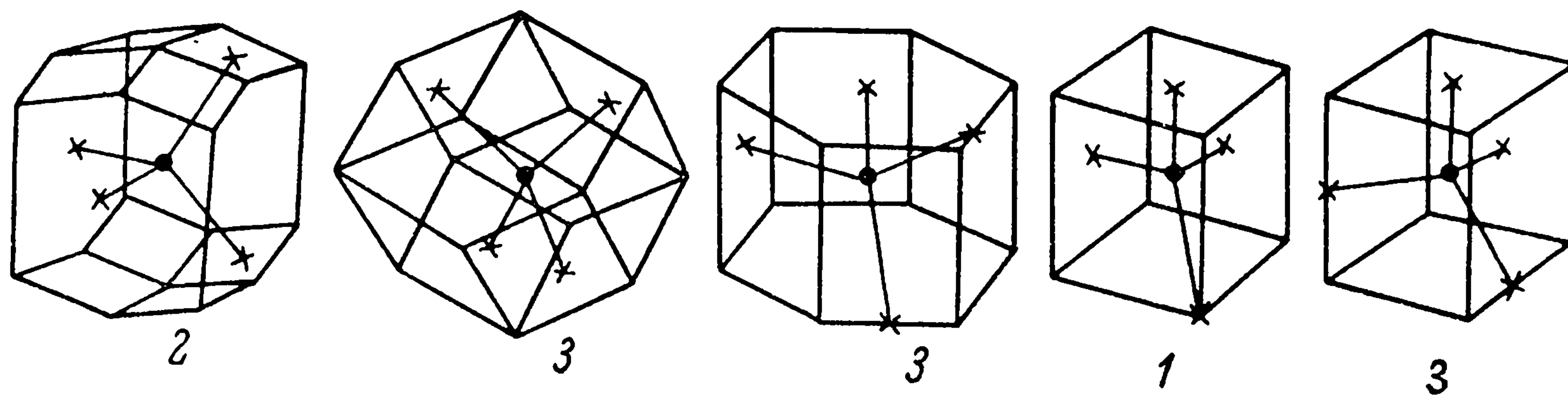
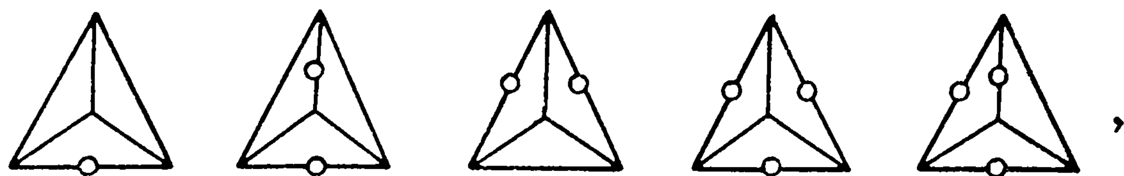


Рис. 14.

одной или нескольких зон. Таким образом, для решеток с областями Дирихле D_2, D_3, D_4, D_5 некоторые параметры должны быть равны нулю. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь, какое положение может иметь приведенный четырехсторонник по отношению к области Дирихле в непримитивной решетке. Для этого достаточно взять некоторый D_1 и всеми способами так варьировать его зоны, чтобы ребра этих зон становились равными нулю.

Так получаются символы ,

у которых мы отметили только те параметры, которые равны нулю, и соответственно области Дирихле (рис. 14).

Четырехсторонник, который проходит у D_1 через центры четырех шестиугольных граней, будет иметь у соответственных D то положение, которое указано на рисунке. Для D_2 могут быть две различные пары друг другу симметричных по отношению к точке O четырехсторонников, которые соответствуют двум различным по отношению к «шапочке» парам смежных шестиугольных граней. Для D_3 могут быть три различные пары друг другу симметричных по отношению к точке O четырехсторонников, соответствующих трем различным парам противоположных четверных вершин D_3. Для D_4 также могут быть три различных четырехсторонника, соответ-

ствующих различным сторонам основания. Хотя все эти четырехсторонники могут быть метрически различны, топологически они одинаково связаны с соответственными D, отсюда и получаются одинаковые символы. Для D_5 получаются два топологически различно связанных с D_5 приведенных четырехсторонника (рис. 14), причем в первом случае имеются четыре пары друг другу симметричных относительно точки O таких четырехсторонников, которые все, однако, метрически одинаковы, а во втором — двенадцать пар таких четырехсторонников, из которых четыре первые могут отличаться от четырех других и четырех третьих.

Теорема 2. Шесть любых неположительных чисел g, h, k, l, m, n, из которых либо ни одно не равно нулю, либо одно, два или три равны нулю и так расставлены на символе, как указано выше, являются приведенными параметрами некоторой решетки.

Доказательство. Комбинация куба с правильным октаэдром, при которой куб отрезает треть ребер октаэдра, представляет собой многогранник, ограниченный восемью правильными шестиугольниками и шестью квадратами; как легко видеть, это — область Дирихле кубической объемноцентрированной решетки. Приведенный символ этой решетки имеет вид $g_0=h_0=k_0=l_0=m_0=n_0$, так как все ребра и все углы приведенного четырехсторонника одинаковы. Произведем сначала вариацию первой зоны, после которой первый параметр будет равным g, затем такую вариацию второй зоны, после которой второй параметр станет равным h, и так далее. Так получим некоторый D, приведенный четырехсторонник которого будет иметь как раз рассматриваемые значения g, h, k, l, m, n параметров.

Следствие. Отсюда следует, что если у основного четырехсторонника некоторой решетки все шесть параметров равны или меньше нуля, то это приведенный четырехсторонник этой решетки.

§ 5. АЛГОРИФМ ПРИВЕДЕНИЯ ЗЕЛЛИНГА НА СИМВОЛЕ ДЕЛОНЕ

Если решетка задана таким четырехсторонником, для которого одно или несколько из чисел g, h, k, l, m, n положительны, т. е. четырехсторонник не приведенный, то можно перейти от этого четырехсторонника $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ к другому, у которого сумма $\Sigma=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2$ меньше, чем у заданного. Действительно, пусть, например, $g>0$, т. е. угол между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ острый. Заменим тогда четырехсторонник $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ таким: вектор $\mathbf{c}$ сохраним, а вектор $\mathbf{b}$ заменим обратным $-\mathbf{b}$, тогда уже угол между $\mathbf{c}$ и $-\mathbf{b}$ будет тупым, так как он смежный с углом между $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$. Для того чтобы не нарушилось основное соотношение, которому должен удовлетворять всякий четырехсторонник Зеллинга — сумма его четырех векторов равна нулю, — прибавим по вектору $\mathbf{b}$ к двум другим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$, не входящим в пару $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, острым углом между которыми мы были обеспокоены. Другими словами, заменим четырехсторонник $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ четырехсторонником $\mathbf{a}+\mathbf{b}$,

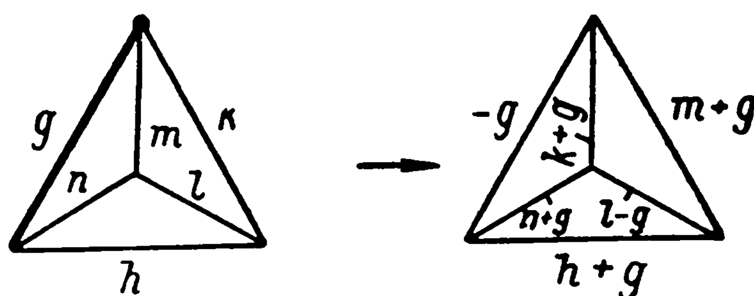
$-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}+\mathbf{b}$. Получается новый, опять основной четырехсторонник Зеллинга нашей решетки. Мы имеем

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(-\mathbf{b})^2+\mathbf{c}^2+(\mathbf{d}+\mathbf{b})^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2\mathbf{b}\cdot(-\mathbf{c})=a^2+b^2+c^2+d^2-2g,$$

т. е. сумма Σ нового четырехсторонника на $2g$ меньше (g было предположено положительным), чем сумма Σ исходного. Если новый четырехсторонник опять имеет положительный параметр, мы повторяем аналогичное преобразование и так далее. После ограниченного числа таких преобразований всегда должен получиться четырехсторонник, все параметры которого отрицательны или равны нулю, так как все четверки точек A, B, C, D, для которых $a^2+b^2+c^2+d^2<\Sigma$, лежат внутри шара с центром в точке O, радиус которого равен $\sqrt{\Sigma}$, и, следовательно, в решетке Λ есть только ограниченное число различных таких четверок. Но все четверки, получаемые при указанных последовательных преобразованиях, различны, так как соответствующие им суммы Σ все уменьшаются. Если мы все это выразим при помощи символа Делоне, то получится следующее правило.

Выбирают любой положительный параметр символа и вычитают его из параметра, стоящего на противоположном ребре символа (символ все время мыслится пространственно), прибавляют его к параметрам, стоящим на остальных четырех ребрах, меняют между собой местами полученные параметры на двух из этих четырех ребер, сходящихся в одном из концов исходного ребра (все равно в каком), и, наконец, меняют знак самого рассматриваемого положительного параметра.

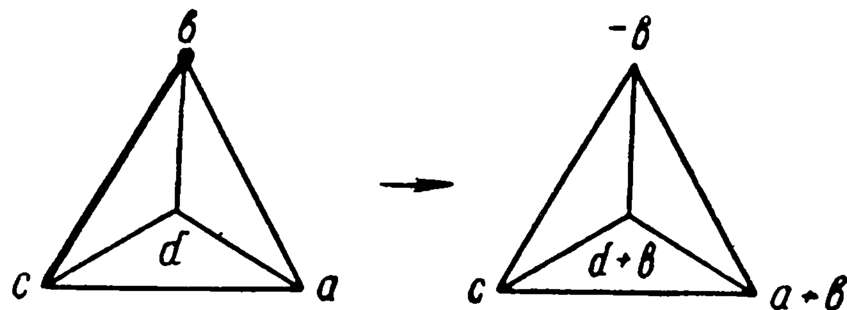
Это один шаг алгорифма приведения. В записи символами он имеет следующий вид: если, например, $g>0$



На преобразуемом символе ребро, соответствующее рассматриваемому положительному параметру, следует подчеркнуть жирно и отметить жирной точкой один из его концов, в котором мы хотим менять параметры местами. Такое преобразование надо повторять до тех пор, пока не получится символ, не имеющий положительных параметров. Этот символ будет приведенным.

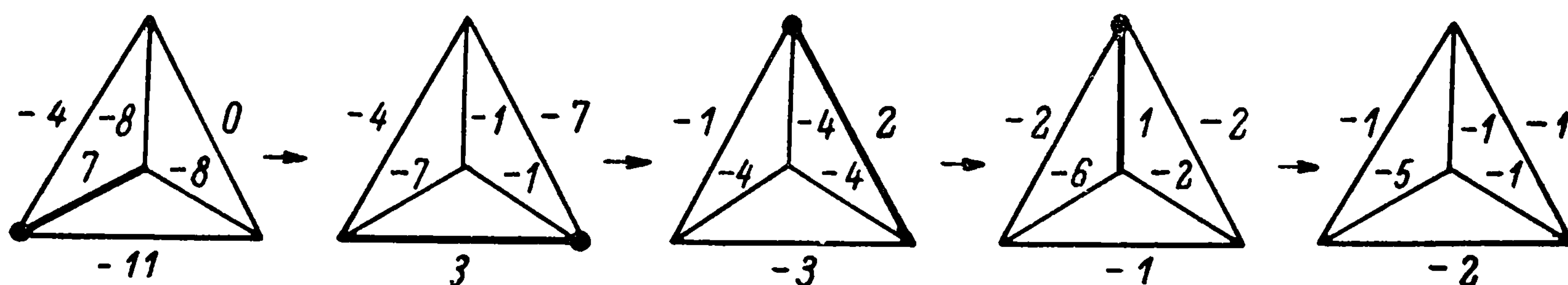
Что же касается самих векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, то для них соответственное преобразование такое: вектор, стоящий у вершины, отмеченной жирной точкой, прибавляют к векторам, стоящим у вершин, не принадлежащих ребру, изображенному жирной линией, и самого его заменяют обратным.

В символах это действие имеет такой вид:



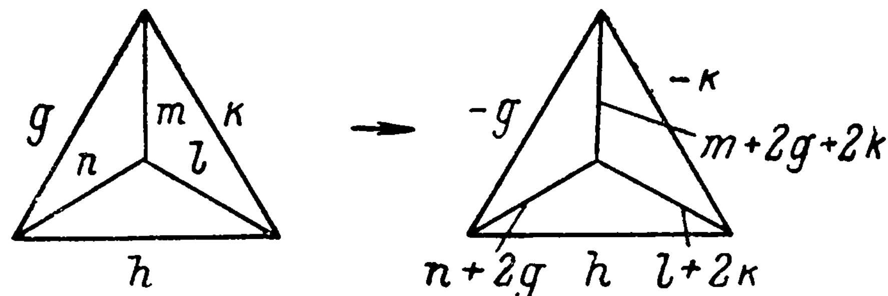
Надо сначала произвести приведение параметров, а затем уже, если это нужно, сделать приведение векторов.

Пример:



Последний символ уже приведенный.

В некоторых случаях (как уже делается в [24]), когда на двух соседних ребрах символа стоят положительные параметры, например $g > 0$ и $k > 0$, удобнее заменить репер Зеллинга $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ на репер Зеллинга $\{\mathbf{a}, -\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}+2\mathbf{b}\}$, и в таком случае шаг приведения на тетраэдрическом символе будет выглядеть так:



Мы видим, что вычисление абсолютно машинальное и занимает очень мало времени.

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРИВЕДЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕЛЛИНГА

Теорема 3. Абсолютная величина приведенного параметра равна произведению длины ребра зоны, соответствующей этому параметру, на толщину соответствующего ему слоя.

Замечание. Вороной называет абсолютные величины приведенных параметров регуляторами решетки, так как они регулируют развитие отдельных зон. Поэтому эта теорема может быть сформулирована так: регулятор зоны равен длине ребра зоны, помноженной на толщину соответствующего ему слоя.

Доказательство. Рассмотрим ребро α той зоны, которой принадлежит ребро δ (рис. 12). Пусть по отношению к реперу $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ координаты его концов $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ и $(\bar{\bar{\xi}}, \bar{\bar{\eta}}, \bar{\bar{\zeta}})$. В первой из этих точек сходятся те D, центры которых имеют координаты $(0, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(1, 1, 1)$, т. е. она равно удалена от этих четырех точек. Вторая точка равно удалена от точек: $(0, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(0, 0, 1)$; $(1, 1, 1)$. Если f — тройничная квадратичная форма, соответствующая реперу $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, то квадрат расстояния d между двумя точками, координаты которых по отношению к $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})$, равен

$$d^2 = f(\bar{\bar{x}} - \bar{x},\ \bar{\bar{y}} - \bar{y},\ \bar{\bar{z}} - \bar{z}),$$

что можно записать и так:

$$d^2 = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - \bar{\bar{x}}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - \bar{\bar{y}}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \bar{\bar{z}}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}).$$

Если точка $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ равно удалена от указанных четырех точек, то получим

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = a^2 + 2h + 2k, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\eta}} = b^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = c^2 + 2g. \tag{1}$$

А если записать то же самое для точек $(\bar{\bar{\xi}}, \bar{\bar{\eta}}, \bar{\bar{\zeta}})$, то получим

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\xi}}} = a^2 + 2h + 2k, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\eta}}} = b^2 + 2g, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\zeta}}} = c^2. \tag{2}$$

Но мы имеем $\alpha^2 = f(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}},\ \bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}},\ \bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}})$, или по формуле Эйлера

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left[(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}})\frac{\partial f}{\partial(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}})} + (\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}})\frac{\partial f}{\partial(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}})} + (\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}})\frac{\partial f}{\partial(\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}})}\right],$$

или

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left[(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}})\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\xi}}}\right) + (\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}})\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\eta}}}\right) + (\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}})\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\zeta}}}\right)\right].$$

Если подставить сюда производные из (1) и (2), то после сокращений получим

$$\alpha^2 = g(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}} + \bar{\bar{\zeta}} - \bar{\zeta}). \tag{3}$$

Если же вычесть из уравнений (1) уравнения (2), то получается система

$$\begin{aligned} a^2(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}}) + k(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}) + h(\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}}) &= 0, \\ k(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}}) + b^2(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}) + g(\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}}) &= g, \\ h(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}}) + g(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}) + c^2(\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}}) &= -g. \end{aligned}$$

Если отсюда определить $\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}$ и $\bar{\zeta} - \bar{\bar{\zeta}}$ и вставить в (3), то получим

$$\alpha^2 = g^2 \frac{\begin{vmatrix} a^2 & l \\ l & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & k & h \\ k & b^2 & g \\ h & g & c^2 \end{vmatrix}}.$$

Абсолютная величина определителя, стоящего в знаменателе, как это легко видно из свойств скалярных произведений, равна квадрату объема параллелепипеда, построенного на {**a**, **b**, **c**}, который равновелик параллелепипеду, построенному на {**a**, **b**, **d**}, а определитель, стоящий в числителе, по абсолютной величине равен квадрату площади параллелограмма, построенного на **a** и **d**.

Абсолютная величина отношения этих двух определителей равна, следовательно, квадрату высоты h параллелепипеда {**a**, **b**, **d**} по отношению к его основанию {**a**, **d**}, т. е. квадрату «толщины» слоя решетки Λ, соответствующего ребру α области D (расстоянию между плоскостью сетки OAD и плоскостью ближайшей ей параллельной сетки Λ). Таким образом, $|g| = \alpha h$.

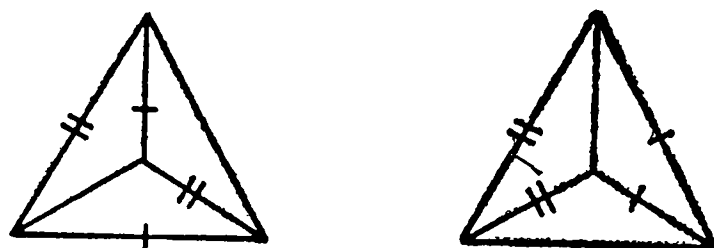
Из этой теоремы следует, что совокупность значений приведенных параметров Зеллинга для данной решетки одна и та же, т. е. не зависит от последовательности шагов приведения. Приведенные параметры Зеллинга являются геометрическими константами решетки.

§ 7. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОРТА РЕШЕТКИ

Если зона граней параллелоэдра метрически задана, то и сам параллелоэдр вполне задан. Поэтому и регуляторы, т. е. абсолютные величины приведенных параметров, тоже заданы.

Если какой-нибудь поворот голоэдрии области Дирихле совмещает какую-либо зону с другой ее зоной, то соответствующие им приведенные параметры должны быть одинаковы.

Рассмотрим связку осей 2-го порядка данного параллелоэдра D. В случае 14-гранника всякая ось 2-го порядка пересекает параллелоэдр D_1 либо в центре четырехугольных граней, либо в серединах ребер, по которым смежны две шестиугольные грани. Как легко видеть, в первом случае на символе появится равенство регуляторов для двух пар противоположных ребер, а во втором случае — равенство регуляторов для двух ребер, исходящих из одной вершины и двух им противоположных ребер



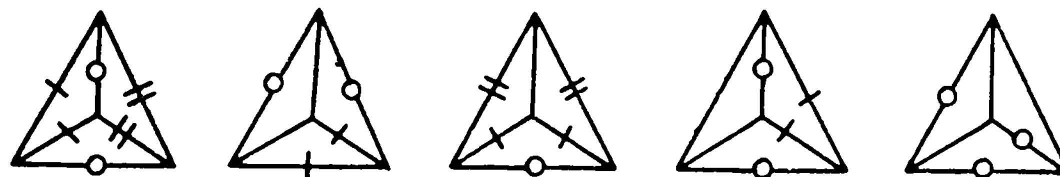
Написав равенства для всех осей 2-го порядка, получим равенства, указанные в табл. 2. Но вычислением можно показать и обратное, что если имеется пара равенств 1-го вида, то имеется ось 2-го порядка, проходящая через центры четырехугольных граней, а если имеется пара равенств 2-го вида, то имеется ось 2-го порядка, проходящая через середины ребер, по которым смежны две шестиугольные грани.

Таким образом, в табл. 2 равенства являются не только необходимыми, но и достаточными для определения принадлежности области Дирихле D_1 к тому или иному из 8 ее сортов. Аналогичное имеет место для D_2, D_3, D_4, D_5. Иными словами, равенства и нули, указанные на символе в табл. 2, необходимы и достаточны для определения сорта решетки.

Эти условия могут быть выведены лишь из одной теории приведения Зеллинга. Действительно, любой поворот из голоэдрии решетки поворачивает приведенный ее четырехсторонник Зеллинга либо в себя, либо в метрически равный ему другой приведенный четырехсторонник этой решетки с началом в точке O. Наличие нулей на ребрах тетраэдрического символа ведет к существованию в решетке различных приведенных четырехсторонников, получающихся друг из друга приведением через 0. А дополнительное наличие некоторых равенств на ребрах тетраэдрического символа ведет либо к равенству таких четырехсторонников, либо к повышению симметрии у самого четырехсторонника.

Если на символе нет ни одного нуля, то имеется всего один приведенный четырехсторонник и ему центрально-симметричный, и оба они метрически одинаковы. Если на символе лишь один нуль, то имеется два различных, получающихся друг из друга приведением через 0, приведенных четырехсторонника и еще два им центрально-симметричных. Эти два четырехсторонника, вообще говоря, метрически различны, а при выполнении некоторых равенств на ребрах тетраэдрического символа они становятся метрически одинаковыми. Если на приведенном символе имеется два нуля на противоположных его ребрах, то существует три различных приведенных четырехсторонника и еще три им центрально-симметричных. Эти три четырехсторонника метрически различны, но в некоторых случаях два из них или даже все три могут быть метрически одинаковы. Если символ имеет два нуля на соседних ребрах, то имеется шесть разных приведенных четырехсторонников и еще шесть им центрально-симметричных, распадающихся на три пары, в каждой из которых четырехсторонники метрически одинаковы. Но в частных случаях в двух из пар или даже во всех трех парах четырехсторонники могут быть метрически одинаковы. При наличии трех нулей на ребрах тетраэдрического символа в решетке имеется 32 приведенных четырехсторонника и еще 32 им центрально-симметричных, из которых 4 отвечают случаям, когда нули стоят на ребрах одного треугольника. Последние четыре четырехсторонника метрически одинаковы и, кроме центрально-симметричных, в решетке нет других метрически равных им четырехсторонников.

Других расстановок нулей на ребрах тетраэдрического символа быть не может. Учитывая всевозможные симметрии и равенства приведенных четырехсторонников, на ребрах тетраэдрического символа, кроме табличных расстановок равенств и нулей, получим еще следующие:



Если для них сделать еще один шаг приведения через 0, то получим табличные символы.

Итак, для определения сорта решеток надо сначала установить, сколько нулей оказалось в окончательно приведенном символе, и в случае двух нулей выяснить, как они расположены — на соседних или противоположных ребрах. Это уже определяет колонку в таблице. Затем следует рассмотреть равенства, полученные на нашем приведенном символе, и выявить, какой наибольший из комплексов равенств, выписанных в таблице, в них содержится. Этот наибольший комплекс равенств и определяет сорт.

§ 8. НАХОЖДЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ ВЕКТОРОВ РЕПЕРА БРАВЕ ЧЕРЕЗ ВЕКТОРЫ ИСХОДНОГО ОСНОВНОГО РЕПЕРА

По приведенному символу, пользуясь табл. 2, можно определить не только сорт решетки, но и ее тип Браве. Табл. 3 дает возможность найти выражения векторов репера Браве через векторы исходного основного репера решетки, а также вычислить кристаллографические константы, т. е. длины векторов репера Браве и углы между ними [25].

В случае первых пяти моноклинных сортов, как видно из таблицы, «поворачиванием» тетраэдрического символа можно добиться выполнения выписанных в таблице рядом с символом в скобках неравенств (одного или двух). В M_6 для выполнения выписанных неравенств придется иногда сделать еще один шаг приведения через нулевое ребро

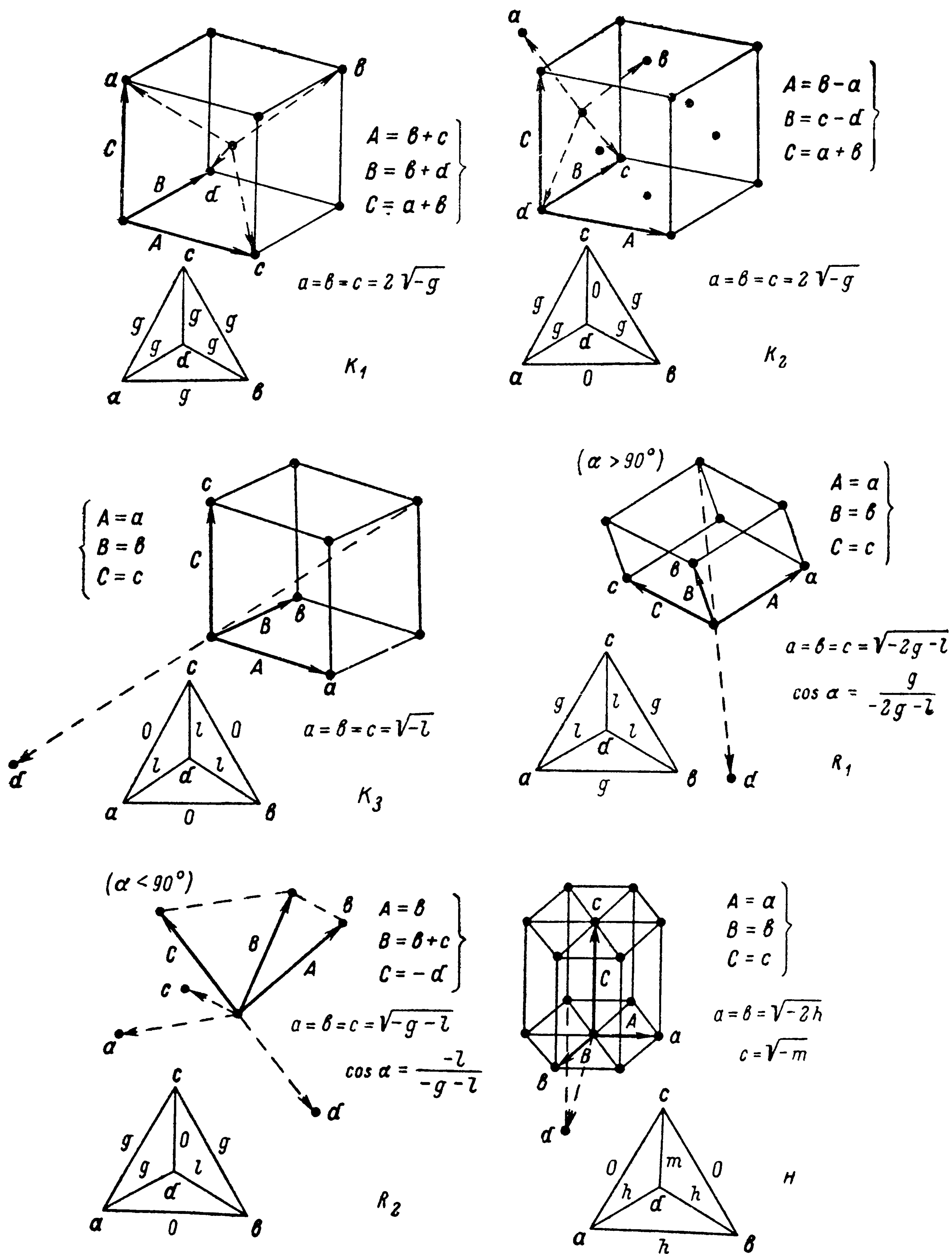


Так обработанный символ будем называть подготовленным и впредь мы будем использовать только подготовленные символы.

В случаях O_2, O_3, O_4 через δ обозначена длина наименьшей диагонали граней, через d — длина наибольшего ребра, A, B, C — векторы репера Браве, a, b, c — их длины, β — угол моноклинного параллелепипеда.

Однозначный выбор бокоцентрированного моноклинного параллелепипеда Браве делается так: боковое ребро B во всех моноклинных сортах, по существу, задано однозначно; за ребро A основания (одновременно сторона центрированной боковой грани) выбирают наименьшее возмож-

Таблица 3



A = в + c
B = в + d
C = a + в
a = в = c = 2 √-g
K1
A = в - a
B = c - d
C = a + в
a = в = c = 2 √-g
K2
A = a
B = в
C = c
a = в = c = √-l
K3
(α > 90°)
A = a
B = в
C = c
a = в = c = √-2g - l
cos α = g / (-2g - l)
R1
(α < 90°)
A = в
B = в + c
C = - d
a = в = c = √-g - l
cos α = -l / (-g - l)
R2
A = a
B = в
C = c
a = в = √-2h
c = √-m
H

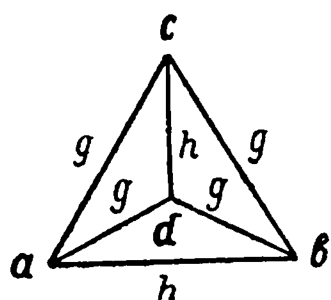
Таблица 3 (*продолжение*)

$(c < a\sqrt{2})$

$$\left.\begin{aligned} A &= b + c \\ B &= b + d \\ C &= a + b \end{aligned}\right\}$$

$a = b = \sqrt{-2g - 2h}$

$c = 2\sqrt{-g}$



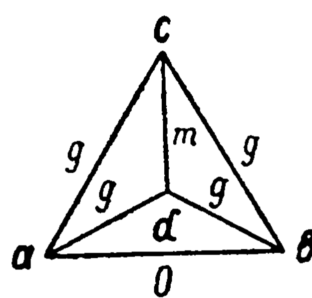
Q_1

$(c > a\sqrt{2})$

$$\left.\begin{aligned} A &= a \\ B &= b \\ C &= c - d \end{aligned}\right\}$$

$a = b = \sqrt{-2g}$

$c = 2\sqrt{-g - m}$



Q_2

$$\left\{\begin{aligned} A &= a \\ B &= b \\ C &= c \end{aligned}\right.$$

$a = b = \sqrt{l}$

$c = \sqrt{-m}$

Q_3

$$\left.\begin{aligned} A &= a - b \\ B &= c - d \\ C &= a + b \end{aligned}\right\}$$

$a = 2\sqrt{-g - h}$

$b = 2\sqrt{-g - m}$

$c = 2\sqrt{-g}$

O_1

$(\delta > d)$

$$\left.\begin{aligned} A &= b + c \\ B &= b + d \\ C &= a + b \end{aligned}\right\}$$

$a = \sqrt{-2g - 2h}$

$b = \sqrt{-2h - 2k}$

$c = \sqrt{-2k - 2g}$

O_2

$(\delta < d)$

$$\left.\begin{aligned} A &= a \\ B &= b \\ C &= c - d \end{aligned}\right\}$$

$a = \sqrt{-2g}$

$b = \sqrt{-2k}$

$c = \sqrt{-2g - 2k - 4m}$

O_3

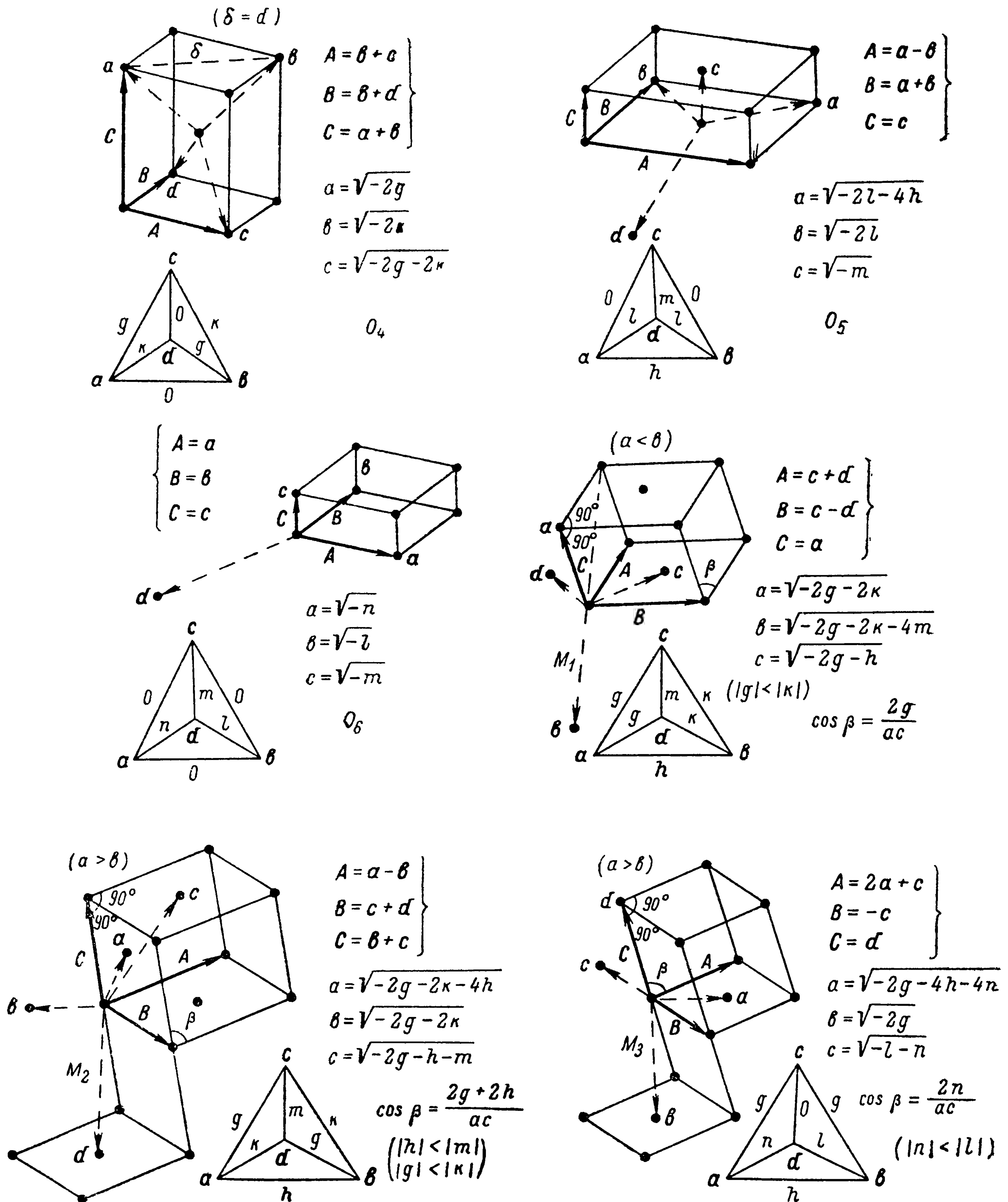
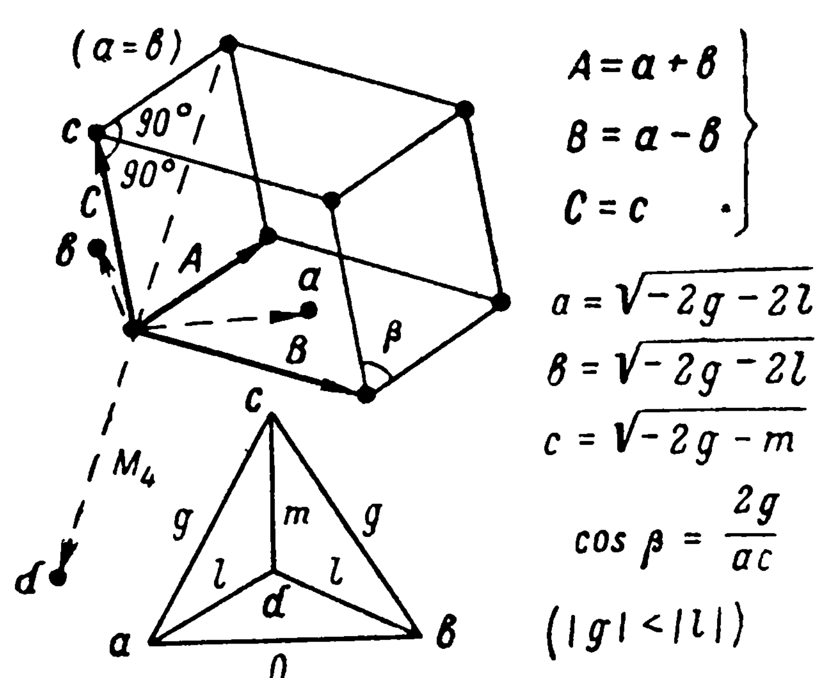
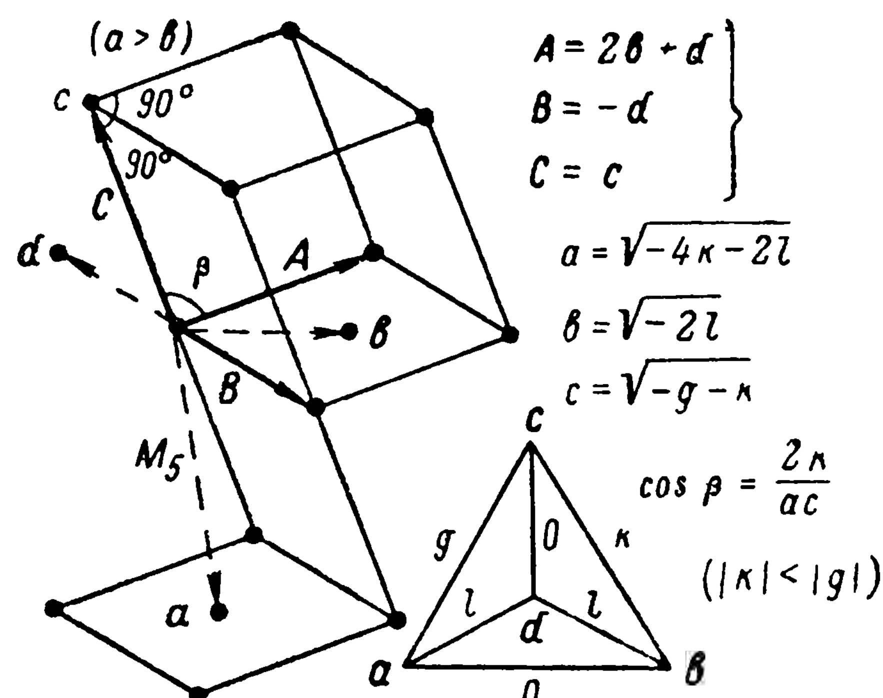
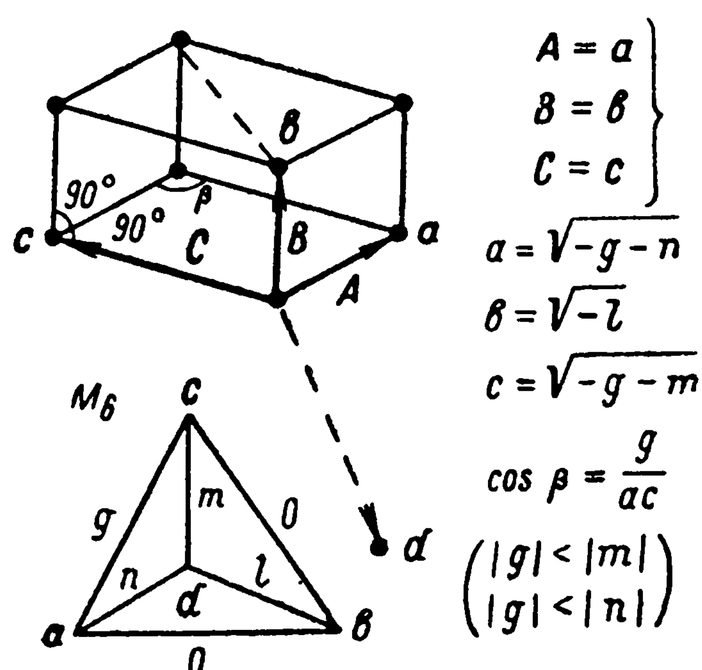
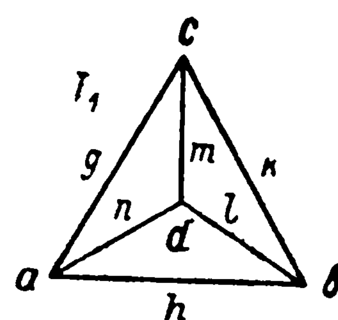

(δ = d)
A = в + c
B = в + d
C = a + в
a = √-2g
в = √-2к
c = √-2g - 2к
O₄
A = a - в
B = a + в
C = c
a = √-2l - 4h
в = √-2l
c = √-m
O₅
A = a
B = в
C = c
a = √-n
в = √-l
c = √-m
O₆
(a < в)
A = c + d
B = c - d
C = a
a = √-2g - 2к
в = √-2g - 2к - 4m
c = √-2g - h
(|g| < |к|)
cos β = 2g/ac
M₁
(a > в)
A = a - в
B = c + d
C = в + c
a = √-2g - 2к - 4h
в = √-2g - 2к
c = √-2g - h - m
cos β = (2g + 2h)/ac
(|h| < |m|)
(|g| < |к|)
M₂
(a > в)
A = 2a + c
B = -c
C = d
a = √-2g - 4h - 4n
в = √-2g
c = √-l - n
cos β = 2n/ac
(|n| < |l|)
M₃

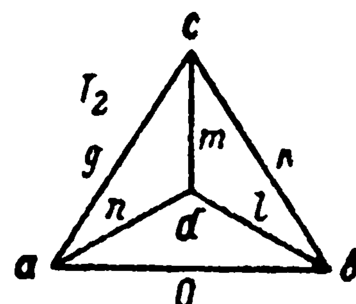
Таблица 3 (*продолжение*)

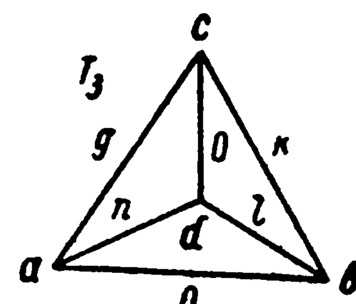












ное ребро, при котором получается центрированная боковая грань. Вообще говоря, оно может и не быть минимальным в сетке, которой принадлежит основание прямого параллелепипеда; за ребро C основания выбирают наименьшее ребро, идущее к первому параллельному с B ряду сетки основания из образующих с B тупой угол.

В случае простого моноклинного параллелепипеда Браве, т. е. в M_6, за ребра A и C основания выбирают два последовательных минимума сетки, образующих тупой угол.

Удается показать, что если пользоваться подготовленным приведенным символом, то во всех 6 моноклинных случаях формулы таблицы дают именно векторы однозначно выбранного параллелепипеда Браве.

Для триклинных случаев за основной репер решетки принимаем репер, составленный тремя его последовательными минимумами.

§ 9. ПРИВЕДЕНИЕ К РЕПЕРУ, ПОСТРОЕННОМУ НА ТРЕХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МИНИМУМАХ РЕШЕТКИ

Теорема 4. Три последовательных минимума решетки Λ принадлежат к числу тех, которые идут из точки O через центры граней области Дирихле точки O.

Доказательство. Середина α вектора OA не может быть достигнута никакой другой плоскостью Вороного точки O, т. е. никакая другая плоскость не только не может отрезать точку α от точки O, но не может даже пройти через точку α, так как никакая точка Λ не лежит ближе к точке O, чем точка A. Конец B вектора OB лежит внутри или на границе слоя, образованного плоскостями Вороного, соответствующими точке A и точке, симметричной с A по отношению к точке O, так как иначе B была бы не ближайшая к O точка Λ из точек, не лежащих на прямой OA. Такой точкой была бы такая точка параллельного OA ряда, проходящего через точку B, которая принадлежит этому слою. Середина β вектора OB лежит, следовательно, внутри этого слоя и не может быть достигнута плоскостями Вороного точки O, соответствующими точкам ряда OA. Но она не может быть достигнута и другими плоскостями Вороного точки O, так как все другие точки Λ лежат к точке O не ближе, чем точка B. Конец C вектора OC лежит внутри или на границе прямой призмы, основанием которой является плоская область Дирихле точки O в плоской сетке OAB, так как иначе C не была бы одной из ближайших к O точек Λ. Из точек, не лежащих в плоскости OAB, такой точкой в этом случае была бы та точка сетки, параллельной сетке OAB, проходящей через точку C, которая принадлежала бы этой призме. Середина γ вектора OC лежит, следовательно, внутри этой призмы и не может быть достигнута ни одной плоскостью Вороного точки O, соответствующей точкам сетки OAB. Но она не может быть достигнута и другими плоскостями Вороного точки O, так как все другие точки Λ лежат к точке O не ближе, чем точка C. Мы видим, таким образом, что середины α, β, γ векторов OA, OB, OC являются центрами граней областей Дирихле точки O.

Теорема 5. Репер, построенный на трех последовательных минимумах решетки Λ, представляет собой (если соответственно выбрать положительные направления этих векторов) или один из четырех реперов приведенного четырехсторонника, или репер, векторы которого проходят через центры трех граней области Дирихле D, сходящихся в одной вершине.

Пусть D — область Дирихле типа I. В таком случае можно из семи векторов, проходящих через середины граней D, образовать 4 рода реперов, векторы которых проходят: 1) через центры трех несмежных шестиугольных граней (тогда это один из реперов приведенного четырехсторонника); 2) через центры трех граней D, сходящихся в одной вершине; 3) через центр шестиугольной грани и через центры двух прилегающих к ней четырехугольных; 4) через четырехугольные грани. Как это видно

из рассмотрения смежностей D, случаи 1, 2 и 3 дают основные реперы и только в случае 4 получается не основной репер, векторы которого, следовательно, по теореме 1 гл. 1, не могут быть тремя последовательными минимумами решетки.

Покажем, что и в случае 3) рассматриваемые векторы не могут быть последовательными минимумами. Пусть **a**, **b**, **c** — векторы, которые проходят соответственно через центр 6-угольной грани и через центр двух прилегающих к ней 4-угольных граней. Вектор **b**+**c**—**a** проходит через центр шестиугольной грани, смежной с тремя предыдущими. Углы между векторами **a** и **b**, **a** и **c**, **a** и **b**+**c**—**a** острые, что следует из смежности соответствующих граней 14-гранника D_1. Предположим, что **a**, **b** и **c** (взятые в каком-либо порядке) являются последовательными минимумами решетки. В таком случае $2k \leqslant a^2$, $2h \leqslant a^2$ и, следовательно, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})=\left(k-\frac{1}{2}a^2\right)+\left(h-\frac{1}{2}a^2\right)\leqslant 0$. Это противоречит тому, что угол между **a** и **b**+**c**—**a** острый. Таким образом, рассматриваемые векторы **a**, **b** и **c** не могут быть последовательными минимумами.

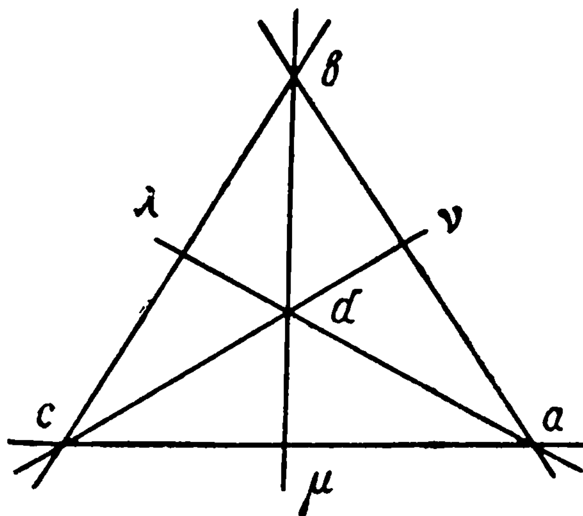


Рис. 15.

Для нахождения репера, построенного на трех последовательных минимумах, достаточно найти три наименьших из чисел a, b, c, d, λ, μ, ν (где числа λ, μ, ν находятся по формулам: $\lambda^2=b^2+2g+c^2$, $\mu^2=a^2+2h+c^2$, $\nu^2=a^2+2k+b^2$), причем эти числа следует выбирать так, чтобы соответствующие им векторы не были компланарны. Для этого можно пользоваться схемой рис. 15; векторы не будут компланарны, если соответствующие им буквы на схеме не лежат на одной прямой.

Пример. Рассмотрим решетку со следующими приведенными параметрами Зеллинга: $g=-7$, $h=-8$, $k=-15$, $l=-2$, $m=-3$, $n=-5$. Квадраты длин 7 векторов, среди которых находятся последовательные минимумы, следующие: $a^2=25$, $b^2=25$, $c^2=20$, $d^2=10$, $\lambda^2=31$, $\mu^2=29$, $\nu^2=20$. Векторы **d**, **c**, **ν**, отвечающие единственной тройке наименьших чисел (10, 20, 20), компланарны. Любая тройка векторов {**d**, **c**, **b**}, {**d**, **c**, **a**}, {**d**, **ν**, **b**}, {**d**, **ν**, **a**}, отвечающая следующей по величине тройке чисел (10, 20, 25), образует репер из последовательных минимумов. Непосредственный подсчет показывает, что реперы {—**d**, **ν**, **b**} и {—**d**, **ν**, **a**}— остроугольные и метрически различные, а реперы {**d**, **c**, **b**} и {**d**, **c**, **a**} — тупоугольные и метрически различные.

Этот пример показывает (в противоречии с высказыванием в [26], стр. 150), что в решетке могут одновременно существовать как остроугольные, так и тупоугольные параллелепипеды, построенные на кратчайших векторах решетки — на трех ее последовательных минимумах.

Обратим внимание на тот важный факт, что изложенный выше способ обладает тем достоинством, что позволяет найти все существующие в решетке различные реперы из последовательных минимумов, которых имеется конечное число.

В любой трехмерной решетке выберем, следуя Минковскому, такой репер из последовательных минимумов, чтобы углы между первым и вторым а также вторым и третьим его векторами были не тупые, что всегда можно сделать, изменяя, если нужно, некоторые векторы на обратные. Метрические параметры такого репера удовлетворяют девяти независимым неравенствам (неравенствам Минковского, см. § 2), которые мы будем называть основными.

Никакие два метрически различных репера, метрические параметры которых удовлетворяют всем строгим неравенствам приведения, не могут принадлежать одной и той же решетке [27]. Однако встречаются метрически различные реперы, удовлетворяющие нестрогим неравенствам приведения, которые принадлежат одной и той же решетке. Для устранения последнего недостатка в случае выполнения некоторых равенств на параметры репера надо положить еще связанные с этими равенствами дополнительные неравенства, которые можно задавать по-разному, например так, как указано в табл. 4. Принцип построения такой таблицы, предложенный М. И. Штогриным, будет изложен в самом общем виде в гл. 8, 9.

Таблица 4

1. $0<k$, $2k<a^2$, $a<b$, $b<c$, $0<g$, $2g<b^2$, $0<a^2+2h$, $2h<a^2$, $0<a^2+b^2-2k+2h-2g$.
2. $k=0$, $g\geqslant 0$, $a<b$, $b<c$, $b^2>2g$, $a^2>2h$; $h\geqslant 0$.
3. $g=0$, $h>0$, $a<b$, $b<c$, $a^2>2k$, $a^2>2h$; $h\geqslant 0$.
4. $a=b$, $0<a^2+b^2-2k+2h-2g$, $k>0$, $b<c$, $a^2>2k$, $b^2>2g$; $h\leqslant g$, $h+g\geqslant 0$.
5. $b=c$, $g>0$, $a<b$, $a^2>2k$, $b^2>2g$, $0<a^2+b^2-2k+2h-2g$; $k\geqslant h$, $k+h\geqslant 0$.
6. $a^2=2k$, $b\leqslant c$, $a<b$, $b^2>2g$, $a^2>2h$; $h\geqslant 0$, $2g\geqslant h$.
7. $b^2=2g$, $k>0$, $a<b$, $a^2>2k$, $a^2>2h$, $b<c$; $k\leqslant 2h$.
8. $a^2=2h$, $a\leqslant b$, $k\geqslant 0$, $b<c$, $a^2>2k$, $b^2>2g$; $k\leqslant 2g$.
9. $0=a^2+b^2-2k+2h-2g$, $a^2\geqslant 2k$, $a\leqslant b$, $b<c$, $a^2+2h>0$; $a^2-2g\geqslant k$.
10. $a=b$, $b=c$, $b^2\geqslant 2g$, $0\leqslant a^2+b^2-2k+2h-2g$; $h\leqslant 0$, $k\leqslant g$, $k+h\geqslant 0$.

11. $a=b,\ b=c,\ b^2>2g;\ k\leqslant g,\ k\geqslant h,\ h>0.$
12. $0=a^2+b^2-2k+2h-2g,\ b=c,\ a^2>2k,\ a<b;\ k+h\geqslant 0,\ b^2-2g\geqslant k.$
13. $b^2=2g,\ b\leqslant c,\ k=0,\ a^2>2h,\ a<b;\ 0\leqslant h.$
14. $a^2=2h,\ a^2=2k,\ b\leqslant c,\ b^2\geqslant 2g,\ a<b,\ k>0;\ k\leqslant 2g.$
15. $0=a^2+b^2-2k+2h-2g,\ a^2+2h=0,\ a\leqslant b,\ b<c,\ a^2>2k,\ k\geqslant 0.$
16. $a=b,\ a^2=2k,\ b<c,\ 0<a^2+b^2-2k+2h-2g;\ h\leqslant 0,\ h+g\geqslant 0.$
17. $k=0,\ a=b,\ b^2>2g,\ b<c;\ h\leqslant g,\ h\geqslant 0.$
18. $g=0,\ b=c,\ a^2>2k,\ a<b;\ k\geqslant h,\ h\geqslant 0.$
19. $b=c,\ 0\leqslant a^2+b^2-2k+2h-2g,\ a<b,\ b^2=2g;\ k+h\geqslant 0,\ h<0.$
20. $a^2=2k,\ a=b,\ b^2=2g,\ b<c,\ 0=a^2+b^2-2k+2h-2g,\ a^2>2h.$

В любой решетке существует единственный в смысле метрики репер, приведенный по Минковскому, метрические параметры которого удовлетворяют одной из 20 систем табл. 4. Так, например, в решетке, рассмотренной выше, таким единственным ее репером служит репер $\{\mathbf{d},\ -\mathbf{c},\ \mathbf{b}\}$, метрические параметры которого удовлетворяют системе 9.

Таким образом, для осуществления однозначного приведения к реперу из трех последовательных минимумов достаточно:

1) найти все метрически различные реперы, построенные па последовательных минимумах решетки;

2) отобрать из них те, которые удовлетворяют неравенствам Минковского, т. е. реперы, у которых k и g неотрицательны;

3) из реперов, удовлетворяющих неравенствам Минковского, отобрать тот, который удовлетворяет одной из 20 систем неравенств табл. 4.

Глава 4

ТИПЫ БРАВЕ РЕШЕТОК И ПОЛНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ, СОВМЕЩАЮЩИЕ РЕШЕТКИ С СОБОЙ

§ 1. ЗАДАНИЕ ДВИЖЕНИЙ СКОБКОЙ $(g,\ t)$

Полная группа $\{\Gamma\}$ движений Γ, совмещающих некоторую решетку Λ с собой, состоит из:

а) чистых поворотов решетки вокруг какой-либо фиксированной ее точки O (причем здесь под поворотом понимается как любое движение 1-го рода, так и любое движение 2-го рода, оставляющее точку O на месте), образующих голоэдрию этой решетки, которые записываются скобками $(g,\ 0)$, где g — чистые повороты;

б) чистых параллельных переносов на векторы t этой решетки, которые записываются скобками (E, t), где E — тождественный поворот, а t — произвольный вектор решетки;

в) общих (в смысле записи) движений, записываемых скобкой (g, t), причем понимать эту запись надо так, что сначала производится поворот g этой решетки вокруг ее точки O, а затем параллельный ее перенос на вектор t.

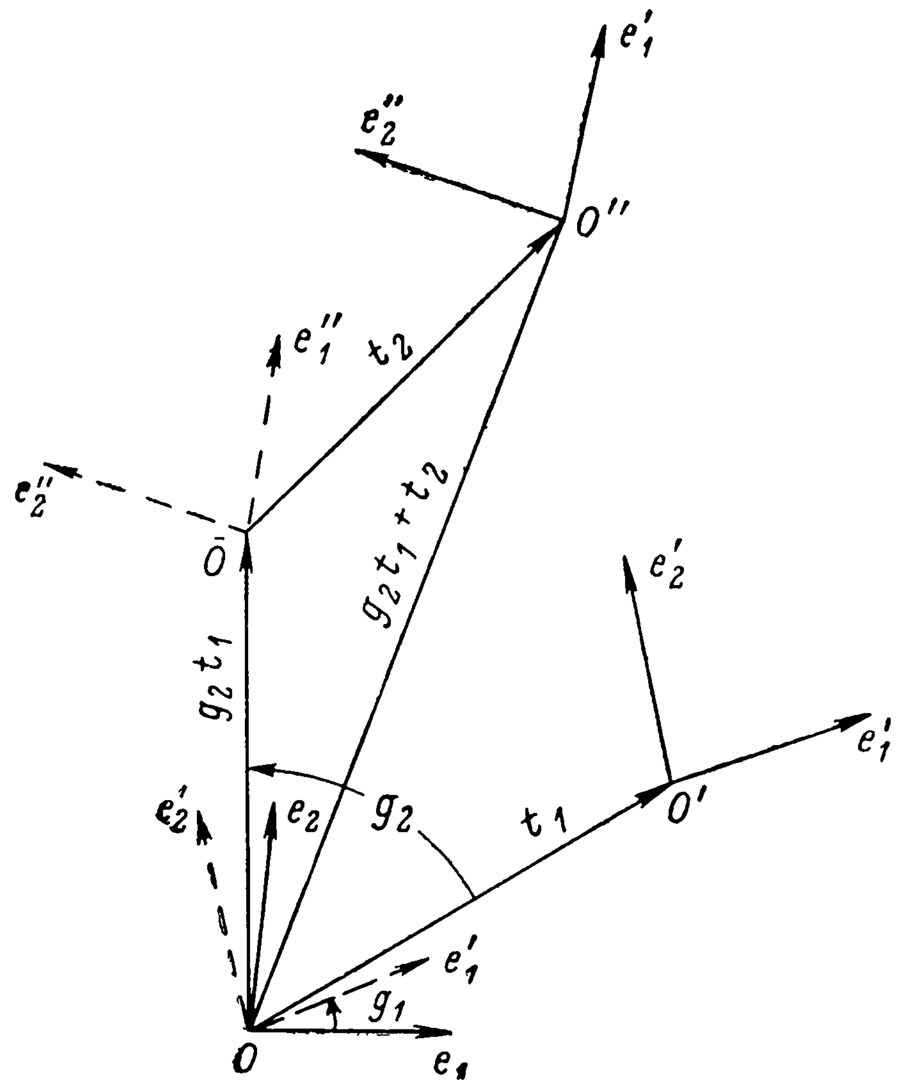


Рис. 16.

Пусть заданы два таких движения, записанных в виде (g_1, t_1) и (g_2, t_2), где g_1 и g_2 — повороты этих движений, а t_1 и t_2 — векторы их параллельных переносов. Что означает произведение таких движений? Для простоты поясним этот вопрос на плоскости.

Рассмотрим какой-либо репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (рис. 16). Этот репер после поворота g_1 вокруг точки O переходит в репер $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, который переносится вектором t в репер $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$. Полученный в результате первого движения (g_1, t_1) репер $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ после поворота g_2 вокруг точки O переходит в репер $\{\bar{O}, \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''\}$, который переносится ветором t_2 в репер $\{O'', \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''\}$. Движение, при котором репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ переходит в репер $\{O'', \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2''\}$, называется произведением движений (g_1, t_1) и (g_2, t_2). Это движение имеет поворот g_2g_1 вокруг точки O, причем справа пишется первый из сделанных поворотов, а слева — второй, что обусловлено дальнейшей записью их матрицами. Параллельный перенос этого движения, как видно из рис. 16, можно записать в виде $g_2t_1+t_2$. Таким образом, $(g_2, t_2)(g_1, t_1)= =(g_2g_1, g_2t_1+t_2)$.

§ 2. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА БИБЕРБАХА И ТЕОРЕМА О СОБСТВЕННОМ ВЕКТОРЕ

Пусть $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ суть полные группы движений, совмещающих с собой некоторые решетки Λ и Λ'.

Теорема 1. Если $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ изоморфны, то параллельным переносам группы $\{\Gamma\}$ соответствуют параллельные переносы группы $\{\Gamma'\}$, а параллельным переносам группы $\{\Gamma'\}$ — параллельные переносы группы $\{\Gamma\}$.

Рассмотрим параллельный перенос (E, t) группы $\{\Gamma\}$ и пусть ему по рассматриваемому изоморфизму групп $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ соответствует не параллельный перенос группы $\{\Gamma'\}$, а некоторое движение (A', t'), в котором поворот A' не тождественный. Возьмем любой репер решетки Λ'. Тогда A' поворачивает хотя бы один из векторов этого репера, так как если бы он не поворачивал ни одного из них, то A' было бы тождественным преобразованием. Действительно, поворот есть аффинное преобразование, а аффинное преобразование вполне задается образом некоторого репера, и если репер повекторно переходит в себя, то преобразование тождественно. Рассмотрим тот из векторов τ' этого репера, который не является собственным вектором преобразования A' с собственным значением, равным 1. По рассмотренному нами изоморфизму, параллельному переносу (E, τ') группы $\{\Gamma'\}$ соответствует в группе $\{\Gamma\}$ некоторое движение (S, τ),

$$(E, t) \leftrightarrow (A', t'),$$
$$(S, \tau) \leftrightarrow (E, \tau').$$

С элементами групп $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ сделаем следующие преобразования:

$$(S, \tau)(E, t)(S, \tau)^{-1} = (E, St),$$
$$(E, \tau')(A', t')(E, \tau')^{-1} = (A', t' + \tau' - A\tau').$$

Так как (E, t) и (E, St) в группе коммутируют как параллельные переносы, то соответствующие им элементы в группе $\{\Gamma'\}$ тоже должны коммутировать:

$$(A', t')(A', t' + \tau' - A\tau') = (A', t' + \tau' - A\tau')(A', t'),$$
$$(A'^2, t' + A't' + A'\tau' - A'^2\tau') = (A'^2, t' + \tau' - A'\tau' + A't'),$$
$$t' + A't' + A'\tau' - A'^2\tau' = t' + \tau' - A'^2\tau' + A't',$$
$$A'^2\tau' + \tau' = 2A'\tau'. \tag{1}$$

Возможны два случая: 1) A'^2 поворачивает вектор τ', и тогда равенство (1) невозможно, так как сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны; 2) A'^2 не поворачивает вектора τ'. Тогда длины векторов в правой и левой части равенства (1) одинаковы, но направления разные и поэтому наше предположение, что A' отлично от E, невозможно.

Таким образом, при изоморфизме групп $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ параллельным переносам группы $\{\Gamma\}$ соответствуют параллельные переносы группы $\{\Gamma'\}$ и обратно. При этом переносам на векторы основного репера в одной группе соответствуют переносы на векторы основного репера в другой, так как если бы во второй группе им соответствовали векторы не основного репера, то их сочетанием нельзя было бы получить всю группу параллельных переносов T'. А эти группы изоморфны.

Определение. Кратчайший вектор решетки, идущий из точки O по оси, проходящей через точку O, для краткости будем называть собственным вектором этой оси.

Теорема 2. Если группы $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ изоморфны, то собственным векторам осей группы $\{\Gamma\}$ соответствуют собственные векторы осей таких же наименований группы $\{\Gamma'\}$.

Пусть g — поворот n-го порядка. Рассмотрим любое движение (g, t) группы $\{\Gamma\}$. Возведя его в n-ю степень, получим $(g, t)^n=(E, t+gt+...+g^{n-1}t)$. Векторы $t, gt, ..., g^{n-1}t$ есть векторы, получающиеся из вектора t всеми n поворотами, включая и тождественный вокруг оси поворот g. Сумма этих векторов проходит по этой оси, т. е. является собственным вектором этой оси. Пусть движению (g, t) группы $\{\Gamma\}$ соответствует в группе $\{\Gamma'\}$ некоторое движение (g', t'). В силу изоморфизма этих групп n-й степени этого движения соответствует движение, соответствующее параллельному переносу $(E, t+gt+...+g^{n-1}t)$ группы $\{\Gamma\}$, т. е. в силу предыдущей леммы, параллельный перенос. Аналогично сказанному выше, вектор $t'+g't'+...+g'^{n-1}t'$ есть собственный вектор поворота g'.

§ 3. О СОВПАДЕНИИ КЛАССИФИКАЦИИ БРАВЕ РЕШЕТОК НА 14 ТИПОВ С АБСТРАКТНОЙ КЛАССИФИКАЦИЕЙ ПОЛНЫХ ГРУПП СОВМЕЩЕНИЙ РЕШЕТОК С СОБОЙ

Прямая теорема. Если две решетки одного и того же типа Браве, то полные группы движений, совмещающие решетки с собой, изоморфны.

Повороты трехмерной решетки в себя записываются в репере Браве матрицами, не зависящими от метрики репера Браве [28]. Параллельные переносы в случае примитивного параллелепипеда Браве записываются целочисленными координатами. В остальных случаях параллельные переносы записываются либо целыми числами, либо к целым прибавляются 1/2 1/2 1/2 в случае объемно-центрированных решеток; 1/2 1/2 0, 1/2 0 1/2, 0 1/2 1/2 в случае гранецентрированных решеток и 1/2 1/2 0 в случае базоцентрированных решеток. В силу этого формулы, записывающие движения, совмещающие с собой решетки одного и того же типа Браве, будут просто одинаковыми. Следовательно, группы этих совмещений будут изоморфными.

Обратная теорема. Если полные группы движений, совмещающие решетки с собой, изоморфны, то они одного и того же типа Браве.

Действительно, поскольку голоэдрия параллелепипеда Браве совпадает с голоэдрией решетки, то в данной решетке могут быть параллелепипеды Браве, только совпадающие с ней по голоэдрии. Поэтому этот вопрос следует решать лишь для кубической, квадратной, ортогональной и моноклинной голоэдрий, так как для остальных голоэдрий имеется по одному типу параллелепипедов Браве.

Пусть голоэдрия — кубическая, тогда ребра параллелепипеда Браве суть примитивные векторы, идущие из точки O по трем взаимно перпендикулярным осям 4-го порядка. Но все 8 таким образом полученных параллелепипедов являются параллельно переносными и поэтому в данной кубической решетке одинаково центрированными.

Ребра параллелепипедов Браве ортогональной голоэдрии суть примитивные векторы, идущие из точки O по трем взаимно перпендикулярным осям 2-го порядка, проходящим через точку O, и все 8 таким образом полученных параллелепипедов будут параллельно переносными друг другу и поэтому одинаково центрированными.

Одно ребро параллелепипеда Браве квадратной голоэдрии есть примитивный вектор, идущий из точки O и проходящий по единственной оси 4-го порядка, а два других — примитивные векторы, идущие из точки O по сторонам основного квадрата плоской сетки плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной оси 4-го порядка. Все 8 полученных параллелепипедов являются параллельно переносными и поэтому в данной решетке одинаково центрированными.

Одно ребро параллелепипеда Браве моноклинной решетки есть примитивный вектор, исходящий из точки O и идущий по единственной оси 2-го порядка. Если между основаниями параллелепипеда нет им параллельной плоской сетки, то получается простой моноклинный параллелепипед Браве, если есть, то бокоцентрированный. Но в фиксированной решетке имеет место либо только первое, либо только второе.

В силу первой теоремы Бибербаха, основному параллелепипеду решетки Λ соответствует основной параллелепипед решетки Λ', плоской сетке l решетки Λ — плоская сетка l' решетки Λ', а основному реперу сетки l — основной репер сетки l'. Следовательно, индексы центрировки параллелепипедов Браве, а также их граней при изоморфизме сохраняются.

Итак, мы видим, что две решетки относятся к одному и тому же типу Браве тогда и только тогда, когда полные группы движений, совмещающие решетки с собой, изоморфны. Именно это определение типов Браве решеток мы примем для n-мерного случая.

Очевидно, что полные группы совмещений решетки с собой дискретны и с конечной фундаментальной областью, т. е. суть федоровские группы. Эти 14 из 219 неизоморфных федоровских групп будем называть группами Браве.

ЧАСТЬ II

n-МЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ n-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

Глава 5

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ, n-МЕРНЫЕ РЕШЕТКИ И КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

§ 1. МЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РЕПЕРА

Совокупность n векторов n-мерного пространства, исходящих из общего начала O и лежащих не компланарно, называется *декартовым репером* $\mathcal{E}$ этого пространства.

Метрика этого репера характеризуется длиной этих векторов и величиной углов, образуемых этими векторами попарно друг с другом. Всего векторов n, а пар, которые можно из них составить, $n(n-1)/2$, так как каждый из этих векторов можно соединить в пару с остальными $n-1$ векторов, а двойка в знаменателе написана с таким расчетом, чтобы пару не считать два раза. Число N всех метрических параметров равно

$$N=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Вместо длин векторов и углов между ними принято задавать скалярные квадраты a_{ii} и попарные скалярные произведения a_{ik}, где $i\neq k$ векторов репера $\mathcal{E}$.

N величин a_{ik} (где, конечно, $a_{ik}=a_{ki}$), являющихся всевозможными скалярными квадратами и скалярными произведениями векторов репера $\mathcal{E}$, называются *метрическими параметрами* репера $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — векторы репера $\mathcal{E}$. Рассмотрим скалярный квадрат линейной комбинации этих векторов $(\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n)^2$.

Ввиду того что при скалярном умножении линейных комбинаций векторов эти комбинации умножаются как многочлены (только векторы скалярно, а x_i — как числа), то

$$(\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\ldots+\mathbf{a}_nx_n)^2=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+ \\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n. \quad (1)$$

Полученный однородный многочлен 2-й степени (*квадратичная форма*) кратко записывается в виде

$$f=f(x_i)=\sum_{i,\,k=1}^{n}{}' a_{ik}x_ix_k$$

и называется *метрической формой* репера $\mathcal{E}$. Симметрическая $a_{ij}=a_{ji}$ матрица этой формы

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *метрической матрицей* репера $\mathcal{E}$, а ее определитель

$$\Delta = \det A = \det a(_{ij}) = \det f$$

— *дискриминантом формы* f.

Теорема 1. Дискриминант Δ формы f равен квадрату объема V параллелепипеда, построенного на векторах репера $\mathcal{E}$.

Для доказательства рассмотрим вспомогательный ортонормированный репер $\mathcal{E}^*$, начало которого совпадает с началом репера $\mathcal{E}$. Пусть строки

$$(b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}),$$
$$(b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn})$$

— координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ по отношению к реперу $\mathcal{E}^*$. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *координатной матрицей* репера $\mathcal{E}$ в репере $\mathcal{E}^*$.

Известно, что скалярное произведение двух векторов, записанных в ортонормированном репере, есть сумма произведений соответствующих координат этих векторов. Следовательно, любой коэффициент a_{ik} матрицы A есть сумма произведений соответствующих элементов i-го столбца матрицы B на k-й столбец этой же матрицы, т. е.

$$A = B^T B. \tag{2}$$

Поскольку репер $\mathcal{E}^*$ ортонормированный, то объем параллелепипеда, построенного на этом репере, равен 1. А так как определитель матрицы B есть отношение объемов параллелепипедов $V_{\mathcal{E}}$ и $V_{\mathcal{E}^*}$, построенных на реперах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$, то $\det B = V_{\mathcal{E}}$. Следовательно,

$$\det A = (\det B)^2 = V_{\mathcal{E}}^2.$$

§ 2. ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ МЕТРИКАМИ РЕПЕРОВ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Положительной квадратичной формой называется такая форма, которая при всех наборах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значений переменных положительна и только при наборе $(0, 0, \ldots, 0)$ равна нулю. Метрическая форма f репера $\mathscr{E}$ положительна. Действительно, так как $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ не компланарны, то вектор $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n$ имеет нулевую длину, только если одновременно $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$; если же этого нет, длина его не равна нулю и, следовательно, скалярный квадрат его положителен.

Докажем теперь обратное, что любая положительная квадратичная форма от n переменных есть метрическая форма некоторого n-мерного репера.

Как известно, любая квадратичная форма (как положительная, так и не положительная) может быть разложена в алгебраическую сумму квадратов линейных форм, число которых не больше чем n. Пусть, например, квадратичная форма f равна такой сумме квадратов n линейных форм:

$$\pm(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 \pm (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n)^2 \pm \ldots$$
$$\ldots \pm (b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n)^2.$$

Тогда для получения положительной f необходимо, чтобы определитель B этих линейных форм был не равен нулю, так как иначе по известной теореме об однородной системе n линейных уравнений с n неизвестными существовал бы набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличный от $(0, 0, \ldots, 0)$, при котором они бы все удовлетворялись и форма была бы равна нулю. Отсюда уже ясно, что ни у одного квадрата все его коэффициенты не могут быть нулями, т. е. число таких квадратов должно быть равно n, так как иначе определитель имел бы чисто нулевую строку и равнялся бы нулю. Ни один квадрат не может входить со знаком «—», так как иначе, вычеркнув его, мы имели бы не положительную форму и тем более не была бы положительной заданная форма. Итак, если форма f положительна, то она разлагается на n квадратов линейных форм со знаками «+», при этом определитель B линейных форм не равен нулю. Но тогда векторы с координатами $(b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1})$, $(b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2})$, $\ldots$, $(b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn})$ не компланарны, и если их считать написанными в ортонормированном репере $\mathscr{E}^*$, то их скалярные произведения равны как раз коэффициентам $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{n-1\,n}$ формы f. В этом легко убедиться, раскрыв все квадраты и сделав приведение подобных членов. Например, при x_1^2 получается $b_{11}^2 + b_{21}^2 + \ldots + b_{n1}^2$, т. е. скалярный квадрат a_{11} вектора $\mathbf{a}_1$, при x_2^2 получается $b_{12}^2 + b_{22}^2 + \ldots + b_{n2}^2$, т. е. скалярный квадрат a_{22} вектора $\mathbf{a}_2$, и т. д., при $x_1 x_2$ будем иметь $2(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} + \ldots + b_{n1}b_{n2})$, т. е. удвоенное скалярное произведение векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, и т. д.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, в силу $\Delta \neq 0$, не компланарны, т. е. образуют в n-мерном пространстве репер, а форма f является метрической формой этого репера. Итак, доказана следующая важная теорема.

Теорема 2. Метрическая квадратичная форма всякого репера положительна и, наоборот, всякая положительная квадратичная форма есть метрическая квадратичная форма некоторого репера.

Бесконечно много разных разложений положительной квадратичной формы на квадраты получается потому, что репер с заданной метрикой (заданы коэффициенты a_{ik} его метрической формы) можно бесконечно многими способами поворачивать по отношению к ортонормированному реперу.

Для распознавания положительности квадратичной формы существует следующий критерий Сильвестра: квадратичная форма от n переменных положительна тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы $\|a_{ik}\|$ квадратичной формы больше нуля:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Квадратичная форма f^{-1}, заданная матрицей A^{-1}, называется *обратной* по отношению к форме f.

Форма f^{-1} также положительна; действительно, в силу соотношения $A = B^{\tau}B$, имеем

$$A^{-1} = (B^{\tau}B)^{-1} = B^{-1}(B^{\tau})^{-1} = H^{\tau}H,$$

где через H обозначена матрица $(B^{\tau})^{-1}$. Это равенство, аналогичное равенству (2) §1, дает разложение формы f^{-1} в сумму n квадратов линейных форм. Так как $\det H \neq 0$, эти формы линейно независимы и f^{-1} положительна.

Наряду с обратной формой f^{-1} рассматривают еще и так называемую взаимную форму f^*. Матрицей этой формы служит матрица алгебраических дополнений матрицы A формы f. Форма f^* также положительна, поскольку она связана с f^{-1} очевидным соотношением

$$f^* = f^{-1}\Delta.$$

§ 3. ВЕКТОРЫ СМЕЖНОСТИ. НЕРАВЕНСТВО КОРКИНА И ЗОЛОТАРЕВА

Заметим прежде всего, что теорема 1 гл. 2 об области Дирихле верна и в n-мерном случае.

Вектор $\mathbf{b} = \overline{OM}$ решетки Λ, идущий из точки O в центр M произвольной области Дирихле D_M, смежной с областью D_0 по $(n-1)$-мерной грани, называется *вектором смежности* точки O относительно решетки Λ.

Очевидно, что любой кратчайших вектор решетки (ее минимум) является ее вектором смежности. Действительно, пусть ON — минимум и N' — любая другая точка решетки. Проведем через середину A отрезка ON' n—1-мерную плоскость, перпендикулярную отрезку ON' (плоскость Вороного). Если она пересечет прямую ON в некоторой точке B, то OB будет больше $\frac{1}{2}ON$, так как OB, как гипотенуза, больше катета OA, а катет OA равен $\frac{1}{2}ON'$ и, следовательно, больше или равен $\frac{1}{2}ON$.

Но не всякий вектор смежности есть минимум. Рассмотрим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вектор решетки был ее вектором смежности.

Координаты точек решетки по отношению к некоторому ее основному реперу суть целые числа. Остаток от деления этих координат на 2 равен 0 или 1. Число различных последовательностей по n чисел, каждое из которых равно 0 или 1, будет равно 2^n. Такую последовательность будем называть индексом. Все точки решетки одного и того же индекса, как легко видеть, составляют подрешетку, гомотетичную данной и линейно в 2 раза большую. Имеет место следующая теорема Минковского—Вороного.

Теорема. Вектор решетки является вектором смежности тогда и только тогда, когда он есть единственный, кроме ему обратного, минимум на множестве векторов решетки с координатами данного индекса, отличного от $(0, 0, \ldots, 0)$.

Приведем доказательство Н. П. Долбилина. Пусть $\overline{OM}$ — минимум среди векторов данного индекса. Тогда нет точки N решетки, лежащей внутри OM, так как иначе точка M' решетки, симметричная с M по отношению к N, была бы, во-первых, того же индекса, так как получалась бы из M прибавлением два раза взятого вектора MN, и, во-вторых, лежала бы ближе к O, чем точка M. Пусть теперь P — любая точка решетки, отличная от O и M. Рассмотрим точку $\tilde{M}$ решетки, симметричную с M по отношению к P. Она будет получаться из M прибавлением 2 раза вектора MP, т. е. будет того же индекса, что и M, и, следовательно, в силу предположения, $O\tilde{M} > OM$. Но в таком случае перепендикуляр к OP, проведенный через точку P, будет, очевидно, оставлять точку M по ту же сторону, по которую лежит точка O. А следовательно, перепендикуляр, проведенный к OP через его середину, будет оставлять середину OM по ту же сторону, что и точка O. Другими словами, никакая плоскость Вороного не отрезает середины OM от точки O и, следовательно, $\overline{OM}$ есть вектор смежности.

Пусть теперь, наоборот, OM есть вектор смежности. Возьмем любую точку $\tilde{M}$ того же индекса, как M. Тогда вектор $\overline{M\tilde{M}}$ будет иметь четные координаты, отсюда половина его MP будет иметь целые координаты и, следовательно, будет вектором решетки, т. е. точка P будет точкой решетки. И тогда, если бы $O\tilde{M}$ была короче или равнялась OM, то плоскость Воро-

ного отрезка $O\tilde{M}$ либо отрезала бы середину OM от точки O, либо проходила бы через эту середину, чего не может быть, если OM — вектор смежности. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольную n-мерную решетку Λ, и пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ — векторы смежности точки O решетки Λ.

Среди этих векторов найдется, по крайней мере, одна система из n линейно независимых векторов, ибо иначе область Дирихле была бы бесконечной призмой. Обозначим репер из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ этой совокупности через B^*.

Определитель ω, составленный из координат векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ в произвольном основном репере решетки Λ, называется *характеристическим определителем* системы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

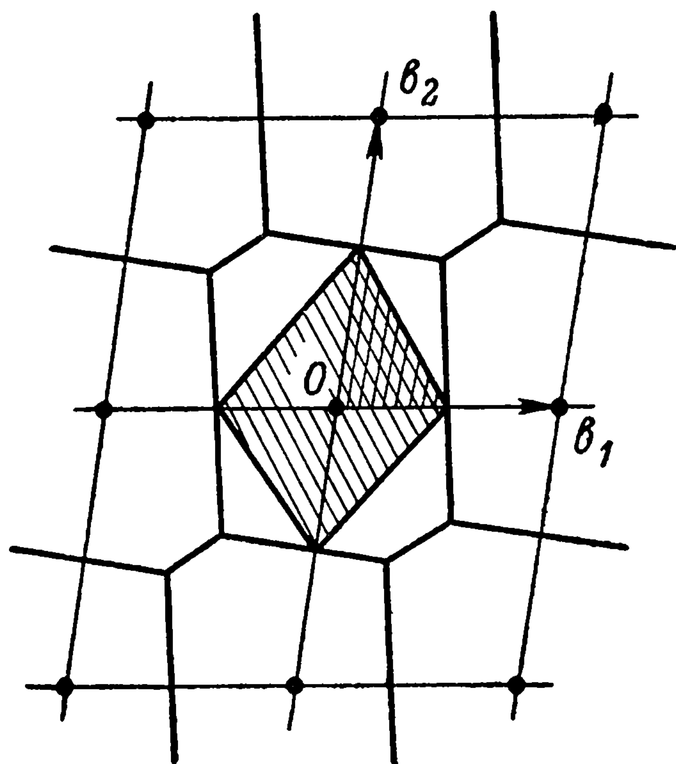


Рис. 17.

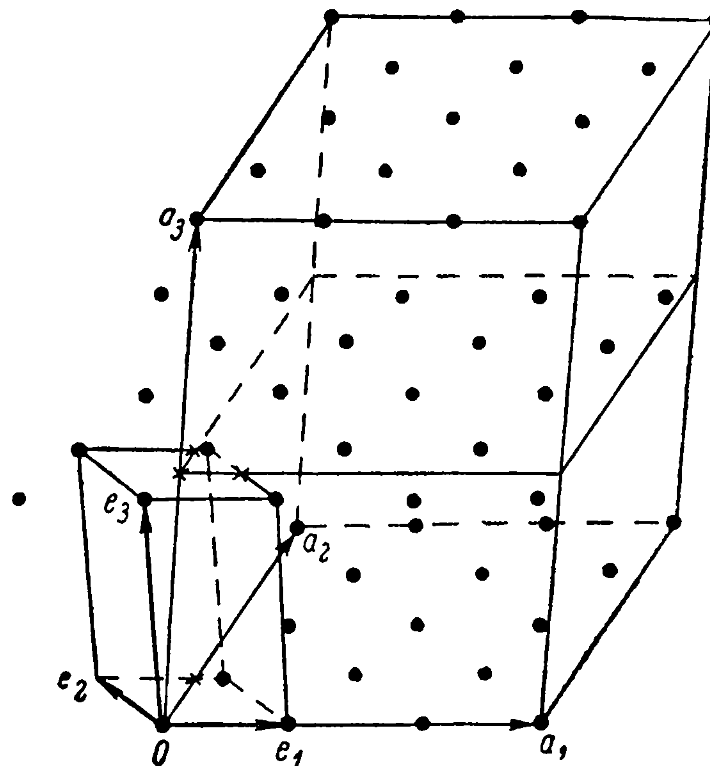


Рис. 18.

Теорема 3. Характеристический определитель $|\omega|$ меньше чем $n!$.

Замечание. Эта очень важная теорема в частном случае кратчайших векторов решетки была доказана А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым, поэтому мы будем доказанное в ней неравенство называть неравенством Коркина—Золотарева [29].

Доказательство. Обозначим через W объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, а через V — объем основного параллелепипеда решетки Λ. Тогда имеем равенство $|\omega| = \frac{W}{V}$. Заметим далее, что объем симплекса, построенного на половинах рассматриваемых векторов, равен $W/2^n n!$ и что «октаэдр», построенный на всех векторах $\pm{}^1/_2\mathbf{b}_1, \pm{}^1/_2\mathbf{b}_2, \ldots, \pm{}^1/_2\mathbf{b}_n$, по объему в 2^n раз больше этого симплекса и поэтому в $n!$ раз меньше объема параллелепипеда W (рис. 17). Этот октаэдр весь лежит внутри области Дирихле. Объем же области Дирихле равен объему V основного параллелепипеда, а следовательно $W/n! < V$. Подставив в это неравенство соотношение $|\omega| = W/V$, получим $|\omega| < n!$.

§ 4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПРИСПОСОБЛЕННОМ РЕПЕРЕ

Репер B^*, построенный на n не компланарных векторах смежности $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ точки O решетки Λ, в общем случае при $n \geqslant 3$ может быть и не основной репер решетки, и поэтому, помимо точек решетки, лежащих в вершинах построенного на репере B^* параллелепипеда Q, могут быть точки решетки, лежащие внутри него (или на его границе).

Рассмотрим теперь так называемый приспособленный к реперу B^* основной репер $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ решетки. Все, что дальше будет сказано о приспособленном репере, осносится не только к реперу из векторов смежности, но вообще к любому не основному реперу решетки $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Векторы его выбираются следующим образом (рис. 18): вектор $\mathbf{e}_1$ есть вектор, идущий из точки O к ближайшей к ней точке A_1 решетки Λ, лежащей на векторе OB_1; вектор $\mathbf{e}_2$ есть вектор, идущий из точки O к к точке A_2 ближайшего параллельного OA_1 ряда решетки, лежащего в плоскости $O\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$, по ту сторону от ряда OA_1, по которую лежит вектор $\mathbf{b}_2$, и к такой точке этого ряда, что вектор $\mathbf{b}_2$ пересекает вектор $A_2\mathbf{e}_1$; вектор $\mathbf{e}_3$ идет из точки O к точке, ближайшей параллельной сетки к сетке OA_1A_2, лежащей в трехмерном пространстве $O\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ по ту сторону от сетки OA_1A_2, по которую лежит от нее вектор $\mathbf{b}_3$, причем к такой ее точке, что вектор $\mathbf{b}_3$ пересекает параллелограмм $A_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, и т. д. При таком построении внутрь параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, и на его границе, кроме как в вершины, не попадает ни одной точки решетки, т. е. параллелепипед, построенный на этих векторах, — основной. Координаты x_{ij} векторов $\mathbf{b}_j$ решетки относительно репера $\mathscr{E}$, как основного, числа целые. Матрица X этих координат векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_n$ имеет треугольный вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

т. е. $\det X = x_{11}x_{22} \ldots x_{nn}$. Но по неравенству Коркина и Золотарева $|\det X| < n!$. Так как все числа x_{ii} целые, то все $|x_{ii}| < n!$, а в силу построения репера $\mathscr{E}$, имеем $|x_{ij}| \leqslant |x_{ii}| < n!$ при $0 < i < j < n$.

Пусть теперь $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}_n$ — произвольный вектор смежности. Обозначим через W_k объем (быть может, равный нулю) параллелепипеда, построенного на векторе $\mathbf{b}$ и всех векторах репера B^*, кроме вектора $\mathbf{b}_k$. Тогда $\beta_k = \frac{W_k}{W}$, где через W обозначим объем параллелепипеда Q. Откуда, в силу неравенства Коркина и Золотарева для параллелепипеда Q, имеем: $W_k < n!\, V$, где V — объем основного параллелепипеда решетки. С другой стороны, поскольку векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — векторы решетки, мы имеем $W \geqslant V$.

Из этих двух соотношений получается $|\beta_k| = \frac{W_k}{W} < \frac{n!\,V}{W} \leqslant n!$. Подставляя в соотношение $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}_n$ разложения векторов $\mathbf{b}_k$ по векторам репера $\mathscr{E}$ и учитывая полученные неравенства $|\beta_k| < n!$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ и $|x_{ij}| < n!$ при $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n!$, мы получаем, что координаты вектора $\mathbf{b}$ относительно репера $\mathscr{E}$ не превышают величины $n(n!)^2$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. В каждой n-мерной решетке Λ найдется такой основной репер $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, по отношению к которому все координаты всех векторов смежности (точки O) ограничены по абсолютной величине числом $n\,(n!)^2$.

§ 5. ТЕОРЕМА МАШКЕ

Пусть дана конечная группа n-мерных квадратных матриц с действительными элементами $E, A, B, \ldots, K$. Если следить за движением любого n-мерного репера $\mathscr{E}$ с началом O, то эти матрицы будут описывать некоторую конечную группу центроаффинных преобразований пространства E^n в себя. Теорема Машке состоит в том, что можно всегда так выбрать метрику репера $\mathscr{E}$, чтобы эти матрицы описывали группу обычных евклидовых поворотов пространства. Действительно, пусть f — произвольная положительная квадратичная форма с n переменными. Рассмотрим сумму $F = f_E + f_A + \ldots + f_K$ форм, получающихся из f всеми преобразованиями этой группы. F будет, очевидно, опять положительная квадратичная форма и такая, что она преобразуется в себя всеми матрицами $E, A, B, \ldots, K$. Действительно, при любом таком преобразовании слагаемые F будут только переставляться между собой. Если принять форму F за метрическую форму репера $\mathscr{E}$, то в таком репере матрицы $E, A, B, \ldots, K$ будут описывать обычные повороты пространства E^n вокруг точки O.

Если матрицы $E, A, B, \ldots, K$ — целочисленные и на репере $\mathscr{E}$ построить решетку Λ, то эти матрицы будут, очевидно, описывать группу поворотов этого репера в другие основные реперы этой же решетки Λ, т. е. группу поворотов решетки в себя.

Поэтому получается важная теорема заключающаяся в том, что не только верно то, что всякая группа поворотов решетки в себя записывается в ее основном репере как конечная группа целочисленных матриц, но, в силу только что доказанной теоремы Машке, и любая конечная группа целочисленных матриц записывает для некоторых решеток в их основных реперах группы поворотов этих решеток в себя.

Отсюда, в частности, получается такое замечательное следствие: если имеется фигура, обладающая некоторой конечной группой аффинных преобразований в себя, то всегда можно так ее аффинно преобразовать, что преобразованная фигура будет иметь соответствующую группу ортогональных преобразований в себя, записываемую теми же матрицами, но в преобразованном репере. С этим обстоятельством связаны группы гомологий В. И. Михеева [30].

§ 6. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА

Теорема 5. Число неэквивалентных конечных групп n-мерных целочисленных матриц меньше некоторой константы, зависящей только от n.

Две конечные группы целочисленных унимодулярных матриц называются эквивалентными, если они описывают одни и те же повороты в себя некоторой решетки, но в разных ее основных реперах. Пусть S — матрица, переводящая первый из этих реперов во второй. Тогда если первая группа состоит из матриц E, A, B, . . ., K, то вторая группа состоит из матриц E, $S^{-1}AS$, $S^{-1}BS$, . . , $S^{-1}KS$.

Рассмотрим теперь любой поворот решетки Λ. Этому повороту в приспособленном к реперу B^* репере $\mathcal{E}$ соответствует некоторая целочисленная унимодулярная матрица A, переводящая репер $\mathcal{E}$ в повернутый репер $\mathcal{E}'$. Координаты векторов репера B^* ограничены как по отношению к реперу $\mathcal{E}$, так и по отношению к реперу $\mathcal{E}'$ константой $n\ (n!)^2$. Отсюда следует, что координаты векторов репера $\mathcal{E}'$ по отношению к реперу B^* также ограничены константой, зависящей лишь от n. Действительно, они представляют дроби, числители которых суть определители n-го порядка, составленные из координат векторов репера B^* по отношению к реперу $\mathcal{E}'$, т. е. из величин, ограниченных сверху по модулю. Общий же знаменатель этих дробей по модулю не меньше единицы, так как он есть определитель, составленный из целых чисел — координат векторов репера B^* по отношению к реперу $\mathcal{E}'$, и не равен нулю, так как векторы B^* не компланарны.

Итак, координаты векторов репера B^* по отношению к реперу $\mathcal{E}$ ограничены, и координаты векторов репера $\mathcal{E}'$ по отношению к реперу B^* также ограничены, поэтому и координаты векторов репера $\mathcal{E}'$ по отношению к реперу $\mathcal{E}$ также будут ограничены величиной, зависящей только от n. Отсюда следует, что если записывать повороты решетки в себя в приспособленном репере, то все они записываются целочисленными матрицами, все элементы которых меньше некоторой константы, зависящей только от n, т. е. различных таких групп конечное число. А это и дает доказательство теоремы Жордана.

Глава 6

СВЯЗЬ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ С ТИПАМИ БРАВЕ РЕШЕТОК. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОЭДРИИ

§ 1. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА БИБЕРБАХА

Повороты голоэдрии произвольной решетки записываются в каком-либо ее основном репере целочисленными унимодулярными матрицами, и эту группу матриц принято [31] называть арифметической голоэдрией. Записывая голоэдрию решетки во всех возможных ее основных реперах, получим все возможные арифметические голоэдрии, целочисленно-эквивалентные данной.

Если арифметические голоэдрии двух различных решеток целочисленно-эквивалентны, то полные группы движений, совмещающие эти решетки с собой, очевидно, изоморфны, так как при выборе соответствующих основных реперов этих решеток, таких, что в них арифметические голоэдрии решеток совпадают, эти полные группы будут записываться одними и теми же формулами. Бибербах открыл, что верно и обратное утверждение, а именно: если полные группы движений, совмещающие две решетки с собой, абстрактно изоморфны, то арифметические голоэдрии этих решеток целочисленно-эквивалентны.

Доказательство этого обратного утверждения состоит из двух теорем Бибербаха [32].

Первая теорема Бибербаха: при изоморфизме полных групп $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ движений, совмещающих решетки Λ и Λ' с собой, параллельным переносам группы $\{\Gamma\}$ отвечают параллельные переносы группы $\{\Gamma'\}$, и наоборот, так что при этом изоморфизме какому-либо основному реперу решетки Λ отвечает тоже основной репер решетки Λ'. Теорема была доказана в § 2 гл. 4, причем ее доказательство n-мерно.

Докажем теперь вторую теорему Бибербаха.

Вторая теорема Бибербаха. Если группы $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ изоморфны, то арифметические голоэдрии H и H' решеток Λ и Λ' в соответствующих по изоморфизму основных реперах записываются одинаковыми матрицами.

Рассмотрим некоторый основной репер $\mathcal{E}$ решетки Λ и соответствующий ему по изоморфизму основной репер $\mathcal{E}'$ решетки Λ'. Голоэдрию решетки Λ в репере $\mathcal{E}$ запишем матрицами $E, A, B, \ldots, H$, а голоэдрию решетки Λ' в репере $\mathcal{E}'$ — матрицами $E, A', B', \ldots, H'$.

Пусть A — некоторая матрица голоэдрии решетки Λ. Покажем, что она совпадает с некоторой матрицей A' голоэдрии решетки Λ'. Для этого рассмотрим произвольный параллельный перенос (E, t) решетки Λ и преобразуем его движением (A, τ) группы $\{\Gamma\}$ с поворотной матрицей A. В результате получим

$$(A, \tau)(E, t)(A, \tau)^{-1} = (E, At).$$

Напишем аналогичное по изоморфизму равенство

$$(A', \tau')(E, t')(A', \tau')^{-1} = (E, A't').$$

Из этих равенств следует, что переносу (E, At) группы $\{\Gamma\}$ соответствует по изоморфизму параллельный перенос $(E, A't')$ группы $\{\Gamma'\}$. Преобразуем аффинным преобразованием φ репер $\mathcal{E}'$ в репер $\mathcal{E}$ и будем считать, что движения и формулы со штрихами записываются уже относительно репера $\mathcal{E}$, т. е. относительно образа репера $\mathcal{E}'$ при аффинном преобразовании φ. Покажем, что матрица A будет описывать движение. Действительно, после аффинного преобразования φ, соответствующие по изоморфизму параллельные переносы t и t', а также At и $A't'$ будут просто совпадать. Таким образом, мы получаем $A't' = At$, где $t' = t$. Следовательно, $A't = At$ для произвольного переноса t решетки Λ. Поэтому получаем $A' = A$.

Таким образом, любая матрица арифметической голоэдрии решетки Λ, записывающая поворот этой решетки в репере $\mathscr{E}$, совпадает с некоторой матрицей арифметической голоэдрии решетки Λ', записывающей поворот этой решетки в соответствующем по изоморфизму репере $\mathscr{E}'$, и обратно. Таким образом, арифметические голоэдрии решеток Λ и Λ' с изоморфными полными группами $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ одинаковы, если они записаны в соответствующих по изоморфизму реперах.

§ 2. ТИПЫ БРАВЕ РЕШЕТОК. КЛАССЫ БРАВЕ. СИНГОНИИ

В конце I части нашей работы было дано n-мерное определение типа Браве решетки, а именно: две n-мерные решетки принадлежат одному и тому же типу Браве тогда и только тогда, когда изоморфны полные группы движений, совмещающих эти решетки с собой.

Изоморфизм полных групп движений, совмещающих решетки с собой, является абстрактной характеристикой того, что решетки принадлежат одному и тому же типу Браве. Учитывая вторую теорему Бибербаха, можно получить арифметическую характеристику типов Браве решеток, а именно: две n-мерные решетки принадлежат одному и тому же типу Браве тогда и только тогда, когда арифметические голоэдрии этих решеток целочисленно-эквивалентны.

Определение. Совокупность целочисленно-эквивалентных групп матриц, каждая из которых представляет собой арифметическую голоэдрию, называется голоэдрическим классом, или классом Браве.

Таким образом, имеем естественное взаимно-однозначное соответствие между классами Браве и типами Браве решеток.

Заметим, что всякая арифметическая голоэдрия представляет собой совокупность всех целочисленных n-матриц, которые преобразуют в себя некоторую положительную форму f — метрическую форму основного репера решетки, с рассматриваемой арифметической голоэдрией, т. е. представляет собой полную группу целочисленных автоморфизмов некоторой положительной формы f от n переменных.

Имеет место следующая теорема [33].

Теорема 1. Общий наибольший делитель двух арифметических голоэдрий есть арифметическая голоэдрия.

Доказательство. Пусть дано две арифметические голоэдрии H_1 и H_2. Их общий наибольший делитель, т. е. совокупность всех матриц, содержащихся как в H_1, так и в H_2, есть, очевидно, группа матриц, которую обозначим через H. Докажем, что H есть голоэдрия, т. е. что она состоит из всех целочисленных унимодулярных подстановок, которые преобразуют некоторую положительную квадратичную форму f в себя.

Заметим, что если формы f_1 и f_2 даны, то элементы всех тех целочисленных унимодулярных подстановок g, которые преобразуют одну из этих

форм в себя, по абсолютной величине не больше некоторой величины L, которую можно вычислить. Действительно, элементы столбца матрицы g, подставленные в f_i, дают значение коэффициента при квадрате соответствующей переменной x_k преобразованной формы, а все эти коэффициенты не превышают наибольшего коэффициента при квадрате x_k в f_1 и f_2. Имеется лишь конечное число таких наборов $g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in}$ целых чисел, при которых форма меньше некоторой заданной величины.

Рассмотрим все те $[g]$ (в конечном числе), элементы которых по абсолютной величине меньше L. Возьмем форму $f=f_1+\varepsilon f_2$, где ε — малое положительное число, которое мы используем далее. Если все g не изменяют ни f_1, ни f_2, то $[g]$ и есть H. Если какое-нибудь g из $[g]$ переводит f_1 в $\bar{f}_1$ (где $\bar{f}_1 \neq f_1$), но не изменяет f_2, то равенство $f_1+\varepsilon f_2=\bar{f}_1+\varepsilon f_2$, очевидно, не имеет места. Если g изменяет f_2 в $\bar{f}_2$ (где $\bar{f}_2 \neq f_2$), но не изменяет f_1, то равенства $f_1+\varepsilon f_2=f_1+\varepsilon \bar{f}_2$, или $\varepsilon f_2=\varepsilon \bar{f}_2$, какое бы ни было ε, не имеют места. Наконец, если g изменяет обе формы: f_1 в $\bar{f}_1$, а f_2 в $\bar{f}_2$, то равенство $f_1+\varepsilon f_2= =\bar{f}_1+\varepsilon \bar{f}_2$ при достаточно малом ε невозможно, так как $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ — формы из конечного числа форм, полученных из f_1 и f_2 подстановками g и при достаточно малом ε $f_1-\bar{f}_1 \neq \varepsilon(\bar{f}_2-f_2)$. Форма $f=f_1+\varepsilon f_2$ при достаточно малых значениях ε имеет, следовательно, H своею голоэдрией.

Всякую вообще конечную группу целочисленных матриц, которая, по теореме Машке, представляет собой либо голоэдрию, либо подгруппу голоэдрий, будем называть *арифметической группой*. Арифметическая группа вместе со всеми эквивалентными ей группами составляют так называемый *арифметический класс*. Под термином порядок класса мы будем понимать порядок группы данного арифметического класса.

Если группа $\{A\}$ какого-либо арифметического класса α является подгруппой группы $\{B\}$ некоторого другого арифметического класса β, то и все остальные группы $g_i^{-1}\{A\}g_i$ арифметического класса α являются подгруппами соответствующих им групп $g_i^{-1}\{B\}g_i$ арифметического класса β; поэтому в таком случае мы будем говорить, что арифметический класс α содержится в арифметическом классе β.

Пусть какой-нибудь арифметический класс γ содержится в двух голоэдрических классах (классах Браве), которые мы обозначим через α и β. Это означает, что группа $\{C\}$ арифметического класса γ является одновременно подгруппой групп $\{A\}$ и $\{B\}$ классов Браве α и β. Группа $\{C\}$, следовательно, есть подгруппа общего наибольшего делителя $\{D\}$ групп $\{A\}$ и $\{B\}$, который, в силу упомянутой теоремы, есть голоэдрия. Мы, таким образом, получим класс Браве δ, содержащий группу $\{D\}$, который содержит в себе класс γ и который сам содержится в классах Браве α и β. Если классы Браве α и β различные, но одного и того же порядка, то этот класс Браве δ более низкого порядка. Отсюда следует, что класс Браве наименьшего порядка (напомним, что всех арифметических классов конечное число и что порядки их ограничены), в котором содержится данный арифметический класс γ, является единственным.

Относя каждый арифметический класс к содержащему его классу Браве наименьшего порядка, мы получим разбиение арифметических классов по сингониям. Таким образом, вопрос об арифметических сингониях для n-мерного случая решается совсем просто.

§ 3. О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГОЛОЭДРИЯХ

Вторая теорема Бибербаха показывает, что если группы $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ изоморфны, то арифметические голоэдрии решеток Λ и Λ' целочисленно-эквивалентны. Теперь покажем, что если арифметические голоэдрии H и H' решеток Λ и Λ' целочисленно-эквивалентны, то геометрические голоэдрии Ψ и Ψ' этих решеток одинаковы.

Теорема 2. Пусть дана произвольная совокупность (может быть, и не группа) невырожденных $n\times n$ матриц A, B, . . . и два репера $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, вообще говоря, разной метрики, такие, что как в репере $\mathcal{E}$, так и репере $\mathcal{E}'$ все эти матрицы описывают движения, т. е. обычные повороты этих реперов вокруг их начал. Тогда второй репер можно передвинуть как жесткое целое таким образом, чтобы его начало O' совместилось с началом O первого репера, и затем так его повернуть поворотом первого или второго рода, что движения, записанные каждой из этих матриц в первом и во втором репере, будут уже просто совпадать.

Доказательство. Пусть f и f' — метрические квадратичные формы реперов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$. Из теории квадратичных форм известно, что существует всегда такое линейное невырожденное преобразование переменных с матрицей S, которое одну из этих форм, например f, преобразует в сумму квадратов $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, а вторую — в $\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\ldots+\lambda_nx_n^2$ с положительными коэффициентами λ, каждый из которых запишем как квадрат положительного числа, причем можно считать переменные перенумерованными так, что первые n_1 коэффициентов λ равны a_1^2, следующие n_2 коэффициентов λ равны a_2^2, . . . и последние n_k коэффициентов λ равны a_k^2 (где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$) и, следовательно, $0<a_1<a_2<\ldots<a_k$. Вышесказанное равносильно тому, что преобразование S переводит репер $\mathcal{E}$ в ортонормированный репер $\mathcal{E}''$, а репер $\mathcal{E}'$ — в прямоугольный репер $\mathcal{E}'''$, длины первых n_1 векторов которого самые короткие и равны a_1, длины n_2 вторых по длине векторов равны $a_2, \ldots$, длины последних n_k векторов самые большие и равны a_k. Матрицы $A'=S^{-1}AS$, $B'=S^{-1}BS$, . . . записывают те же движения, но уже в реперах $\mathcal{E}''$ и $\mathcal{E}'''$. Однако поскольку репер $\mathcal{E}''$ — ортонормированный, то матрицы A', B', . . . — ортогональны. Очевидно, что преобразование с диагональной матрицей D, первые n_1 диагональных элементов которой равны a_1, следующие n_2 диагональных элементов которой равны a_2, . . ., последние n_k диагональных элементов которой равны a_k, преобразует репер $\mathcal{E}'''$ в уже ортонормированный репер $\mathcal{E}^*$. В репере $\mathcal{E}^*$ движения, которые записывались в репере $\mathcal{E}'''$ матрицами A', B', . . ., будут записываться матрицами $D^{-1}A'D$, $D^{-1}B'D$, . . . Вновь получившиеся матрицы также ортогональны, так как они записывают дви-

жения в ортонормированном репере. Используя последовательно, что как у матриц A', B', ..., так и у соответствующих матриц $D^{-1}A'D$, $D^{-1}B'D$, ... сумма квадратов элементов строки (столбца) равна единице, и используя неравенства $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ для элементов диагональной матрицы D, без труда показываем, что матрицы A', B', ... — клеточно-диагональные с $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, ..., $n_k \times n_k$-матрицами по диагонали и что $D^{-1}A'D = A'$, $D^{-1}B'D = B'$, ... Этим завершается доказательство теоремы, так как теперь и те и другие движения записываются одними и теми же матрицами в двух уже ортонормированных реперах $\mathcal{E}''$ и $\mathcal{E}^*$.

Определение. Две голоэдрии будем называть геометрически одинаковыми, если существует такое движение первого или второго рода, что если на него умножить все движения 2-й голоэдрии, то в точности получаются движения 1-й голоэдрии.

Одна и та же группа матриц, описывающая группы поворотов в некоторых реперах, вообще говоря, различной метрики, задает одинаковые геометрические точечные группы поворотов.

Если полные группы $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ движений, совмещающих решетки Λ и Λ' с собой, изоморфны, то, по второй теореме Бибербаха, арифметические голоэдрии H и H' этих решеток целочисленно-эквивалентны, т. е. они могут быть записаны одной и той же группой матриц, и поэтому, в силу последней теоремы голоэдрии решеток Λ и Λ', геометрически одинаковы. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как решетки с одинаковыми геометрическими голоэдриями могут обладать неизоморфными полными группами совмещений их с собой.

В следующем параграфе устанавливаются необходимые и достаточные условия, налагаемые на полные группы $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ совмещений решеток Λ и Λ' с собой, при которых геометрические голоэдрии Ψ и Ψ' этих решеток одинаковы.

§ 4. К ВЫВОДУ ТИПОВ БРАВЕ РЕШЕТОК ПРИ ПОМОЩИ ЦЕНТРИРОВОК

Следующая теорема показывает, как связаны между собой полные группы решеток, имеющих одинаковые геометрические голоэдрии [33, 34].

Теорема 3. Для того чтобы геометрические голоэдрии Ψ и Ψ' решеток Λ и Λ' были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы существовала подгруппа $\{h\}$ полной группы $\{\Gamma\}$ решетки Λ, изоморфная полной группе $\{\Gamma'\}$ решетки Λ', и подгруппа $\{h'\}$ группы $\{\Gamma'\}$, — изоморфная группе $\{\Gamma\}$.

Необходимость. Пусть геометрические голоэдрии Ψ и Ψ' решетки Λ и Λ' одинаковы. Расположим решетки Λ и Λ' в пространстве так, чтобы их геометрические голоэдрии просто совпали, вернее, совместим движением 1 или 2-го рода голоэдрии этих решеток. Пусть в каком-либо основном репере

$\mathscr{E}$ решетки Λ повороты этой голоэдрии записываются целочисленными унимодулярными матрицами E, A, B, . . ., а в каком-либо основном репере $\mathscr{E}'$ решетки Λ' — целочисленными унимодулярными матрицами E, A', B', ... Но как те, как и другие матрицы описывают соответственно одни и те же движения, поэтому

$$A' = S_0^{-1} A S_0,\ \ B' = S_0^{-1} B S_0, \ldots,$$

где S_0 — матрица преобразования, переводящего репер $\mathscr{E}$ в репер $\mathscr{E}'$. Элементы матрицы S_0 (вообще говоря, иррациональные) дают некоторое частное решение системы линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered} SA' = AS, \\ SB' = BS, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered} \tag{1}$$

с n^2 неизвестными. Покажем, что существует целочисленная невырожденная матрица S, удовлетворяющая этой системе (1).

Действительно, в силу теоремы Кронекера—Капелли, получится, что некоторые m неизвестных элементов матрицы S остаются произвольными, а остальные $n^2 - m$ выражаются через них линейно, причем с рациональными коэффициентами, так как матрицы A, A', B, B', . . . целочисленны. Если элементы матрицы S_0 иррациональны, то m независимым элементам матрицы S дадим рациональные значения, достаточно близкие к значениям соответствующих элементов S_0 (чтобы меньше изменилось значение определителя матрицы). Тогда все элементы S будут рациональны и S будет невырожденной. Умножая все элементы полученной матрицы S на их общий знаменатель, получим целочисленную невырожденную матрицу S_1, удовлетворяющую системе (1).

Целочисленное преобразование с матрицей S_1 примем за переход от репера $\mathscr{E}$ к, может быть, не основному реперу $\mathscr{E}_1$ в решетке Λ. Повороты голоэдрии решетки Λ в репере $\mathscr{E}_1$, очевидно, запишутся матрицами E, A', B', . . ., а так как эти матрицы целочисленные и унимодулярные, то подрешетка Λ_1 решетки Λ, построенная на репере $\mathscr{E}_1$, при всех поворотах совмещается с собой. Отсюда следует, что решетка Λ_1 обладает группой $\{h\}$ (может быть, не полной группой решетки Λ_1), все движения которой записываются теми же формулами, что и движения группы $\{\Gamma'\}$. Таким образом, мы получаем $\{\Gamma'\} \sim \{h\} \in \{\Gamma\}$. Аналогично доказывается существование такой группы $\{h'\}$, что $\{\Gamma\} \sim \{h'\} \in \{\Gamma'\}$.

Достаточность. Пусть существуют такие группы $\{h\}$ и $\{h'\}$, что $\{\Gamma\} \sim \{h'\} \in \{\Gamma'\}$ и $\{\Gamma'\} \sim \{h\} \in \{\Gamma\}$. Требуется доказать, что геометрические голоэдрии Ψ и Ψ' одинаковы. Так как $\{\Gamma\} \sim \{h'\}$, то, по теореме Бибербаха (§ 1), точечные подгруппы Ψ и Φ' этих групп, записанные в соответствующих по изоморфизму реперах, арифметически одинаковы, а по теореме 2 — они

геометрически одинаковы. Кроме того, из данных теорем для точечных групп имеем $\Psi \sim \Phi' \in \Psi'$ и $\Psi' \sim \Phi \in \Psi$, но так как точечные группы конечны, то мы получаем, что $\Psi \sim \Psi'$ и группы Φ' и Ψ' просто совпадают. Следовательно, Ψ и Ψ' одинаковы. Теорема доказана.

Эта теорема дает абстрактную характеристику принадлежности двух решеток к одной и той же голоэдрии.

Можно привести и другую, арифметическую характеристику. А именно: для того чтобы две решетки обладали одинаковыми геометрическими голоэдриями, необходимо и достаточно, чтобы арифметические голоэдрии этих решеток были рационально-эквивалентны. Действительно, из эквивалентности (даже не обязательно рациональной) голоэдрий следует, что они могут быть записаны одной и той же группой матриц, и, следовательно, по теореме 2, эти голоэдрии геометрически одинаковы. Наоборот, если голоэдрии геометрически одинаковы, то они (см. доказательство необходимости теоремы 3) рационально-эквивалентны.

Метрические квадратичные формы основных реперов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ решетки Λ и ее подрешетки Λ_1, рассматриваемых выше при доказательстве необходимости теоремы, обладают, соответственно, группами автоморфизмов $\{\Gamma\} = \{E, A, B, \ldots,\}$ и $\{\Gamma'\} = \{E, A', B', \ldots\}$. Более того, если взять любую положительную квадратичную форму f, которая обладает группой автоморфизмов $\{\Gamma\}$, то квадратичная форма f', получающаяся из f с помощью целочисленной подстановки с матрицей S_1 (задающей связь между рассматриваемыми реперами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$), обладает группой автоморфизмов $\{\Gamma'\}$, и, наоборот, если f' обладает группой автоморфизмов $\{\Gamma'\}$, то f' получается целочисленной подстановкой S_1 из некоторой формы f, обладающей группой $\{\Gamma\}$.

Рассмотрим нормализатор N_Ψ голоэдрии Ψ решетки Λ в группе всех центроаффинных преобразований. Реперы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ при преобразовании из N_Ψ, очевидно, преобразуются во все возможные реперы, метрические квадратичные формы которых обладают, соответственно, группами автоморфизмов $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$.

В тех случаях, когда метрические квадратичные формы основных реперов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ решетки Λ и ее подрешетки Λ_1 одновременно имеют $\{\Gamma\}$ и $\{\Gamma'\}$ своими полными группами автоморфизмов, решетка Λ является центрировкой решетки Λ_1 в кристаллографическом смысле.

Таким образом, если арифметические голоэдрии двух решеток целочисленно-эквивалентны, то такие решетки принадлежат одному и тому же типу Браве. Если же арифметические голоэдрии двух решеток рационально-эквивалентны, но целочисленно — неэквивалентны, то такие решетки принадлежат различным типам Браве, причем решетки таких типов получаются друг из друга при помощи центрировок.

Вопрос о том, какая решетка является простой (примитивной), а какие являются ее центрировками, достаточно сложен. Так, например, n-мерные решетки, матрицы метрических квадратичных форм основных реперов которых пропорциональны соответственно матрицам

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & n & \ldots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

принадлежат при $n > 2$ разным типам Браве и обладают одинаковыми геометрическими голоэдриями, так как взаимные решетки, очевидно, обладают одинаковыми геометрическими голоэдриями. К векторам решетки первого типа Браве (соответствующего первой матрице) прибавим вектор $\frac{1}{n+1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \ldots \mathbf{e}_n)$, не принадлежащий этой решетке, а на полученной совокупности векторов построим другую решетку.

Новая решетка, очевидно, принадлежит второму типу Браве и получается из первой прибавлением к ней новых узлов с координатами

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right), \left(\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{2}{n+1}\right), \ldots$$
$$\ldots, \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right)$$

относительно рассматриваемого ее основного репера. Решетка же первого типа может быть получена из решетки второго типа гораздо более сложным прибавлением к ней новых узлов. Далее, в решетке первого типа количество кратчайших (по модулю) векторов равно $n\,(n+1)$, а в решетке второго типа — всего лишь $2\,(n+1)$. Любой кратчайший вектор и в той и в другой решетке поворотом из голоэдрии можно перевести в любой другой кратчайший вектор решетки. Следовательно, решетка второго типа проще связана с голоэдрией, так как проще выписываются матрицы поворотов голоэдрии в рассматриваемом ее основном репере.

Пусть в n-мерном пространстве нет других типов Браве решеток с рассматриваемой выше геометрической голоэдрией. Это будет, например, при $n=4$. Трудно сказать, какую из описанных решеток считать примитивной, а какую центрированной. Если не обращать внимания на возможно более простую связь решетки с голоэдрией и на то, из какой решетки другие получаются более простыми метрическими центрировками (более просто описываются вновь прибавляемые узлы), то, собственно, любую из решеток, обладающих одинаковыми геометрическими голоэдриями, можно было бы назвать *примитивной*, а все остальные (с неизоморфными полными группами) — ее *центрировками* в кристаллографическом смысле.

§ 5. ОБ ЭНАНТИОМОРФНЫХ РЕШЕТКАХ

Как известно, существует всего 219 абстрактно неизоморфных трехмерных федоровских групп. Однако в кристаллографии различают 230 федоровских групп ввиду существования так называемых энантио-

морфных пар. Обратимся теперь к вопросу, бывают ли в каком-нибудь измерении энантиоморфные геометрические голоэдрии, т. е. бывают ли энантиоморфные типы Браве решеток [33].

Пусть Ψ — любая точечная группа. Если нормализатор N_Ψ группы Ψ в группе всех движений содержит движение второго рода, то повороты этой группы могут быть записаны одними и теми же матрицами в реперах различной ориентации и наоборот. Действительно, пусть в некотором репере $\mathcal{E}$ повороты группы Ψ записываются матрицами E, A, B, ... и пусть C — движение второго рода из нормализатора. Движение C переводит репер $\mathcal{E}$ в обратной с ним ориентации репер $\mathcal{E}'$. В репере $\mathcal{E}'$ повороты рассматриваемой группы Ψ будут записываться матрицами E, $C^{-1}AC$, $C^{-1}BC$, ..., а так как C принадлежит нормализатору, то эти матрицы совпадают с предыдущими. Следовательно, повороты группы Ψ в реперах различной ориентации записываются одинаковыми матрицами. Аналогично показывается обратное.

В нечетномерном пространстве нормализатор любой точечной группы содержит поворот второго рода, например отражение в точке, и поэтому в нечетномерных пространствах не существует энантиоморфных пар точечных групп. Легко видеть, что для $n=2$ также нет энантиоморфных точечных групп.

Покажем, что в 4-мерном пространстве существуют энантиоморфные геометрические голоэдрии.

Рассмотрим решетку, построенную на репере $\mathcal{E}=\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, для которого форма $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{11}x_3^2+2a_{12}x_3x_4+a_{22}x_4^2$ является метрической квадратичной формой. Пусть для простоты $0<2a_{12}<a_{11}<$ $<a_{22}<2a_{11}$. В таком случае (1, 0, 0, 0), (—1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0) и (0, 0, —1, 0) — все представления минимума a_{11} этой формы, а (0, 1, 0, 0), (0, —1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) и (0, 0, 0, —1) — все представления второго последовательного минимума a_{22} этой формы. При повороте решетки вокруг O минимум (кратчайший вектор) решетки переходит в минимум, а второй последовательный минимум переходит во второй последовательный минимум. Поэтому легко убедиться, что голоэдрия этой решетки записывается матрицами

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

В этой группе матриц только две матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

являются матрицами четвертого порядка, и описываемые ими повороты, очевидно, геометрически одинаковы.

Для того чтобы поворот C с матрицей C принадлежал нормализатору рассматриваемой выше группы, очевидно, должно выполняться одно из двух условий:

$$\text{либо } C^{-1}AC=A, \text{ либо } C^{-1}AC=B,$$

и поэтому матрица C, как легко установить, должна, соответственно, иметь вид:

$$\begin{pmatrix}a&e&-c&-g\\b&f&-d&-h\\c&g&a&e\\d&h&b&f\end{pmatrix}\quad\text{либо}\quad\begin{pmatrix}a&e&c&g\\b&f&d&h\\c&g&-a&-e\\d&h&-b&-f\end{pmatrix}.$$

В обоих случаях определитель матрицы C равен

$$(af+dg-ch-be)^2+(de+bg-ah-cf)^2.$$

Следовательно, поворот C не может быть поворотом второго рода. Повороты рассматриваемой группы могут быть записаны приведенными выше матрицами только в реперах одинаковой ориентации, такой, как у исходного репера $\mathcal{E}=\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Таким образом, рассматриваемая решетка и решетка, получающаяся из нее отражением от какой-либо гиперплоскости (т. е. движением второго рода), являясь решетками, построенными на реперах различной ориентации, но с одной и той же метрической квадратичной формой, образуют энантиоморфную пару одного и того же типа Браве.

ЧАСТЬ III

N-МЕРНЫЙ МЕТОД В ИССЛЕДОВАНИИ n-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

Глава 7

ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

§ 1. КОНУС K ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Рассмотрим $N=\frac{n(n+1)}{2}$-мерное евклидово пространство R^N и в нем обычную ортогональную систему координат. Оси координат и координаты точек относительно них обозначим через

$$\nu_{11},\ \nu_{22},\ \ldots,\ \nu_{nn},\ \nu_{12},\ \nu_{13},\ \ldots,\ \nu_{n-1,\,n}.$$

Каждой точке $(a_{ik})=(a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{n-1,\,n})$ этого пространства найдем соответствующую форму

$$f=\sum a_{ik}x_ix_k=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

Через K обозначим множество всех точек пространства R^N, которым отвечают положительные квадратичные формы, т. е. метрические квадратичные формы реперов.

Теорема 1. Множество K есть неограниченное коническое выпуклое открытое множество, которое будем называть к о н у с о м K.

Доказательство. Пусть точка (a_{ik}) принадлежит множеству K. Тогда форма $f=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ положительна. Если t — любое положительное число, то форма tf также положительна. Следовательно, любая точка луча ta_{ik} также принадлежит множеству K, т. е. множество K есть конус с вершиной в точке 0.

Пусть далее (a_{ik}) и (b_{ik}) — две какие-либо точки конуса K. Им отвечают положительные квадратичные формы $f_1=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ и $f_2=\Sigma b_{ik}x_ix_k$. Если λ и μ — любые положительные числа, сумма которых равна 1, то форма $\lambda f_1+\mu f_2$ также положительна, а это означает, что вместе с точками (a_{ik}) и (b_{ik}) конусу K принадлежат и все точки соединяющего их отрезка, т. е. что конус K выпуклый.

Для того чтобы точка (a_{ik}) принадлежала конусу K, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись строгие неравенства Сильвестра (см. § 2 гл. 5), ввиду чего конус K является открытым, Замыкание $\overline{K}$ конуса K задается не строгими неравенствами Сильвестра, а граница $\dot{K}$ конуса K задается теми же не строгими неравенствами, кроме последнего, которое пишется как равенство.

§ 2. ГРУППА $\{G\}$ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОНУСА K

Пусть g $n \times n$ — целочисленная унимодулярная матрица, а $\{g\}$ — группа всех таких матриц. Некоторый основной репер решетки g преобразует в другой основной репер той же решетки. Поэтому все точки конуса K, соответствующие основным реперам одной и той же решетки, получаются из какой-либо одной из них всеми элементами группы $\{g\}$, а точки, соответствующие основным реперам из различных решеток, — это точки, которые не переводятся друг в друга этой группой. Формы, соответствующие различным основным реперам одной и той же решетки, называются эквивалентными.

Рассмотрим преобразование G, порожденное произвольным преобразованием $g \in \{g\}$. Преобразование G имеет целочисленную матрицу. Преобразование G^{-1}, задаваемое преобразованием g^{-1}, также имеет целочисленную матрицу. Таким образом, матрицы взаимно-обратных преобразований целочисленны, следовательно, они имеют одинаковый определитель, равный $+1$ или -1, т. е. преобразование G целочисленно и унимодулярно (эквиаффинно). Но G, в отличие от g, уже не произвольное целочисленное унимодулярное преобразование. Преобразования G образуют некоторую дискретную группу $\{G\}$ эквиаффинных преобразований конуса K в себя. Можно показать, что $\{G\}$ есть группа всех целочисленных унимодулярных преобразований, преобразующих конус K в себя. Таким образом, $\{G\}$ — это те аффинные преобразования нашего N-мерного пространства, которые одновременно преобразуют и конус K и решетку целочисленных квадратичных форм в себя. Группа $\{G\}$ называется группой эквивалентности конуса K.

Фундаментальной областью группы $\{G\}$ является такая совокупность точек конуса K, что никакие две из них не эквивалентны по отношению к группе $\{G\}$ и всякая точка конуса K эквивалентна одной из точек этой совокупности. Рассмотрим только такие фундаментальные области группы $\{G\}$, которые содержат вместе с точкой f и все ей пропорциональные точки конуса K, т. е. весь луч конуса K, проходящий через эту точку, т. е. рассмотрим лишь конические с вершиной в точке O фундаментальные области. Это естественно, потому что любое преобразование $G \in \{G\}$ переводит каждый луч конуса K снова в луч конуса K.

Дискретность группы G, т. е. существование такой точки, для которой все G-эквивалентные ей точки лежат на расстоянии от нее, превосходящем некоторую фиксированную константу, легко доказать, например, для точки $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$.

Фундаментальную область группы $\{G\}$ можно выбирать весьма многими способами. В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые фундаментальные области, либо случай, когда фундаментальная область будет состоять из конечного числа выпуклых областей.

Если выбрать какую-нибудь фундаментальную область группы $\{G\}$ и подвергнуть ее всем преобразованиям G, то получаются фундаменталь-

ные области, эквивалентные выбранной. Эти области по самому их определению попарно не имеют общих внутренних точек и в совокупности заполняют весь конус K. Разбиение конуса K на эти области называется

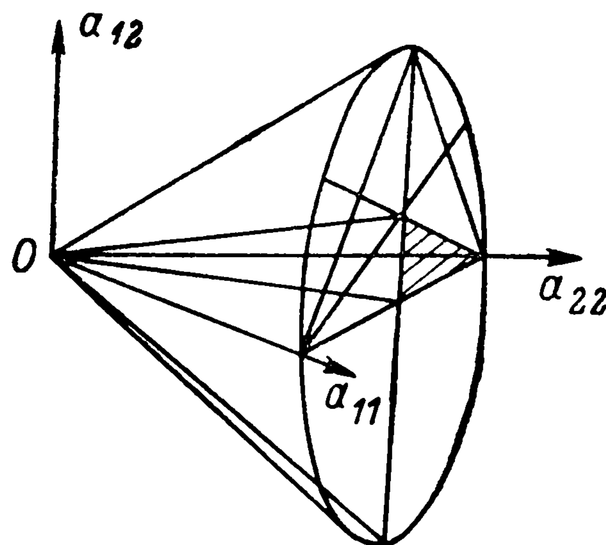


Рис. 19.

разбиением приведения. Для $n=2$ такими областями являются бесконечные треугольные голоэдрии (рис. 19). Для $n \geqslant 3$ существует уже континуум разных разбиений приведения на выпуклые фундаментальные области, ограниченные конечным числом граней.

§ 3. МНОГООБРАЗИЯ БРАВЕ

Пусть задана произвольная конечная группа H целочисленных унимодулярных матриц. Рассмотрим множество всех тех квадратичных форм $f=\Sigma a_{ik}x_ix_k$, которые преобразуются в себя всеми матрицами группы H (не уточняя пока положительные эти формы или неопределенные).

Так как квадратичная форма $f=\Sigma a_{ik}x_ix_k$ при преобразовании матрицей g переходит в квадратичную форму с коэффициентами $a'_{ik}=\sum\limits_{l,\, m=1}^{n} a_{lm}g_{li}g_{mk}$, то если g преобразует форму f в себя, получим равенства

$$\sum_{l,\, m=1}^{n} a_{lm}g_{li}g_{mk}=a_{ik}.$$

Здесь получается $\frac{n(n+1)}{2}$ линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_{ik} формы f. Если форма f преобразуется в себя любым преобразованием группы матриц h-го порядка, то получим $h\frac{n(n+1)}{2}$ линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_{ik}. По теореме Кронекера—Капелли, часть этих коэффициентов, скажем m, остается произвольной, а остальные коэффициенты линейно выражаются через них по формулам Крамера. Поэтому в пространстве

коэффициентов квадратичных форм получается линейное многообразие. Это полное линейное многообразие m-мерно (где $1 \leqslant m \leqslant N$) и проходит через вершину O конуса K.

Но, по теореме Машке, для всякой конечной группы матриц существует положительная квадратичная форма, которая преобразуется в себя всеми матрицами этой группы. Поэтому рассматриваемое выше линейное многообразие всегда пересекает конус положительных форм. Это пересечение назовем многообразием Браве, отвечающим данной группе H, и обозначим через $\mathfrak{B}_H$ [35].

Таким образом, многообразие Браве $\mathfrak{B}_H$ есть совокупность всех тех точек конуса K, каждая из которых преобразуется в себя той конечной подгруппой группы эквивалентности $\{G\}$, которая индуцируется рассматриваемой группой H.

Пусть $g^{-1}Hg$ — группа, эквивалентная группе H. Многообразие Браве $\mathfrak{B}_{g^{-1}Hg}$, соответствующее группе $g^{-1}Hg$, будем называть эквивалентным многообразию $\mathfrak{B}_H$. Оно, очевидно, получается из $\mathfrak{B}_H$ в N-мерном пространстве E^N аффинным преобразованием G.

Пусть H_1 и H_2 — две произвольные конечные группы целочисленных унимодулярных матриц, а $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — соответствующие им многообразия Браве.

Каждая матрица как группы H_1, так и группы H_2, а следовательно, и каждая матрица минимальной группы H, содержащей H_1 и H_2 как свои подгруппы, индуцирует преобразование пространства коэффициентов квадратичных форм в себя, оставляющее на месте каждую точку пересечения соответственных полных линейных многообразий неподвижных точек для групп H_1 и H_2. Группа H не оставляет на месте никаких других точек, кроме рассматриваемого пересечения.

Рассматриваемое пересечение не пусто и состоит, по крайней мере, из одной точки O. Однако может случиться, что это пересечение не имеет точек внутри конуса K, т. е. сами многообразия Браве $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ не пересекаются. В таком случае группа H не может быть конечной. Если же многообразия Браве $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ пересекаются, то группа H, очевидно, конечна и соответствующее ей многообразие Браве совпадает с пересечением $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$.

Пусть двум различным группам H_1 и H_2 отвечает одно и то же многообразие Браве $\mathfrak{B}$. Тогда минимальной группе H, содержащей H_1 и H_2 как свои подгруппы, отвечает это же многообразие Браве $\mathfrak{B}$. Группа наибольшего порядка, которой отвечает данное многообразие Браве $\mathfrak{B}$, очевидно, единственна. Ее обозначим через $H(\mathfrak{B})$ и назовем группой многообразия Браве $\mathfrak{B}$.

Пусть какая-либо конечная группа H' целочисленных унимодулярных матриц содержит группу $H(\mathfrak{B})$ как свою собственную подгруппу. Тогда соответствующее ей многообразие Браве $\mathfrak{B}'$ вложено в многообразие Браве $\mathfrak{B}$ как собственная его часть. Действительно, из вложения $H(\mathfrak{B}) \subset H'$ групп, очевидно, следует обратное включение отвечающих этим группам полных линейных многообразий неподвижных точек в пространстве

коэффициентов квадратичных форм, и если бы эти линейные многообразия были одинаковой размерности, то они совпадали бы, и в таком случае $H(\mathfrak{B})$ не была бы наибольшей группой, которой отвечает многообразие Браве $\mathfrak{B}$. Таким образом, многообразие Браве $\mathfrak{B}'$ имеет более низкую размерность, чем многообразие Браве $\mathfrak{B}$, и содержится в последнем как подмногообразное.

Теорема 1. Для любого многообразия Браве $\mathfrak{B}$ группа $H(\mathfrak{B})$ есть арифметическая голоэдрия и, наоборот, каждая арифметическая голоэдрия есть группа некоторого многообразия Браве.

Доказательство. Рассмотрим множество точек, принадлежащих многообразию $\mathfrak{B}$, которые обладают более высокой группой, чем $H(\mathfrak{B})$. Такие точки располагаются на многообразиях Браве меньшей размерности, вложенных в многообразие $\mathfrak{B}$. Поскольку множество всех конечных групп целочисленных матриц счетно, счетно и множество многообразий Браве, порожденных ими. Следовательно, никакое многообразие Браве, в том числе и многообразие $\mathfrak{B}$, не может исчерпываться многообразиями Браве меньшей размерности, т. е. на многообразии $\mathfrak{B}$ найдется бесконечное множество точек, для которых группа $H(\mathfrak{B})$ есть арифметическая голоэдрия. Наоборот, если H является арифметической голоэдрией, то это означает, что существует хотя одна положительная квадратичная форма, которая преобразуется в себя всеми матрицами группы H и никакими другими. Отсюда, очевидно, получаем, что $H(\mathfrak{B}_H)=H$ [31].

Рассмотрим произвольное многообразие Браве $\mathfrak{B}$ и исключим из него все точки, имеющие более высокую группу, чем группа $H(\mathfrak{B})$. Полученную совокупность точек назовем очищенным многообразием Браве.

Две решетки относятся к одному и тому же типу Браве, если у них найдутся основные реперы, метрические формы которых (как точки в пространстве коэффициентов форм) принадлежат одному и тому же очищенному многообразию Браве. Это следует из того, что у обеих решеток при этом существуют основные реперы, в которых голоэдрия записывается одной и той же группой H.

В теории многообразий Браве особо просто и геометрически наглядно выглядит также вопрос о распределении арифметических классов по сингониям, рассмотренный в § 2 гл. 6. А именно, все те арифметические группы, которым соответствует одно и то же многообразие Браве, отвечающее какой-то данной арифметической голоэдрии, относятся к сингонии данной арифметической голоэдрии. Отсюда, в частности, следует, что одна и та же арифметическая группа не может относиться к сингониям разных голоэдрий. Действительно, она порождает одно вполне определенное многообразие Браве и поэтому относится к сингонии ее голоэдрии.

Приведем табл. 5 распределения 73 арифметических классов по 14 сингониям для случая $n=3$. В данной таблице арифметические классы обозначены индексами соответствующих им симморфных федоровских групп [36].

Таблица 5

№ сингонии	Индекс голоэдрии	Индексы арифметических классов
1	$P\bar{1}$	$P1$
2	$P2/m$	$P2$, Pm
3	$Pmmm$	$P222$, $Pmm2$
4	$R\bar{3}m$	$R32$, $R3m$, $R\bar{3}$, $R3$
5	$P4/mmm$	$P422$, $P4mm$, $P\bar{4}2m$, $P\bar{4}m2$, $P4/m$, $P\bar{4}$, $P4$
6	$Pm3m$	$P432$, $P\bar{4}3m$, $Pm3$, $P23$
7	$Fmmm$	$F222$, $Fmm2$
8	$Fm3m$	$F432$, $F\bar{4}3m$, $Fm3$, $F23$
9	$Immm$	$I222$, $Imm2$
10	$I4/mmm$	$I422$, $I\bar{4}2m$, $I\bar{4}m2$, $I4mm$, $I4/m$, $I\bar{4}$, $I4$
11	$Im3m$	$I432$, $I\bar{4}32$, $Im2$, $I23$
12	$C2/m$	$C2$, Cm
13	$Cmmm$	$C2mm$, $Cmm2$, $C222$
14	$P6/mmm$	$P622$, $P\bar{6}2m$, $P\bar{6}m2$, $P6mm$, $P6/m$, $P\bar{6}$, $P6$, $P\bar{3}1m$, $P\bar{3}m1$, $P3m1$, $P312$, $P321$, $P\bar{3}$, $P3$, $P31m$

Глава 8

ПРИМЕНЕНИЕ G-ИНВАРИАНТНЫХ РАЗБИЕНИЙ $\{Q\}$ КОНУСА K К ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ И К РАЗЫСКАНИЮ ТИПОВ БРАВЕ n-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

§ 1. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

Геометрической кристаллографией можно считать все то, что математически следует из правильности структуры монокристалла. Большинство из этих следствий, как было показано выше, тесно связаны с теорией конечных групп целочисленных матриц, что впервые было подчеркнуто Бибербахом [32] и Фробениусом [37]. Такой подход особенно необходим при переходе от 3-мерной к n-мерной кристаллографии, в которой уже трудно обходиться элементарными геометрическими методами, давшими построение 3-мерной геометрической кристаллографии.

Следует подчеркнуть, что не все вопросы геометрической кристаллографии сводятся к использованию конечных групп n-мерных целочисленных матриц. Таков, например, вопрос о простых формах [38].

В теории конечных групп целочисленных матриц имеются следующие две основные задачи:

а) как вообще найти все неэквивалентные конечные группы целочисленных матриц для данного измерения n (неэквивалентные арифметические группы);

б) как выделить среди них те, которые суть арифметические голоэдрии.

Если уже найдены представители всех арифметических классов, то, как это показал Цассенхауз [2, 36], непосредственно можно вычислить все федоровские группы для данного числа измерений.

В настоящее время для решения первой задачи существует два способа. Первый способ состоит в использовании максимальных групп. По теореме Жордана, неэквивалентных арифметических групп конечное число. Следовательно, среди них можно выделить такие группы, которые не являются подгруппами других таких групп. Эти группы называются максимальными. Для $n=3$ их четыре: три группы целочисленных матриц, записывающих точечную кубическую группу в основных реперах примитивной, гранецентрированной и объемно-центрированной кубических решеток, а также четвертая группа, записывающая точечную гексагональную группу в основном репере гексагональной решетки.

Имея максимальные группы и комбинируя их матрицы между собой, можно найти все их подгруппы, причем некоторые из них могут оказаться целочисленно-эквивалентными, и тогда из каждой системы таких эквивалентных групп надо взять только одну.

Для $n=3$ насчитывается 73 попарно-неэквивалентные конечные группы целочисленных матриц, но они были найдены не как подгруппы максимальных, а из того соображения, что геометрических классов 32 и некоторые из них могут соответствовать решеткам различных типов Браве. Так получается 66 арифметических классов. Но некоторые из геометрических классов могут иметь еще различные установки и поэтому окончательно получается 73.

Все максимальные группы для $n=4$ впервые были найдены в довольно трудной работе Дейде [39]. Их оказалось 9. Немецкие математики Нойбюсер и Бюлов и кристаллограф Вондрачек нашли все попарно-неэквивалентные 4-мерные конечные группы целочисленных матриц, непосредственно разыскивая все подгруппы 9 максимальных групп Дейде и отбрасывая эквивалентные [3—5]. Их обширные вычисления на больших электронных машинах дали число 710, которое, по-видимому, можно считать окончательным.

Второй способ, который в основном и будет рассматриваться в дальнейшем, заключается в использовании G-инвариантных разбиений $\{Q\}$ N-мерного конуса K положительных квадратичных форм с n переменными. Среди полных групп неэквивалентных граней всех измерений какого-либо разбиения $\{Q\}$ в частности содержатся и все максимальные группы.

Исследуя совершенное разбиение Вороного [40], являющееся одним из $\{Q\}$-разбиений, С. С. Рышков нашел все неэквивалентные максималь-

ные 5-мерные группы. Их оказалось 17. Этот результат, несомненно, является важным достижением [41].

Для решения второй задачи, т. е. разыскания всех n-мерных голоэдрий (типов Браве) *a priori*, также имеется два метода. Первый метод заключается в использовании многообразий Браве [35]. Он был применен по совету Цассенхауза Нойбюсером, Бюловым и Вондрачеком для разыскания всех 4-мерных типов Браве. Немецкие ученые пишут [4]: «Для того чтобы выделить все классы Браве из всех вообще арифметических классов (а эти 710 классов были найдены ранее указанным способом), мы выводим из определения, данного нами в первой статье, другую характеристику классов Браве, предложенную Цассенхаузом».

Характеристика эта состоит в следующем. Пусть H — некоторая конечная группа n-мерных целочисленных матриц и Ω (H) — многообразие Браве этой группы (здесь введены обозначения H, Ω, G, Y из [4], а название многообразия Браве было нами введено в [35]), т. е. Ω — совокупность всех точек конуса K, которая переходит в себя теми N-мерными преобразованиями группы $\{G\}$ эквивалентности конуса K в себя, которые индуцируются конечной группой H n-мерных целочисленных матриц. Как показано в [35], многообразие Браве линейно и проходит через вершину конуса K. Пусть теперь Y совсем произвольное линейное многообразие того или иного измерения, проходящее через вершину конуса и $G\,(Y)$-совокупность всех тех преобразований группы $\{G\}$ эквивалентности, которые преобразуют Y поточечно в себя. В силу рассмотренных выше свойств многообразия Браве, группа H будет арифметической голоэдрией, очевидно, тогда и только тогда, когда она суть полная подгруппа группы $\{G\}$ поточечного преобразования в себя рассматриваемого многообразия Браве. Немецкие ученые пишут [4]: «Это есть характеристика, которую мы можем использовать, имея наши данные». Легко построить линейные многообразия Браве для любой данной группы H, как было указано выше. Но, продолжают авторы: «. . . гораздо труднее найти $G\,(Y)$, если Y дано системой линейных уравнений. Однако, используя все, что было найдено при помощи вычислительных машин, мы можем избегнуть трудных вычислений при помощи способа, описанного в § 4».

В этом параграфе работы немецких ученых описывается программа, дающая нужные результаты. Но отмечается, что это описание есть лишь упрощенное изложение той действительной программы, которая применялась. Благодаря этому способу немецкие ученые убедились, что существует 64 различных 4-мерных типа Браве.

Надо сказать, что предлагаемый ниже второй способ для решения второй задачи, основанный на рассмотрении абсолютных граней разбиения $\{Q\}$, теоретически является, может быть, более совершенным, чем способ, предложенный Цассенхаузом. Однако окончательный результат для $n=4$ пока получили все же немецкие ученые.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗБИЕНИЯ $\{Q\}$ КОНУСА K

Следуя Е. С. Федорову, гоноэдром будем называть бесконечный замкнутый многогранный угол, а выпуклым гоноэдром — выпуклый такой угол. Разбиением конуса K на выпуклые гоноэдрии будем называть такое разрезание всего конуса K на выпуклые гоноэдры, имеющие свои вершины в вершине O конуса K, при котором никакие два гоноэдра не имеют общих внутренних точек.

Разбиение называется нормальным, если его гоноэдры смежны по целым N—1-мерным граням. Не будем предполагать разбиение непременно нормальным, т. е. допускаем, что по некоторым N — 1-мерным граням гоноэдра с ним смежны своими N — 1-мерными гранями несколько других гоноэдров.

В случае ненормального разбиения мы будем называть гранью разбиения (разбиения, а не гоноэдра), содержащей данную внутреннюю точку f конуса K, полное пересечение всех тех гоноэдров Q разбиения, которым принадлежит эта точка. Это пересечение, очевидно, будет тоже выпуклым гоноэдром того или иного низшего измерения с конечным числом граней.

Через $\{Q\}$ обозначим весьма важные разбиения конуса K на N-мерные выпуклые гоноэдры, определяемые следующими четырьмя условиями.

1. Число граней разбиения всех измерений, принадлежащих каждому отдельному гоноэдру Q, конечно.

2. В грани любого измерения разбиения $\{Q\}$, если она вся не лежит на границе конуса K, т. е. у нее имеются и внутренние по отношению к конусу K точки, сходится лишь конечное число гоноэдров Q.

3. Разбиение $\{Q\}$ G-инвариантно, т. е. любое преобразование группы эквивалентности G преобразует его в себя.

4. Число G — неэквивалентных гоноэдров Q разбиения конечно.

Такими являются, например, разбиения на гоноэдры приведения $V(\varphi)$ Венкова для любой исходной формы φ [42], разбиения на фундаментальные гоноэдры Минковского [27], на совершенные гоноэдры Вороного [40], гоноэдры типов Вороного [12], гоноэдры C-типов, недавно введенные Е. П. Барановским и С. С. Рышковым.

§ 3. О КОНЕЧНОСТИ ПОЛНЫХ ГРУПП ГРАНЕЙ ЛЮБОГО ИЗМЕРЕНИЯ РАЗБИЕНИЯ $\{Q\}$

Можно показать, что из 1, 2, 3 условий разбиения следует, что полные группы $\{G\}$ всех тех преобразований эквивалентности G, которые преобразуют данную Q в себя, конечны. Отсюда следует конечность любой группы G_q преобразований грани разбиения q любого измерения. Действительно, к такой группе будут принадлежать только G, преобразующие в себя как Q, которому принадлежит q, так и q, либо преобразующие Q в один из тех Q', который смежен с ним по q, а q в себя. Но таких преобразований конечное число [35].

§ 4. СВЯЗЬ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ($n\times n$)-МАТРИЦ С ГРАНЯМИ РАЗБИЕНИЯ $\{Q\}$

Пусть имеется конечная группа ($n\times n$)-матриц Ψ. Тогда, в силу теоремы Машке, можно (и даже различными способами) вычислить положительную квадратичную форму от n переменных F, которая преобразуется этой группой в себя. Эта форма как точка, принадлежащая конусу K, лежит внутри одной и только одной какой-нибудь грани q какого-либо измерения k разбиения $\{Q\}$. Всякое преобразование G, индуцированное преобразованием группы Ψ, преобразует эту точку, а следовательно, и эту k-мерную грань q в себя, так как в силу G-инвариантности разбиения $\{Q\}$ оно могло бы преобразовать эту k-мерную грань либо в себя, либо в другую k-мерную грань. Но разные грани разбиения Q не имеют общих внутренних точек. Итак, получается следующая теорема.

Теорема. Всякая группа, индуцированная конечной группой целочисленных ($n\times n$)-матриц, есть полная группа или подгруппа некоторой определенной грани q разбиения $\{Q\}$ того или иного измерения, не лежащей целиком на границе конуса K.

Следствие. Ввиду того что различных попарно-неэквивалентных граней различных измерений, не лежащих на границе конуса K, конечное число, снова получается теорема Жордана о конечности неэквивалентных конечных групп целочисленных ($n\times n$)-матриц.

§ 5. О «ЦЕНТРАХ ТЯЖЕСТИ» ГРАНЕЙ РАЗБИЕНИЯ $\{Q\}$

Введем особое понятие центра тяжести k-мерной грани (k-мерного гоноэдра) разбиения $\{Q\}$. Возьмем на каком-либо ребре этой грани некоторую точку A, отличную от точки O. Пусть имеется эквивалентное ему ребро по отношению к группе грани. Покажем, что каким бы преобразованием группы грани это ребро OA' не получилось из ребра OA, точка A перейдет при этом в одну и ту же его точку A'. Действительно, пусть преобразованием α из группы G_q этой грани A переходило бы в точку A' этого ребра, а преобразованием β — в точку $\bar{A}\neq A'$ этого ребра. Тогда преобразование $\gamma=\alpha^{-1}\beta$ переводило бы A' в $\bar{A}$, т. е. было бы гомотетией ребра относительно точки O, и, следовательно, было бы бесконечного порядка, что противоречит конечности группы G_q. Если у грани q есть еще какое-либо ребро, не эквивалентное OA по группе G_q, то, взяв на нем произвольную точку B, отличную от O, на ребрах, ему эквивалентных по G_q, получим эквивалентные B точки B', B'' и т. д.

Так получим на всех ребрах q вполне определенные точки A, A', A'', . . ., B, B', B''. . . и т. д., которые будут переходить только друг в друга при всех преобразованиях группы G_q. И, следовательно, центр тяжести C_q всех этих точек будет переходить в себя в силу аффинности G. Но этот центр тяжести, очевидно, лежит внутри грани, и поэтому, наоборот,

если преобразование q преобразует его в себя, оно преобразует и эту грань в себя. Отсюда получается следующая теорема.

Теорема. Полная группа G_q грани q любого измерения разбиения $\{Q\}$ есть голоэдрия (например, своего центра тяжести).

§ 6. РОЛЬ АБСОЛЮТНЫХ ГРАНЕЙ В РАЗЫСКАНИИ ВСЕХ ГОЛОЭДРИЙ (ТИПОВ БРАВЕ)

Примеры, однако, показывают, что существуют голоэдрии, которые не есть полные группы граней какого-либо измерения разбиения $\{Q\}$.

С чем же связаны голоэдрии?

До сих пор математики считали, что если они нашли в конусе K замыкание некоторой фундаментальной области группы эквивалентности $\{G\}$, т. е. такую область, что всякая точка конуса K G-эквивалентна какой-либо ее точке и все ее внутренние точки попарно G-неэквивалентны друг другу, то они построили какую-либо теорию приведения решеток. Но среди точек границы могут быть и эквивалентные друг другу. Можно, однако, абсолютизировать и границу, чтобы в оставшемся множестве точек конуса K уже вообще не было эквивалентных точек.

М. И. Штогрин показал, что можно абсолютизировать любое G-инвариантное разбиение $\{Q\}$, превратив его, может быть, в более дробное разбиение с подразделенными гранями (см. § 7), но тоже G-инвариантное, причем отдельные гоноэдры любого измерения этого более дробного разбиения с подразделенными гранями суть «абсолютные грани» в том смысле, что никакие две точки такой грани уже не эквивалентны друг другу. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Полная группа любой абсолютной грани есть голоэдрия и, наоборот, любая голоэдрия есть полная группа такой грани.

Действительно, любое G, которое преобразует какую-либо абсолютную грань в себя, преобразует в себя и любую ее внутреннюю точку, так как иначе внутри абсолютной грани были бы эквивалентные точки, что противоречило бы ее абсолютности. И обратно, в силу G-инвариантности разбиения конуса K на абсолютные грани, любое G, преобразующее внутреннюю точку абсолютной грани в себя, преобразует и эту грань в себя. Таким образом, полная группа любой абсолютной грани есть не что иное, как голоэдрия любой ее внутренней точки, и наоборот.

§ 7. АБСОЛЮТИЗАЦИЯ РАЗБИЕНИЯ $\{Q\}$

Рассмотрим какой-либо N-мерный гоноэдр Q разбиения $\{Q\}$. Пусть H — подгруппа всех тех преобразований эквивалентности, которые преобразуют этот гоноэдр Q в себя. Эквивалентных преобразований гоноэдра Q в себя, оставляющих все его точки на месте, нет, кроме тождественного в силу его N-мерности и аффинности преобразований G. Разобьем гоноэдр Q на эквивалентные выпуклые области (гоноэдры) Q_0, количество

которых равно порядку группы H. Это всегда можно сделать, взяв, например, некоторое правильное относительно группы H разбиение этого гоноэдра на области Дирихле, используя расстояния Вороного. Сделав такое разбиение для всех попарно-неэквивалентных гоноэдров Q, а для эквивалентных гоноэдров Q — G-эквивалентные такие разбиения, получим более дробное новое разбиение $\{Q_0\}$ конуса K, которое обладает теми же свойствами 1—4, что́ и исходное, только теперь группа H_0 эквивалентных преобразований любого гоноэдра Q_0 в себя состоит лишь из одного тождественного преобразования. Гоноэдры Q_0 условно назовем абсолютными гоноэдрами.

Совокупность всех границ всех гоноэдров Q_0 разбиения $\{Q_0\}$ составляет так называемый $(N—1)$-мерный остов $\{Q_0\}'$ разбиения $\{Q_0\}$. Точки остова $\{Q_0\}'$ разделяются на точки двух родов: точки 1-го рода таковы, что их окрестности в остове евклидовы, т. е. суть куски $(N—1)$-мерного евклидова пространства; и точки 2-го рода, окрестности которых не евклидовы, т. е. такие, в которых остов разветвляется. Максимальные $(N—1)$-мерные связные евклидовы области остова $\{Q_0\}'$, т. е. области, состоящие из точек 1-го рода, назовем $(N—1)$-мерными гранями остова. Эти грани есть не что иное, как грани разбиения $\{Q_0\}$, и, следовательно, как пересечения выпуклых гоноэдров Q_0, они выпуклы.

Пусть F' — какая-либо $(N—1)$-мерная грань остова $\{Q_0\}'$ и H' — группа всех тех преобразований G, которые преобразуют грань F' в себя. Из условий 1—4 следует, что порядок h' этой группы конечен. Пусть H'_0 — та подгруппа группы H', которая оставляет все точки грани F' на месте. Разобьем грань F' на эквивалентные выпуклые области, т. е. $(N—1)$-мерные гоноэдры, F'_0, количество которых равно порядку фактор-группы H'/H'_0 (сделав, например, некоторое правильное разбиение этой грани на области Дирихле). Разобьем таким образом все попарно-неэквивалентные $(N—1)$-мерные грани остова $\{Q_0\}'$, а все им эквивалентные грани разобьем G-эквивалентным образом. В результате получим G-инвариантное разбиение $(N—1)$-мерного остова $\{Q_0\}'$ на так называемые абсолютные $(N—1)$-мерные грани F'_0. Как это следует из построения и из инвариантности остова $\{Q_0\}'$, имеет место следующее важное обстоятельство: внутри любой абсолютной грани F'_0 нет эквивалентных точек и всем внутренним точкам одной и той же абсолютной грани F'_0 отвечает одна и та же стационарная группа H'_0, индуцированная одной и той же арифметической голоэдрией.

Совокупность всех границ всех $(N—1)$-мерных абсолютных граней F'_0 остова $\{Q_0\}'$ образует некоторый $(N—2)$-мерный остов $\{Q_0\}''$, который обладает теми же свойствами, что и остов $\{Q_0\}'$. Сделаем G-инвариантное разбиение остова $\{Q_0\}''$, разбив каждую отдельную его $(N—2)$-мерную грань F'' на выпуклые эквивалентные области, т. е. $(N—2)$-мерные гоноэдры, F''_0, количество которых равно порядку фактор-группы H''/H''_0, где H'' — полная группа эквивалентных преобразований грани F'' в себя, а H''_0 — группа эквивалентных преобразований, при которых

все точки грани F''_0 переходят в себя. Внутри любой вновь получившейся (N—2)-мерной абсолютной грани F''_0 нет эквивалентных точек, и всем внутренним точкам одной и той же абсолютной грани F''_0 отвечает одна и та же стационарная группа H''_0, индуцированная одной и той же арифметической голоэдрией.

Далее измерение остова $\{\dot{Q_0}\}^{(i)}$ понижается, но остов остается связным, пока наконец не получим одномерный остов, состоящий из дискретно расположенных лучей, исходящих из вершины O конуса K.

Рассмотрим теперь некоторый фиксированный набор (исходный общий список), состоящий из всех попарно-неэквивалентных абсолютных гоноэдров Q_0 и их стационарной группы H_0, всех попарно-неэквивалентных абсолютных (N—1)-мерных граней F'_0 и их стационарных групп H'_0, всех попарно-неэквивалентных абсолютных (N—2)-мерных граней F''_0 и их стационарных групп H''_0, ... Совокупность всех вместе взятых открытых абсолютных граней Q_0, F'_0, F''_0, . . . (их конечное число), очевидно, составляет абсолютную область приведения, т. е. фундаментальную область группы $\{G\}$, а среди соответствующих этим областям стационарных групп H_0, H'_0, H''_0, . . ., очевидно, содержатся представители всех классов, индуцированных классами Браве. При этом заметим, что если исходное разбиение $\{Q\}$ есть разбиение конуса на область типов Вороного, то всем внутренним точкам одной и той же абсолютной грани отвечают решетки одного и того же сорта Делоне и в общем списке есть все сорта. Однако, хотя абсолютные грани рассматриваемого набора попарно-неэквивалентны, некоторые из соответствующих им стационарных групп могут оказаться эквивалентными.

§ 8. АЛГОРИФМ РАЗЫСКАНИЯ n-МЕРНЫХ ТИПОВ БРАВЕ РЕШЕТОК ПРИ ПОМОЩИ АБСОЛЮТНЫХ ГРАНЕЙ

Предполагая, что все абсолютные грани Q_0, F'_0, F''_0, . . . и соответствующие им стационарные группы H_0, H'_0, H''_0, . . . рассматриваемого полного набора нам известны, употребим принцип слоев Эрмита для выделения всех попарно-неэквивалентных стационарных групп, а следовательно, и всех попарно-неэквивалентных арифметических голоэдрий.

Из исходного общего списка всех абсолютных граней составим подсписки абсолютных граней, отвечающих классам Браве.

В первый подсписок включим все гоноэдры Q_0 из общего списка и все те абсолютные грани низших измерений из общего списка, которым отвечает стационарная группа H_0, состоящая из одного тождественного преобразования.

Пусть $F_0^{(i)}$ — какая-либо старшая по размерности абсолютная грань общего списка, не вошедшая в первый подсписок. Стационарной группе $H_0^{(i)}$ этой грани отвечает некоторое многообразие Браве $\mathfrak{B}^{(i)}$, состоящее из всех неподвижных относительно $H_0^{(i)}$ точек. Грань $F_0^{(i)}$ принадлежит многообразию Браве $\mathfrak{B}^{(i)}$, следовательно, размерность многообразия $\mathfrak{B}^{(i)}$

не меньше чем $N-i$. Внутренние точки абсолютных граней, размерность которых больше чем $N-i$, не принадлежат многообразию Браве $\mathfrak{B}^{(i)}$, так как тогда размерность исходной грани $F_0^{(i)}$ не была бы старшей. Исходя из дискретности расположения абсолютных граней в конусе K, получим, что размерность многообразия Браве $\mathfrak{B}^{(i)}$ не больше чем $N-i$. Значит, $\mathfrak{B}^{(i)}$ имеет размерность, равную $N-i$, и оно разбито на $(N-i)$-мерные абсолютные грани. В многообразии Браве $\mathfrak{B}^{(i)}$ вокруг исходной грани $F_0^{(i)}$ образуем слои. Первым слоем назовем множество всех $(N-i)$-мерных абсолютных граней, смежных с исходной $(N-i)$-мерной абсолютной гранью по всем ее $(N-i-1)$-мерным абсолютным граням. Вторым слоем назовем множество всех $(N-i)$-мерных абсолютных граней, смежных с гранями первого слоя по их свободным $(N-i-1)$-мерным абсолютным граням и т. д. Ввиду конечности числа неэквивалентных абсолютных граней найдется такой, скажем, k-й слой, все $(N-i)$-мерные абсолютные грани которого эквивалентны абсолютным граням более внутренних слоев; тогда абсолютные грани всех более далеких слоев эквивалентны абсолютным граням первых k слоев (принцип слоев Эрмита).

Во второй подсписок абсолютных граней как исходную включим первую попавшуюся $(N-i)$-мерную абсолютную грань $F_0^{(i)}$ общего списка, которой отвечает стационарная группа $H_0^{(i)} \neq H_0$, т. е. грань, не вошедшую в первый подсписок. Рассмотрим далее любую $(N-i-1)$-мерную абсолютную грань этой исходной $(N-i)$-мерной абсолютной грани (которая, вообще говоря, является частью $(N-i-1)$-мерной грани этой $(N-i)$-мерной абсолютной грани) и найдем в общем списке такую $(N-i)$-мерную абсолютную грань (таких граней может оказаться несколько), которой отвечает стационарная группа того же порядка, что и для исходной, и которая имела бы $(N-i-1)$-мерную абсолютную грань, эквивалентную выделенной $(N-i-1)$-мерной абсолютной грани исходной $(N-i)$-мерной абсолютной грани 2-го подсписка.

После преобразования эквивалентности, совмещающего такую $(N-i-1)$-мерную абсолютную грань с выделенной $(N-i-1)$-мерной абсолютной гранью, получим $(N-i)$-мерную абсолютную грань, смежную с исходной $(N-i)$-мерной абсолютной гранью по выделенной ее $(N-i-1)$-мерной абсолютной грани. Если полученная $(N-i)$-мерная абсолютная грань лежит в одной $(N-i)$-мерной плоскости вместе с исходной $(N-i)$-мерной абсолютной гранью, то она есть одна из граней 1-го слоя. Если же полученная $(N-i)$-мерная абсолютная грань не лежит вместе с исходной в одной $(N-i)$-мерной плоскости, то следует проверить, нет ли такой среди ей эквивалентных, получающихся при поворотах стационарной группы выделенной $(N-i-1)$-мерной абсолютной грани, или среди смежных по эквивалентным $(N-i-1)$-мерным абсолютным граням с исходной $(N-i)$-мерной абсолютной гранью.

Перебрав все подозрительные $(N-i)$-мерные абсолютные грани, наконец, найдем $(N-i)$-мерную абсолютную грань 1-го слоя, смежную с ис-

ходной $(N-i)$-мерной абсолютной гранью по выделенной ее $(N-i-1)$-мерной абсолютной грани. Таким же перебором находим все $(N-1)$-мерные абсолютные грани общего списка, эквивалентные абсолютным граням 1, 2-го слоя, . . ., пока не получим слой, все $(N-i)$-мерные абсолютные грани которого эквивалентны $(N-i)$-мерным абсолютным граням более внутренних слоев. Этим самым будут выделены все $(N-i)$-мерные абсолютные грани, вошедшие во второй подсписок. Включим во второй подсписок и все те абсолютные грани низших измерений, которым отвечает стационарная группа того же порядка, что и у $(N-i)$-мерных абсолютных граней этого подсписка, и которые эквивалентны абсолютным граням низших измерений $(N-i)$-мерных абсолютных граней этого подсписка. Взяв из общего списка старшую по размерности абсолютную грань (не вошедшую ни в первый, ни во второй подсписок) за исходную абсолютную грань третьего подсписка, строим аналогично третий подсписок и т. д.

Так из общего списка строим подсписки абсолютных граней по типам Браве.

В следующей главе покажем действие этого метода в случае $n=3$, взяв в качестве $\{Q\}$ нормальное разбиение $\{V\}$ конуса K на гоноэдры, эквивалентные фундаментальной области V приведения Вороного из его мемуара [40, стр. 220].

Глава 9

N-МЕРНЫЙ МЕТОД В 3-МЕРНОЙ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

§ 1. ОБЛАСТЬ ПРИВЕДЕНИЯ ВОРОНОГО

Рассмотрим произвольный приведенный четырехсторонник Зеллинга. Обозначим его векторы через **a**, **b**, **c** и **d**. Такое обозначение векторов четырехсторонника можно осуществить 24 и только 24 различными способами, и каждому изменению обозначения векторов четырехсторонника Зеллинга отвечает поворот 1 или 2-го рода тетраэдрического символа в себя. Так получаем группу C поворотов тетраэдрического символа в себя, рассматриваемого как правильный симплекс.

Совершим такую подстановку группы C, чтобы одно из наибольших значений приведенных параметров Зеллинга было расположено на правом верхнем ребре символа, а одно из наибольших значений параметров, расположенных на прилегающих к нему ребрах, находилось на нижнем ребре. Тогда будем иметь неравенства:

$$0 \geqslant k,\ k \geqslant n,\ k \geqslant h,\ h \geqslant g,\ h \geqslant l,\ h \geqslant m,$$

и наоборот. Так каждой решетке можно сопоставить точку области V конуса K, которая определяется этими неравенствами и которую мы будем называть *области приведения Вороного*.

Рассмотрим какую-либо точку M внутри области V, т. е. точку, удовлетворяющую строгим неравенствам. Очевидно, что в области S приведения Зеллинга, т. е. области, задаваемой неравенствами

$$g \leqslant 0,\ h \leqslant 0,\ k \leqslant 0,\ l \leqslant 0,\ m \leqslant 0,\ n \leqslant 0,$$

существует ровно 24 эквивалентные ей точки, но 23 из них не принадлежат области V. Ввиду того что точка M имеет все координаты, отличные от нуля, параллелоэдр D соответствующей ей решетки представляет собой 14-гранник, а в такой решетке имеется лишь один приведенный четырехсторонник Зеллинга, и, следовательно, эту решетку можно представить не более чем 24 точками области приведения Зеллинга. Таким образом, получаем, что внутри области эквивалентных точек быть не может, т. е. область V есть фундаментальная область приведения.

Все преобразования C суть некоторые преобразования из группы $\{G\}$. Так как область V фундаментальна для группы $\{G\}$, то области, получаемые из нее преобразованиями C, попарно не имеют общих внутренних точек, причем они в своей совокупности заполняют всю область S приведения Зеллинга.

Области S и V суть бесконечные выпуклые шестимерные гоноэдры (многогранные углы) с вершиной в начале, причем V есть 24-я часть области S. Ввиду того что из всех подобных друг другу решеток можно рассматривать только одну, а подобным друг другу решеткам, очевидно, соответствуют точки g, h, k, l, m, n, лежащие на одном луче, исходящем из вершины O конуса K, дальше достаточно везде рассматривать пятимерные сечения этих гоноэдров пятимерной плоскостью Π $(g+h+k+l+m+n=-1)$, проходящей через концы векторов $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_3$, $-\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_6$. Эти сечения $\bar{V}$ и V будут пятимерными симплексами. Вершинами симплекса $\bar{V}$ Вороного будут точки

$$-\mathbf{e}_1,\ -\mathbf{e}_4,\ -\mathbf{e}_5,\ -\mathbf{e}_6,\ -\frac{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5}{4},\ -\frac{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6}{6}. \quad (1)$$

Действительно, симплекс с вершиной $-\frac{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6}{6}$ и основанием $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_6$ соответствует всем точкам симплекса $\bar{S}$, для которых координата k наибольшая. А чтобы h было больше g, m, l в трехмерном симплексе с вершинами $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_5$, точка должна принадлежать тому тетраэдру с вершиной в центре $-\frac{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5}{4}$ этого симплекса, основанием которого является его грань $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_5$. Если мы произведем какое-либо преобразование G из $\{G\}$, то область S перейдет в некоторую ей эквивалентную область S', причем эти области будут совпадать, если $G \in C$, и не будут иметь общих внутренних точек, если $G \notin C$.

Действительно, пусть $\{G\}=C+CG_2+CG_3+\ldots$, тогда если $G\in C$, то S преобразуется в себя, так как $CG=C$, и, следовательно, комплекс 24 областей V_C перейдет в себя.

Если $G\notin C$, а, например, $G\in CG_2$, то S перейдет в совокупность V_{CG_2}, такую, что ни одна из ее областей не входит в V_C.

Рассмотрим четырехмерную грань симплекса $\bar{S}$, построенную на векторах $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_6$, и подстановку

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{индуцированную подстановкой}\ g=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта подстановка G преобразует грань в себя, оставляя ее вершины 2, 4 и 6 на месте и переставляя между собой вершины 1 и 5. Вершину 3 эта подстановка G преобразует в точку, которая после нормировки на плоскость Π будет иметь координаты $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Но эта последняя точка лежит вне симплекса $\bar{S}$, так как две из ее координат положительны, и, следовательно, подстановка G преобразует симплекс Зеллинга $\bar{S}$ в эквивалентный ему симплекс Зеллинга $\bar{S}'$, смежный с ним по четырехмерной его грани (1, 2, 4, 5, 6).

Итак, конус K разбивается на приведенные области Зеллинга, которые попарно не имеют общих внутренних точек и смежны целыми гранями.

Назовем репер, составленный векторами $\mathbf{V}_1=-\mathbf{e}_1$, $\mathbf{V}_2=-\mathbf{e}_4$, $\mathbf{V}_3=-\mathbf{e}_5$, $\mathbf{V}_4=-\mathbf{e}_6$, $\mathbf{V}_5=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_5$, $\mathbf{V}_6=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_5-\mathbf{e}_6$, *репером Вороного*, а координаты ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ_6 — координатами Вороного [40] и рассмотрим точки в координатах Вороного. Координаты Зеллинга g, h, k, l, m, n выражаются через координаты Вороного по формулам:

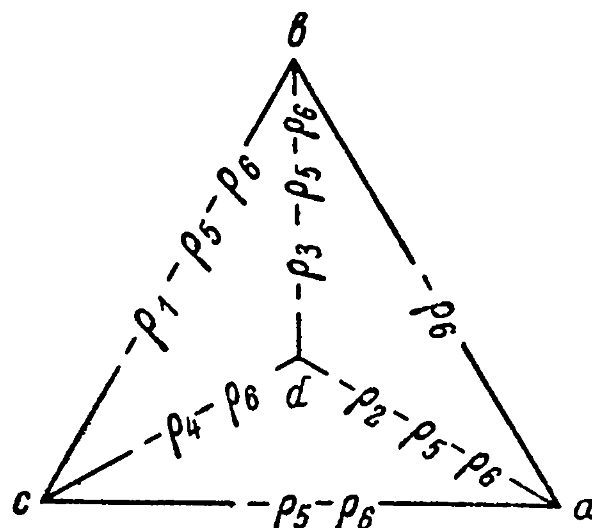
$$g=-\rho_1-\rho_5-\rho_6,\ h=-\rho_5-\rho_6,\ k=-\rho_6,\ l=-\rho_2-\rho_5-\rho_6,$$
$$m=-\rho_3-\rho_5-\rho_6,\ n=-\rho_4-\rho_6$$

и обратно

$$\rho_1=h-g,\ \rho_2=h-l,\ \rho_3=h-m,\ \rho_4=k-n,\ \rho_5=k-h,\ \rho_6=-k.$$

§ 2. РАЗЫСКАНИЕ АБСОЛЮТНЫХ ГРАНЕЙ ОБЛАСТИ ПРИВЕДЕНИЯ ВОРОНОГО

Область V представляет собой 6-мерный гоноэдр с вершиной в точке O и симплициальным сечением (1, 2, 3, 4, 5, 6) (см. § 1). Любая точка замыкания гоноэдра V характеризуется следующим символом Делоне:

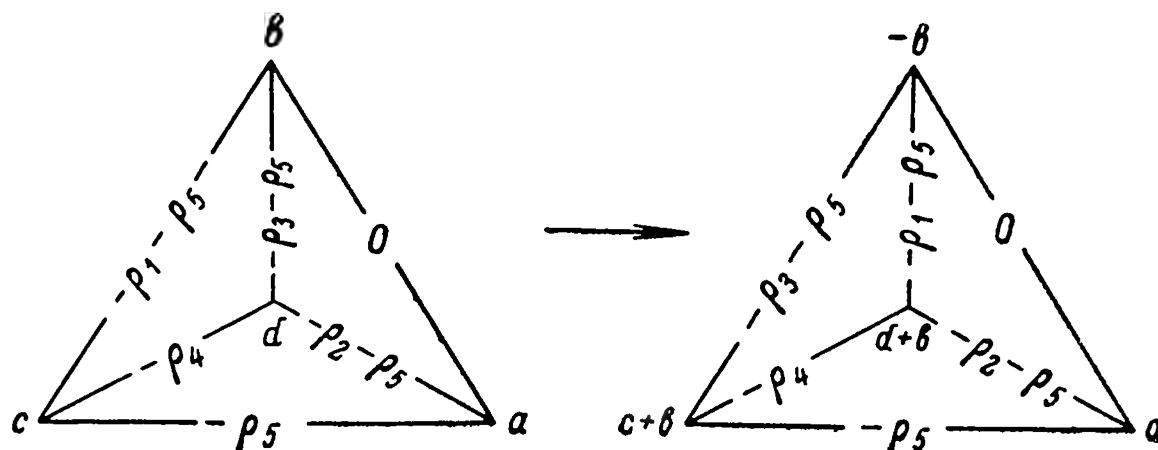


где $\rho_1, \ldots, \rho_6$ — неотрицательные числа.

Для внутренних точек гоноэдра V все числа $\rho > 0$, и этот символ не имеет нетождественных преобразований в себя (параметр, отвечающий ребру ab, — наибольший, а параметр, отвечающий ребру ac, — наибольший из расположенных на прилегающих к ab ребрах). Так как в этом случае на ребрах символа нет нуля, то соответствующие этим точкам решетки имеют лишь два приведенных 4-сторонника Зеллинга, которые метрически одинаковы. Таким образом, голоэдрии этих решеток имеют 2-й порядок (триклинная голоэдрия). По терминологии § 6, область V есть абсолютный 6-мерный гоноэдр.

Что касается точек границы области V, то для них некоторые из чисел $\rho_1, \ldots, \rho_6$ равны нулю.

При $\rho_6=0$ получаем точки границы области V, заполняющие ее 5-мерную грань (1, 2, 3, 4, 5), т. е. гоноэдр с вершиной в точке O и выписанным симплициальным сечением. Для всех точек этой грани на одном из ребер тетраэдрического символа Делоне стоит нуль. Приведем через нуль тетраэдрический символ, отвечающий любой внутренней точке этой грани:



Этим двум символам отвечают два различных приведенных четырехсторонника Зеллинга (и два им центросимметричные, т. е. метрически равные им), которые при $\rho_1 \neq \rho_3$ метрически различны, а при $\rho_1 = \rho_3$ метрически равны между собой. Так как сам символ в этом случае не имеет нетождественных преобразований в себя, то при $\rho_1 \neq \rho_3$ получается голоэдрия 2-го порядка, а при $\rho_1 = \rho_3$ — голоэдрия 4-го порядка. Заметим, что при выписанном выше шаге приведения точки 1 и 3 меняются местами, а точки 2, 4, и 5 остаются без изменения. Следовательно, внутренность грани (1, 2, 3, 4, 5) состоит из внутренностей двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{1+3}{2},\ 3,\ 2,\ 4,\ 5,\right)$ и $\left(\frac{1+3}{2},\ 1, 2, 4, 5\right)$, которым отвечает голоэдрия 2-го порядка, и внутренности одной 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+3}{2},\ 2,\ 4,\ 5,\right)$, которой отвечает голоэдрия 4-го порядка. Заметим, что последняя голоэдрия в репере $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\}$ записывается матрицами

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

что и следует из изложенного выше.

При $\rho_5=0$ получается 5-мерная грань (1, 2, 3, 4, 6). В этом случае на ребрах тетраэдрического символа нет нулей, так что в соответствующей решетке имеется всего лишь два (метрически одинаковых) приведенных четырехсторонника Зеллинга. Параметры четырехсторонника Зеллинга, расположенные на ребрах ab и ac, равны между собой. При дополнительном условии $\rho_3 = \rho_4$ становятся равными параметры, расположенные на ребрах db и dc, и символ приобретает нетождественное преобразование в себя, чего нет при $\rho_3 \neq \rho_4$. В итоге имеем: внутренность грани (1, 2, 3, 4, 6) состоит из внутренностей двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{3+4}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 6\right)$ и $\left(\frac{3+4}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 6\right)$, которым отвечает голоэдрия 2-го порядка, и внутренности одной 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{3+4}{2},\right.$ $\left. 1,\ 2,\ 6\right)$, соответствующей голоэдрии 4-го порядка, матрицы которой легко выписать.

Аналогично этому при $\rho_4=0$ получаем 5-мерную грань (1, 2, 3, 5, 6), состоящую из двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{1+2}{2},\right.$ $\left. 1,\ 3,\ 5,\ 6\right)$ и $\left(\frac{1+2}{2},\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\right)$ с голоэдрией 2-го порядка и одной 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+2}{2},\ 3,\ 5,\ 6\right)$ с голоэдрией 4-го порядка. При $\rho_3=0$ имеем 5-мерную грань (1, 2, 4, 5, 6), состоящую из двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{1+2}{2},\ 1, 4, 5, 6\right)$ и $\left(\frac{1+2}{2},\ 2, 4, 5, 6\right)$ с голо-

эдрией 2-го порядка и одной 4-мерной абсолютной грани с голоэдрией 4-го порядка. При $\rho_2=0$ получаем 5-мерную грань (1, 3, 4, 5, 6), состоящую из двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{1+3}{2}, 1, 4, 5, 6\right)$ и $\left(\frac{1+3}{2}, 3, 4, 5, 6\right)$ с голоэдрией 2-го порядка и одной 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+3}{2}, 4, 5, 6\right)$ с голоэдрией 4-го порядка. При $\rho_1=0$ получаем 5-мерную грань (2, 3, 4, 5, 6), состоящую из двух эквивалентных 5-мерных абсолютных граней $\left(\frac{2+3}{2}, 2, 4, 5, 6\right)$ и $\left(\frac{2+3}{2}, 3, 4, 5, 6\right)$ с голоэдрией 2-го порядка и одной 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{2+3}{2}, 4, 5, 6\right)$ с голоэдрией 4-го порядка.

Внутренним точкам 4-мерной грани (1, 2, 3, 4), получающейся при $\rho_5=\rho_6=0$, соответствует символ Делоне, на двух смежных ребрах которого стоят нули. В такой решетке имеется всего 12 различных приведенных четырехсторонников Зеллинга. При $\rho_1\neq\rho_3$, $\rho_1\neq\rho_4$ и $\rho_3\neq\rho_4$ тетраэдрический символ не имеет нетождественных преобразований в себя, а в решетке имеется четыре метрически одинаковых приведенных четырехсторонника Зеллинга, отвечающих такому тетраэдрическому символу, так что голоэдрия 4-го порядка. При дополнительном равенстве $\rho_1=\rho_3$, или $\rho_1=\rho_4$, или $\rho_3=\rho_4$ либо тетраэдрический символ приобретает нетождественное преобразование в себя, либо удваивается количество метрически одинаковых соответствующих ему приведенных четырехсторонников Зеллинга, и поэтому голоэдрия уже 8-го порядка. При $\rho_1=\rho_3=\rho_4$ все 12 приведенных четырехсторонников Зеллинга метрически равны и тетраэдрический символ имеет нетождественное преобразование в себя, так что голоэдрия в этом случае 24-го порядка. В итоге приходим к выводу, что плоскости $\rho_1=\rho_3$, $\rho_1=\rho_4$ и $\rho_3=\rho_4$ разбивают внутренность 4-мерной грани (1, 2, 3, 4) на шесть эквивалентных 4-мерных абсолютных граней с одной и той же голоэдрией 4-го порядка, три эквивалентные 3-мерные абсолютные грани с голоэдриями 8-го порядка, еще три эквивалентные 3-мерные абсолютные грани с теми же голоэдриями, как и три предыдущие, и одну 2-мерную абсолютную грань с голоэдрией 24-го порядка.

Грань (1, 2, 3, 5), получающаяся при $\rho_4=\rho_6=0$, как и грани (2, 3, 4, 6) и (1, 3, 4, 6), состоит из шести эквивалентных 4-мерных абсолютных граней с голоэдрией 2-го порядка, трех эквивалентных 3-мерных абсолютных граней с голоэдриями 4-го порядка, еще трех эквивалентных 3-мерных абсолютных граней с теми голоэдриями, что и три предыдущие, и одной 2-мерной абсолютной грани с голоэдрией 12-го порядка.

Грань (1, 3, 4, 5), как и грань (1, 2, 5, 6), состоит из двух эквивалентных 4-мерных абсолютных граней с голоэдрией 4-го порядка и одной 3-мерной абсолютной грани с голоэдрией 8-го порядка. Эквивалентные грани (1, 2, 4, 5) и (2, 3, 4, 5), (1, 3, 5, 6) и (2, 3, 5, 6), (1, 2, 3, 6) и (1, 2, 4, 6) состоят из двух эквивалентных 4-мерных абсолютных граней с голоэдрией 2-го

порядка и одной 3-мерной абсолютной грани с голоэдрией 4-го порядка. Эквивалентные грани (1, 4, 5, 6), (2, 4, 5, 6) и (3, 4, 5, 6) сами являются абсолютными с голоэдрией 2-го порядка. Эквивалентные грани (1, 2, 3), (1, 2, 4) и (2, 3, 4) состоят из шести эквивалентных 3-мерных абсолютных граней с голоэдрией 8-го порядка, трех эквивалентных 2-мерных абсолютных граней с голоэдриями 16-го порядка, еще трех эквивалентных 2-мерных абсолютных граней с теми же голоэдриями 16-го порядка и одной 1-мерной абсолютной грани с голоэдрией 48-го порядка. Эквивалентные грани (1, 2, 5), (1, 3, 5) и (2, 3, 5) состоят из двух 3-мерных абсолютных граней с голоэдрией 4-го порядка и одной 2-мерной абсолютной грани с голоэдрией 8-го порядка. Эквивалентные грани (1, 4, 5), (3, 4, 5) и (2, 4, 5); (1, 5, 6), (2, 5, 6) и (3, 5, 6) сами являются абсолютными с голоэдрией 4-го порядка. Эквивалентные грани (1, 3, 6), (1, 4, 6), (3, 4, 6), (2, 3, 6) и (2, 4, 6) состоят из двух 3-мерных абсолютных граней с голоэдрией 2-го порядка и одной 2-мерной абсолютной грани с голоэдрией 4-го порядка. Грань (1, 2, 6) состоит из двух 3-мерных абсолютных граней с голоэдрией 8-го порядка и одной 2-мерной абсолютной грани с голоэдрией 16-го порядка. Грань (4, 5, 6) сама является абсолютной с голоэдрией 8-го порядка. Далее имеем эквивалентные 2-мерные абсолютные грани (1, 5), (2, 5) и (3, 5) с голоэдриями 12-го порядка, 2-мерную абсолютную грань (4, 5) с голоэдрией 16-го порядка, эквивалентные 2-мерные абсолютные грани (1, 6), (3, 6), (4, 6) и (2, 6) с голоэдриями 8-го порядка, 2-мерную абсолютную грань (5, 6) с голоэдрией 16-го порядка, 1-мерную абсолютную грань 5 с голоэдрией 48-го порядка и 1-мерную абсолютную грань 6 с голоэдрией 48-го порядка.

Таким образом, исчерпаны все абсолютные грани всех измерений. Абсолютная область приведения состоит из 59 абсолютных граней различных измерений, включая и сам абсолютный гоноэдр. Соответствующие им арифметические голоэдрии легко могут быть представлены в матричном виде.

§ 3. ВЫВОД 14 ТИПОВ БРАВЕ РЕШЕТОК И 24 СОРТОВ ДЕЛОНЕ

Распределим теперь 59 абсолютных граней по типам Браве. В первый подсписок выделим все абсолютные грани, которым отвечает голоэдрия 2-го порядка. Таких граней насчитывается 15 (табл. 6).

4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{1+3}{2}, 2, 3\right)$, старшей по размерности и не вошедшей в первый подсписок, соответствует голоэдрия 4-го порядка, всем трехмерным ее абсолютным граням — голоэдрии 8-го порядка. Некоторые повороты из этих голоэдрий индуцируют отражения от плоскостей этих 3-мерных абсолютных граней в плоскости грани $\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{1+3}{2}, 2, 3,\right)$. Следовательно, первый слой (а тем самым и все остальные) вокруг грани $\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{1+3}{2}, 2, 3\right)$ состоит только из экви-

Таблица 6

№ п/п	Группа Браве	Распределение абсолютных граней области приведения Вороного по типам Браве и сортам Делоне	Тип Вороного	Сорт Делоне
1	$P\bar{1}$	$(123456); \left(\frac{3+4}{2}\ 1236\right), \left(\frac{1+2}{2}\ 1356\right), \left(\frac{1+2}{2}1456\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 1456\right), \left(\frac{2+3}{2}\ 2456\right), \left(\frac{2+3+4}{3}\ \frac{2+3}{2}\ 36\right), \left(\frac{1+3+4}{3}\ \frac{1+3}{2}\ 36\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 356\right), \left(\frac{1+2}{2}\ 236\right), (1456), \left(\frac{1+3}{2}\ 36\right)$	I	1
		$\left(\frac{1+3}{2}\ 1245\right), \left(\frac{1+2}{2}\ 245\right)$	II	2
		$\left(\frac{1+2+3}{3}\ \frac{1+2}{2}\ 25\right)$	III	3
2	$P\frac{2}{m}$	$\left(\frac{1+2+3}{3}\ \frac{1+3}{2}\ 23\right)$	IV	4
3	$C\frac{2}{m}$	$\left(\frac{3+4}{2}\ 126\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 456\right), \left(\frac{2+3}{2}\ 456\right); \left(\frac{1+3+4}{3}\ \frac{1+3}{2}\ 6\right), \left(\frac{1+3+4}{3}\ 46\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 56\right), \left(\frac{2+3+4}{3}\ \frac{2+3}{2}\ 6\right), \left(\frac{2+3+4}{3}\ 46\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 6\right)$	I	5
		$\left(\frac{1+2}{2}\ 456\right), \left(\frac{1+2}{2}\ 356\right), \left(\frac{1+2}{2}\ 156\right); \left(\frac{1+2}{2}\ 36\right), (156)$		6
		$\left(\frac{1+2}{2}\ 45\right)$	II	7
		$\left(\frac{1+3}{2}\ 245\right), \left(\frac{1+3}{2}\ 145\right);\ (145)$		8
		$\left(\frac{1+2}{2}\ 25\right) \mid \left(\frac{1+2+3}{3}\ \frac{1+2}{2}\ 5\right) \mid \left(\frac{1+2+3}{3}\ 35\right)$	III	9
4	*Pmmm*	$\left(\frac{1+2+3}{3}\ \frac{1+2}{2}\ 2\right)$	V	10
5	*Cmmm*	$\left(\frac{1+3+4}{3}\ \frac{1+3}{2}\ 2\right) \mid \left(\frac{1+3+4}{3}\ 24\right)$	IV	11

Таблица 6 (*продолжение*)

№ п/п	Группа Браве	Распределение абсолютных граней области приведения Вороного по типам Браве и сортам Делоне	Тип Вороного	Сорт Делоне
6	$Jmmm$	$\left(\frac{1+2}{2}\ 56\right)$	I	12
		$\left(\frac{1+3}{2}\ 45\right)$	II	13
		$\left(\frac{1+2}{2}\ 5\right)$	III	14
7	$Fmmm$	$\left(\frac{1+2}{2}\ 26\right)$, (456); (16)	I	15
8	$R\bar{3}m$	$\left(\frac{2+3+4}{3}\ 6\right) \Big\vert \left(\frac{1+3+4}{3}\ 6\right)$	I	16
		$(15) \Big\vert \left(\frac{1+2+3}{3}\ 5\right)$	III	17
9	$P\frac{4}{m}mm$	$\left(\frac{1+2+3}{3}\ \frac{1+2}{2}\right) \Big\vert \left(\frac{1+2+3}{3}\ 3\right)$	V	18
10	$J\frac{4}{m}mm$	$\left(\frac{1+2}{2}\ 6\right) \Big\vert\ (56)$	I	19
		(45)	II	20
11	$P\frac{6}{m}mm$	$\left(\frac{1+3+4}{3}\ 2\right)$	IV	21
12	$Pm3m$	$\frac{1+2+3}{3}$	V	22
13	$Jm3m$	6	I	23
14	$Fm3m$	5	III	24

валентных ей граней. Поэтому 2-й подсписок исчерпывается одной абсолютной гранью.

4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+3}{2},\ 2,\ 4,\ 5\right)$, старшей по размерности абсолютной грани общего списка и не вошедшей ни в первый, ни во второй подсписок, соответствует голоэдрия 4-го порядка. Выделим 3-мерную абсолютную грань (2, 4, 5) абсолютной грани $\left(\frac{1+3}{2},\ 2,\ 4,\ 5\right)$; 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+3}{2},\ 1,\ 4,\ 5\right)$ также отвечает голоэдрия 4-го порядка, и у нее есть 3-мерная абсолютная грань (1, 4, 5), эквивалентная выделенной абсолютной грани (2, 4, 5). Но так как грани (2, 4, 5) также отвечает

голоэдрия 4-го порядка (того же, что и у 4-мерной грани), то при преобразовании эквивалентности, при котором (1, 4, 5) переходит в (2, 4, 5), грань $\left(\frac{1+3}{2}, 1, 4, 5\right)$ переходит в грань, смежную с $\left(\frac{1+3}{2}, 2, 4, 5\right)$ и расположенную вместе с ней в одной и той же 4-мерной плоскости (иначе соответствующее многообразие Браве имело бы размерность больше чем 4). Но у $\left(\frac{1+3}{2}, 1, 4, 5\right)$ есть абсолютная грань $\left(\frac{1+3}{2}, 1, 5\right)$, эквивалентная 3-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+2}{2}, 1, 5\right)$ 4-мерной абсолютной грани $\left(\frac{1+2}{2}, 1, 5, 6\right)$, у $\left(\frac{1+2}{2}, 1, 5, 6\right)$ есть $(1, 5, 6) \sim (3, 5, 6) \subset \left(\frac{1+2}{2}, 3, 5, 6\right)$, у $\left(\frac{1+2}{2}, 3, 5, 6\right)$ есть $\left(\frac{1+2}{2}, 3, 6\right) \sim \left(\frac{1+2}{2}, 4, 6\right) \subset \left(\frac{1+2}{2}, 4, 5, 6\right)$, у $\left(\frac{1+2}{2}, 4, 5, 6\right)$ есть $\left(\frac{1+2}{2}, 4, 5\right) \sim \left(\frac{2+3}{2}, 4, 5\right) \subset \left(\frac{2+3}{2}, 4, 5, 6\right)$, у $\left(\frac{2+3}{2}, 4, 5, 6\right)$ есть $\left(\frac{2+3}{2}, 5, 6\right) \sim \left(\frac{1+3}{2}, 5, 6\right) \subset \left(\frac{1+3}{2}, 4, 5, 6\right)$, у $\left(\frac{1+3}{2}, 4, 5, 6\right)$ есть $\left(\frac{1+3+4}{3}, 4, 6\right) \sim \left(\frac{1+3+4}{3}, 1, 6\right) \subset$ $\subset \left(\frac{3+4}{2}, 1, 2, 6\right)$, и всем им отвечает голоэдрия 4-го порядка, так что все они попадают в третий подсписок. Кроме этого, к третьему подсписку следует отнести некоторые из абсолютных граней низших измерений. Заметим, что устройство третьего подсписка наглядно изображается симплексом $LMNK$ (рис. 20). Подробнее он будет описан в следующем параграфе.

3-мерные абсолютные грани пятого подсписка расположены в одном сечении грани (1, 2, 3, 4), и они вместе с двумя им эквивалентными 3-мерными абсолютными гранями исчерпывают все соответствующее многообразие Браве.

Шестой, седьмой и десятый подсписки, как легко видеть, получаются как частные случаи из третьего подсписка, если рассматривать соответствующие грани симплекса $LMNK$ (рис. 20).

Четвертый и девятый подсписки очевидны, если учесть, что грань (1, 2, 3) есть полное многообразие Браве.

Что касается определения восьмого подсписка, то в двумерной плоскости (1, 5), кроме точек (—1, 0,0, 0,0,0) и (—1, —1, 0, —1, —1, 0), рассмотрим еще три точки: (0, —1, 0, —1, —1, 0), (1, —4, 0, —4, —4, 0) и (1, —3, 0, —3, —3, 0), эквивалентные точкам $\frac{1+2+3}{3}$ $\left(\sim \frac{2+3+4}{3}\right)$, 6 и $\frac{1+3+4}{3}$. Теперь осталось доказать, что в этой плоскости лежат абсолютные грани, эквивалентные соответственно двумерным граням (1, 5), $\left(5, \frac{1+2+3}{3}\right)$, $\left(\frac{2+3+4}{3}, 6\right)$ и $\left(6, \frac{1+3+4}{3}\right)$.

Оставшиеся четыре абсолютные грани, очевидно, входят в 11, 12, 13 и 14 подсписки, которым отвечают максимальные арифметические голоэдрии.

Так получены 14 подсписков, соответствующих 14 классам Браве (табл. 6).

При непрерывной деформации решетки Λ непрерывно изменяются метрические параметры a_{ij} ее основного репера. Множество всех точек конуса K, получающихся из данной исходной точки (a_{ij}) при всевозможных непрерывных деформациях решетки Λ, сохраняющих данный ее сорт Делоне, назовем фазовой областью данного сорта. Все внутренние точки какой-либо определенной грани обла-

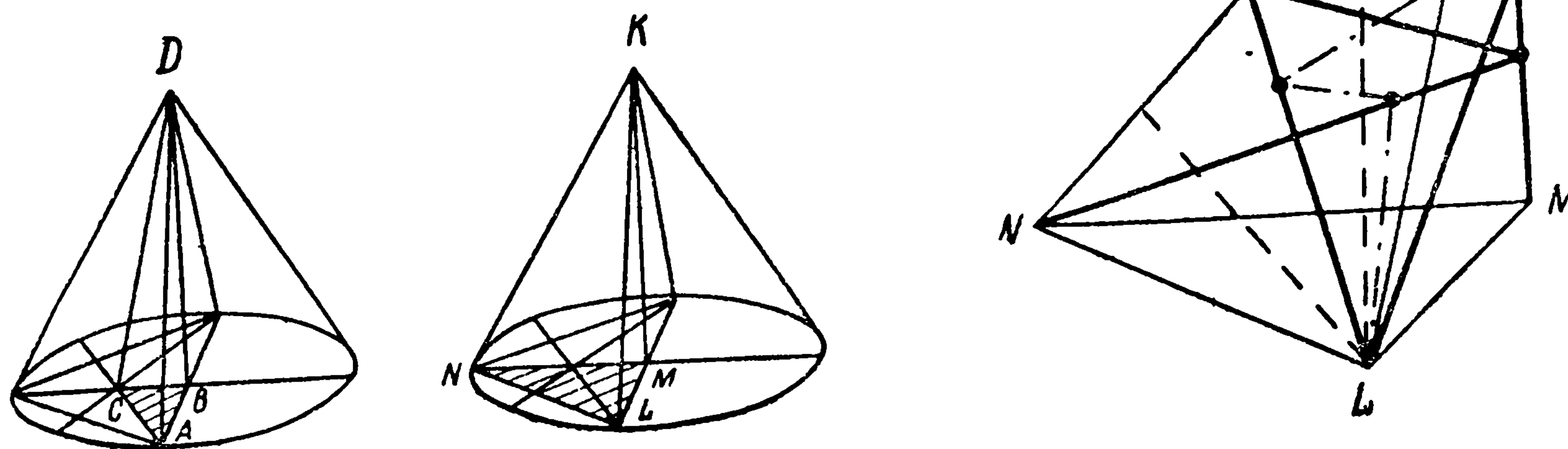


Рис. 20.

сти приведения Вороного, очевидно, принадлежат одной и той же фазовой области сорта Делоне. Но они, быть может, не исчерпывают всю эту область, и тогда фазовая область представляет собой объединение некоторых абсолютных граней. В табл. 6 указано распределение абсолютных граней по сортам Делоне, причем абсолютные грани принадлежат (быть может, после G-эквивалентных преобразований некоторых из них) одной и той же фазовой области. Для сорта 9 имеются три неэквивалентные фазовые области, для сортов 11, 16, 17, 18 и 19 имеются по две неэквивалентные фазовые области, а для всех остальных сортов — по одной. Так получается 31 фазовая область сорта Делоне. Для нетриклинных решеток их нагляднее всего рассматривать в предложенной ниже модели.

§ 4. ПРИВЕДЕНИЕ В МНОГООБРАЗИИ БРАВЕ, ВЕДУЩЕЕ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕТРИКЛИННЫХ РЕШЕТОК В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

В отдельных многообразиях Браве опишем выпуклые приведения для случая $n=3$ [43], в частности, области приведения простых и центрированных моноклинных трехмерных решеток.

1. В моноклинной простой решетке выберем основной репер, состоящий из двух векторов **a** и **b**, расположенных в плоскости отражения,

и третьего вектора **c**, направленного по двойной оси. Это — так называемый репер Браве. Так как третий вектор перпендикулярен первым двум, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=h=0$ и $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=g=0$. Легко проверить, что множество точек конуса K, для которых $h=0$ и $g=0$, представляет собой 4-мерное многообразие Браве, отвечающее моноклинной голоэдрии, задаваемой матрицами:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Описанный выше репер Браве (**a**, **b**, **c**) моноклинной простой решетки будем считать приведенным, если двумерный репер (**a**, **b**) приведен по Лагранжу, т. е. если $0\leqslant 2k\leqslant a^2\leqslant b^2$. Эти неравенства выделяют в нашем многообразии Браве симплециальный гоноэдр, внутри которого нет эквивалентных точек. Поскольку в каждой моноклинной простой решетке есть приведенный репер Браве, то этот симплециальный гоноэдр является областью приведения моноклинных простых решеток.

Ввиду того что точкам одного и того же выходящего из начала O луча в конусе K соответствуют подобные друг другу реперы, из которых можно рассматривать только один, для наглядного представления вместо конуса K можно рассматривать только его сечение пятимерной плоскостью P, например, $a^2+b^2+c^2=1$. Описанное выше многообразие Браве в сечении с плоскостью P дает конечное трехмерное коническое тело, а область приведения в этом многообразии — трехмерный симплекс $ABCD$ в этом конусе (рис. 20).

Если приведенный тетраэдрический символ для моноклинной решетки содержит на смежных ребрах два нулевых параметра, то только в этом случае можно прийти к моноклинному симплексу 9 [44], в котором содержатся шесть симплексов, эквивалентных* нашему фундаментальному симплексу $ABCD$. Что касается более подробного описания симплекса $ABCD$, то внутренним его точкам соответствуют только моноклинные простые решетки, боковым граням ACD и BCD — ортогональные бокоцентрированные решетки, боковой грани ABD — ортогональные простые решетки, а основание ABC лежит на границе конуса K.

2. Все моноклинные центрированные решетки будем представлять себе как объемно-центрированные простые, т. е. с объемно-центрированным параллелепипедом Браве. Выберем основной репер (**a**, **b**, **c**) моноклинной объемно-центрированной решетки таким образом, чтобы векторы

* Собственно говоря, все эквивалентные друг другу точки находятся на одной и той же дискриминантной поверхности. Поэтому когда говорят об эквивалентных точках в каком-нибудь плоском сечении конуса K, то слово «эквивалентные» употребляют в смысле эквивалентные с точностью до подобия.

a и **b** лежали в плоскости отражения и конец вектора **c** проектировался в центр параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. Тогда конец вектора **c**, очевидно, объемно-центрирует параллелепипед Браве, построенный на репере Браве (**a**, **b**, —**a** —**b**+2**c**). В силу того что вектор **a**+**b**—2**c** направлен по оси 2-го порядка, он перпендикулярен векторам **a** и **b** и, таким образом, $a^2+k-2h=0$ и $k+b^2-2g=0$. Легко проверить, что множество точек конуса K, для которых удовлетворяются эти два равенства, представляет собой 4-мерное многообразие Браве, отвечающее моноклинной голоэдрии, задаваемой матрицами:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Эта и предыдущая группы матриц принадлежат разным арифметическим классам.

Покажем, что область приведения в этом многообразии Браве есть симплециальный гоноэдр, определяемый неравенствами $0<k<a^2<b^2$.

Разобьем этот гоноэдр на три гоноэдра, определяемые в этом многообразии Браве, соответственно, неравенствами: 1) $0<2k<a^2<b^2$, 2) $k<a^2<2k<b^2$ и 3) $k<a^2<b^2<2k$. Отсюда видно, что этим трем гоноэдрам отвечают, соответственно, приведенные реперы Браве (**a**, **b**, **a**+**b**—2**c**), (**a**, **a**—**b**, **a**+**b**—2**c**) и (**a**—**b**, **a**, **a**+**b**—2**c**), а к построенным на этих реперах решеткам прибавляются, соответственно, узлы $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Но этим и исчерпываются все возможные сгущающие решетку вдвое центрировки параллелепипеда Браве, построенного на приведенном репере Браве моноклинной простой решетки, превращающие эту решетку в моноклинную центрированную решетку. Действительно, проектируя моноклинную центрированную решетку на плоскость ее симметрии, сгущаем имеющуюся в плоскости симметрии плоскую подрешетку до решетки вдвое гуще, поэтому при сгущении новая точка должна попасть либо в центр основного параллелограмма, либо две точки на середину той или иной пары его противоположных сторон. Область приведения моноклинных центрированных решеток, таким образом, представляет собой как бы объединение трех областей приведения моноклинных простых решеток.

Аналогично предыдущему рассматриваемое многообразие Браве в сечении с плоскостью P дает конечное трехмерное коническое тело, а область приведения в этом многообразии — трехмерный симплекс $LMNK$ в этом конусе (рис. 20 и 21).

В случае центрированной моноклинной решетки тетраэдрический символ может быть приведен к различным 8 случаям, отвечающим первым

8 моноклинным симплексам Делоне. На рис. 21 показано разбиение симплекса $LMNK$ на 8 симплексов, эквивалентных симплексам Делоне (рис. 22), а именно:

$$PLQT \sim \left(\frac{1+2}{2},\ 4,\ 5,\ 6\right),\quad PLNS \sim \left(\frac{1+3}{2},\ 2,\ 4,\ 5\right),$$

$$PLST \sim \left(\frac{1+2}{2},\ 3,\ 5,\ 6\right),\quad PKLR \sim \left(\frac{3+4}{2},\ 1,\ 2,\ 6\right),$$

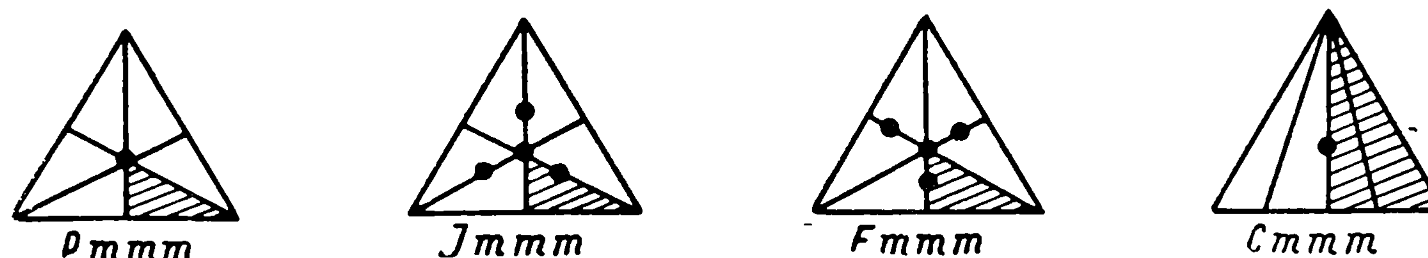
$$PKQR \sim \left(\frac{1+3}{2},\ 4,\ 5,\ 6\right),\quad MLST \sim \left(\frac{1+2}{2},\ 2,\ 5,\ 6\right),$$

$$PLQR \sim \left(\frac{2+3}{2},\ 4,\ 5,\ 6\right),\quad MLNS \sim \left(\frac{1+3}{2},\ 3,\ 4,\ 6\right).$$

Таким образом, симплекс $LMNK$ как бы состоит из целых первых шести и половинок седьмого и восьмого симплексов Делоне. Оказалось, что внутри симплекса $LMNK$ (рис. 22) есть четыре отрезка, которым отвечают ромбоэдрические решетки. Боковой грани MNK соответствуют ортогональные объемно-центрированные решетки, боковой грани LMK — ортогональные гранецентрированные решетки, боковой грани LNK — ортогональные бокоцентрированные решетки; грань LMN находится на границе конуса K. Итак, все моноклинные простые решетки представлены точками симплекса $ABCD$, а все моноклинные центрированные решетки — точками симплекса $LMNK$. Грань LNK симплекса $LMNK$ можно разбить на четыре треугольника, два из которых эквивалентны грани ACD, а два другие — грани BCD симплекса $ABCD$. Поэтому симплекс $ABCD$ можно присоединить гранью ACD или BCD по части грани LNK к симплексу $LMNK$. Это означает, что, не теряя моноклинной голоэдрии, от простой до центрированной решетки можно перейти только через ортогональные бокоцентрированные решетки.

Таким образом, из целых первых шести половинок седьмого и восьмого и шестой части девятого моноклинных симплексов Делоне уже строится удобная модель для моноклинных решеток.

3. Аналогично тому, как это делалось для моноклинных многообразий Браве, легко показать, что для ортогональных многообразий Браве приведения, соответственно, имеют вид:



Квадратные, ромбоэдрическое, гексагональное и кубические многообразия Браве не содержат в себе целочисленно-эквивалентных точек.

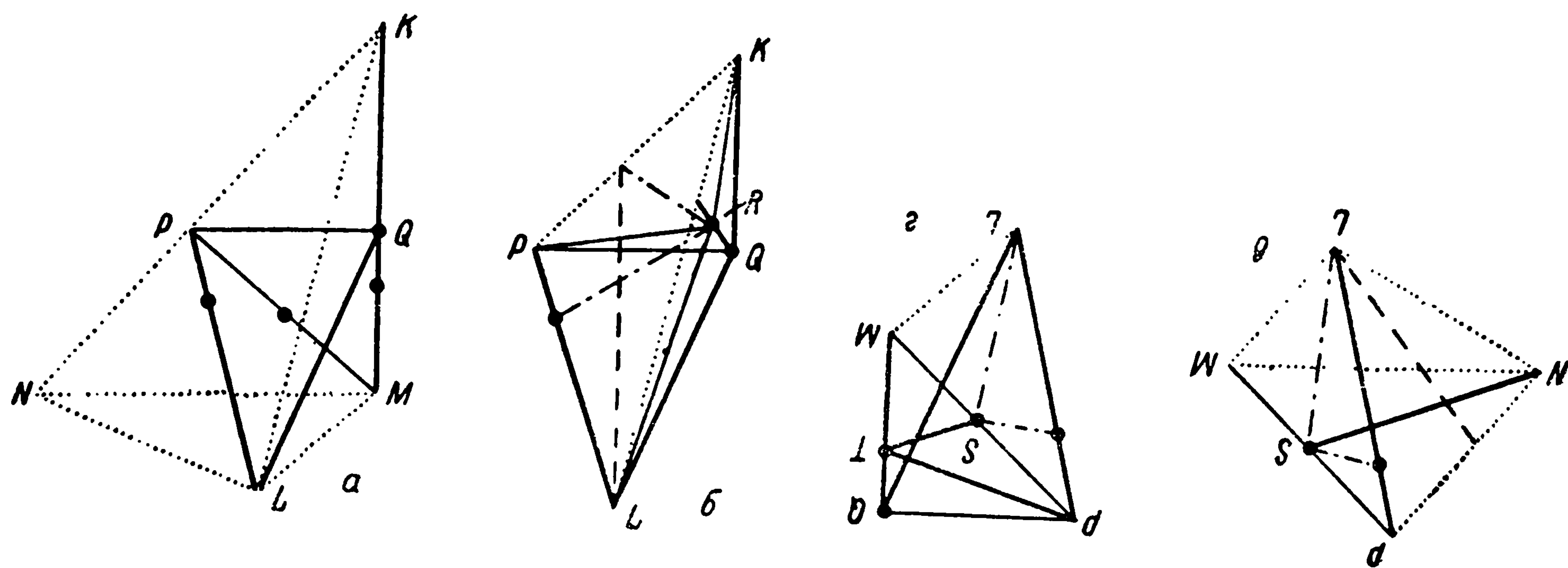

K
P
Q
N
M
L
a
K
R
P
Q
L
б
г
7
W
S
d
θ
7
W
N
S
d

Рис. 21.

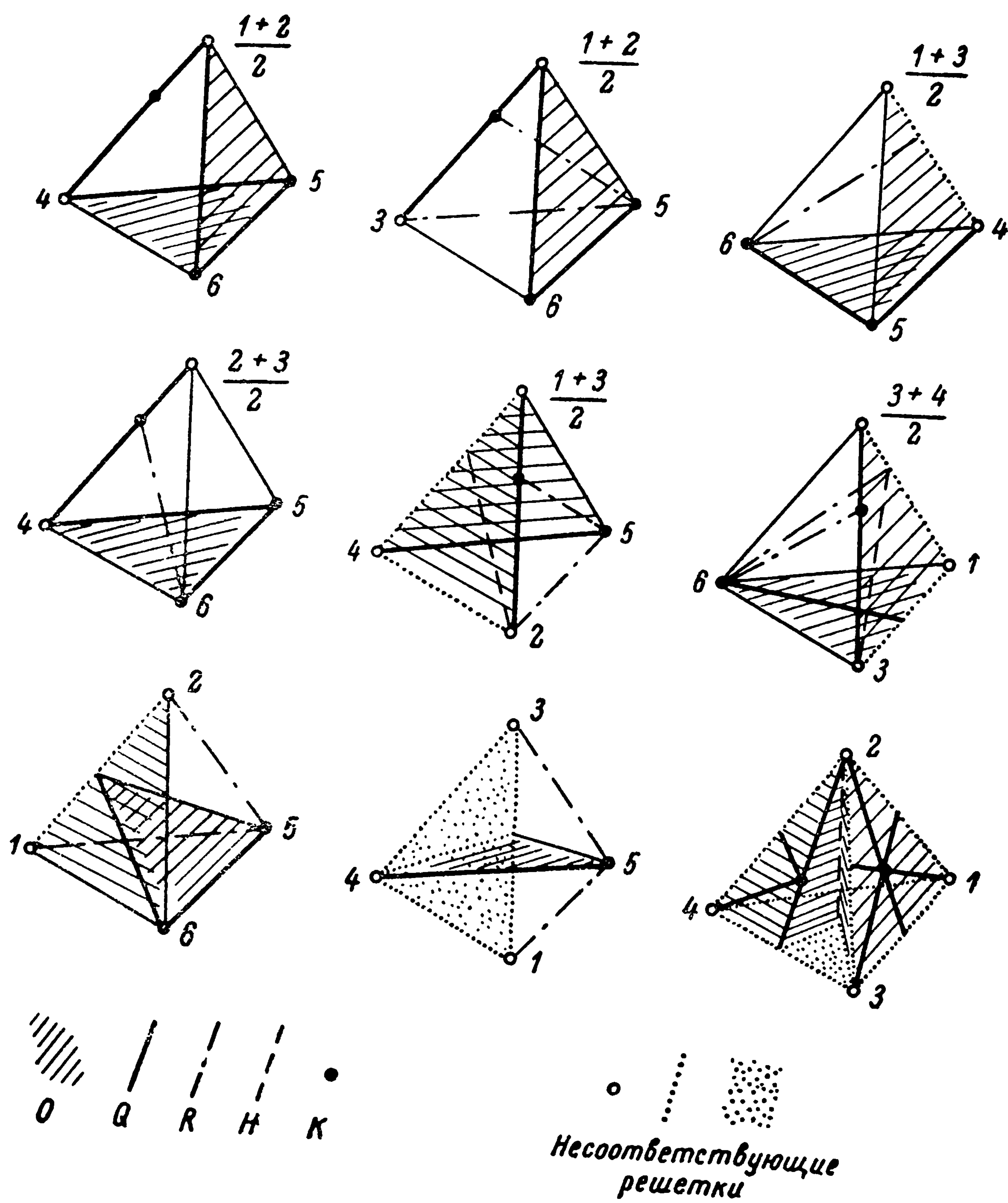

1 + 2
2
4
5
6
1 + 2
2
3
5
6
1 + 3
2
6
4
5
2 + 3
2
4
5
6
1 + 3
2
4
5
2
3 + 4
2
6
1
3
2
1
5
6
3
4
5
1
2
4
1
3
O
Q
R
H
K
Несоответствующие решетки

Рис. 22.

§ 5. АБСОЛЮТИЗИРОВАННАЯ ОБЛАСТЬ ПРИВЕДЕНИЯ ВОРОНОГО

Рассмотрим 16 систем равенств и неравенств между приведенными параметрами Зеллинга (табл. 7).

Таблица 7

1. $0 > k,\ k > h,\ k > n,\ h > l,\ h > m,\ h > g$
2. $0 = k,\ k > h,\ k > n,\ h > l,\ h > m,\ m \geqslant g$
3. $0 > k,\ k = h,\ k > n,\ n \geqslant m,\ h > l,\ h > g$
4. $0 > k,\ k > h,\ k = n,\ h > m,\ h > l,\ l \geqslant g$
5. $0 > k,\ k > h,\ k > n,\ h = m,\ h \geqslant l,\ l \geqslant g$
6. $0 > k,\ k > h,\ k > n,\ h > m,\ h = l,\ m \geqslant g$
7. $0 > k,\ k > h,\ k > n,\ l \geqslant m,\ h > l,\ h = g$
8. $0 = k,\ k = h,\ k > n,\ g \geqslant m,\ h > l,\ n \geqslant g$
9. $0 = k,\ k \geqslant h,\ k = n,\ l \geqslant m,\ g \geqslant l,\ h > g$
10. $0 > k,\ k = h,\ m \geqslant n,\ l \geqslant m,\ h > l,\ h = g$
11. $0 > k,\ k = h,\ k > n,\ n \geqslant m,\ h = l,\ m \geqslant g$
12. $0 = k,\ k > h,\ k \geqslant n,\ g \geqslant m,\ h = l,\ h \geqslant g$
13. $0 > k,\ k \geqslant h,\ k = n,\ h = m,\ g \geqslant l,\ h \geqslant g$
14. $0 = k,\ k > h,\ k > n,\ h = m,\ h > l,\ l \geqslant g$
15. $0 > k,\ k \geqslant h,\ k = n,\ g \geqslant m,\ h = l,\ h > g$
16. $0 > k,\ k = h,\ k = n,\ h > m,\ h > l,\ l \geqslant g$

Первая из этих систем, состоящая из одних строгих неравенств между параметрами Зеллинга, задает всю внутренность фундаментальной области приведения Вороного [40], т. е. она представляет собой абсолютный 6-мерный гоноэдр. Оставшиеся 15 систем являются объединениями абсолютных граней.

Любая положительная тройничная квадратичная форма эквивалентна одной и только одной форме

$$f = -lx^2 - my^2 - nz^2 - k(x-y)^2 - h(x-z)^2 - g(y-z)^2,$$

зеллинговы параметры g, h, k, l, m, n которой удовлетворяют одной из описанных выше 16 систем равенств и неравенств. Наоборот, всякая такая квадратичная форма, параметры g, h, k, l, m, n которой удовлетворяют одной из 16 выписанных систем, является положительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bravais A. Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Puntsten (1848). Ostwald's Klassiker, Leipzig, 1897, N 90.
2. Zassenhaus H. Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. Comm. mathem. helwetici, 1948, **21**, 117—141.
3. Neubüser J., Wondratschek H., Bülow R. On Crystallography, in Higher Dimensions. I General Definitions. Acta Cryst., 1971, A 27, 517—520.
4. Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H. On Crystallography in Higher Dimensions. 2. Producedure of Computation in R_4. Acta Cryst., 1971, A 27, 520—523.

5. Wondratschek H., Bülow R., Neubüser J. On Crystallography in Higher Dimensions. 3. Results in R_4. Acta Cryst., 1971, A 27, 523—535.
6. Dirichlet L. Über die Reduction der Positiven Quadratischen Formen mit drei unbestimten ganzen Zahlen. J. reine und angew. Math., 1848, **40**, 209—227.
7. Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм. УМН, 1937, вып. 3, 16—62; 1938, вып. 4, 102—164.
8. Белов Н. В. Теорема примитивности (пустоты) основного параллелепипеда кристаллической решетки. Кристаллография, 1957, **2**, 6.
9. Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Долбилин Н. П., Залгаллер В. А., Штогрин М. И. О трех последовательных минимумах трехмерной решетки. ДАН СССР, 1972, **209**, № 1, 25—28.
10. Bravais A. Abhandlung über Symmetrische Polyeder (1849). Ostwald's Klassiker, Leipzig, 1890, N 17.
11. Федоров Е. С. Начало учения о фигурах. С.-Петербург, 1885.
12. Вороной Г. Ф. Исследование о примитивных параллелоэдрах. Собр. соч., 1952, т. 2, 239—368.
13. Житомирский О. К. Verscharfung eines Satzes von Voronoi. Журн. ленингр. матем. общ-ва, 1927.
14. Штогрин М. И. Правильные разбиения Дирихле—Вороного для второй триклинной группы. Тр. МИАН, 1973, **123**.
15. Delaunau B. Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Z. Kristallogr., 1932, **84**, H 1/2, 109—149.
16. Lagrange. Sur les pyramides triangulaires. Oeuvres de Lagrange, 1773.
17. Gauss K. Disquisitiones arithmeticae. Werke, 1801, **1**,
18. Seeber L. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternaren quadratischen Formen. Freiburg, 1831.
19. Gauss K. Recension der «Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven quadratischen Formen von Ludwig August Seeber». J. reine und angew. Math., 1843, **20**, 312—320
20. Seeber L. Versuchen einer Erklarung des inners Baues der festen Korper, 1824.
21. Selling. Über die binare und ternare quadratischen Formen. J. reine und angew. Math., 1874, **77**, **143**.
22. Делоне Б. Н., Александров А. Д., Падуров Н. Н. Математические основы структурного анализа кристаллов. ОНТИ ГТТИ, М., 1934.
23. International Tables for X-ray Crystallography. Birmingham, 1952, v. 1.
24. Patterson A. L., Love W. E. Remarks on the Delaunau Reduction. Acta Cryst., 1957, **10**, 111—116.
25. Делоне Б. Н. Дополнение к моей работе 1933 года о правильной установке кристаллов. ДАН СССР, 1965, **161**, № 3, 511—514.
26. Азаров Л., Бургер М. Метод порошка в рентгенографии. М. ИЛ,1961.
27. Minkowski H. Diskontinuitatsbereich für arithmetische Aquivalenz. Crelle, 1905, **129**, 220—224.
28. Литвинская Г. П., Загальская Ю. Г., Галиулин, Р. В. Коваленко В. С. О матричной записи кристаллических классов в репере Браве. Сб. «Проблемы кристаллологии», МГУ, 1971, 284—288.
29. Korkin A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques. Math. Ann., 1873, 6, 366—389.
30. Михеев В. И. Гомология кристаллов. Л., 1961.
31. Галиулин Р. В., Рышков С. С. О некоторых основных понятиях геометрической кристаллографии. Сб. «Проблемы кристаллологии», МГУ, 1971.
32. Bieberbach L. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Raume. Math. Ann., 1911, **70**, 297—336; 1912, **72**, 400.
33. Штогрин М. И. Тип Браве решетки и полная группа движений, совмещающих решетку с собой. Сб. «Проблемы кристаллологии», МГУ, 1971.
34. Neubüser J., Wondratschek H. Untergruppen der Raumgruppen. Kristall und Technik, 1966, 4.

35. Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н. Теория стереоэдров. Тр. МИАН, 1961, **64**, 28—51.
36. Галиулин Р. В. Матрично-векторный способ вывода Федоровских групп. ВИНИТИ, 1969.
37. Frobenius. Über die unzerlegbarung diskreten Bewegungsgruppen. Sitz. Konig. Preus. Akad. Wissenschaften, Berlin, 1911, 654—665.
38. Долбилин Н. П. О трехмерных и четырехмерных простых формах. Сб. «Проблемы кристаллологии», МГУ, 1971.
39. Dade E. C. The Finite Groups of 4×4 integral matrices. Illinois J. mathem., 1965, 9, 1, 99—122.
40. Вороной Г. Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собр. соч., 1952, т. 2, 171—238.
41. Рышков С. С. О максимальных конечных группах $(n \times n)$-матриц. ДАН СССР, 1972, **204**, № 3.
42. Венков Б. А. О приведении положительных квадратичных форм. Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 1.
43. Делоне Б. Н., Штогрин М. И. Об одной демонстрационной модели, наглядно показывающей изменение симметрии кристалла при изменении самой решетки. Сб. памяти акад. А. В. Шубникова, М., 1973.
44. Делоне Б. Н. К теории приведения. Кристаллография, **5**, вып. 4, 501—507.
45. Штогрин М. И. Об областях приведения Вороного, Венкова и Минковского. ДАН СССР, 1972, **207**, № 5.





ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 5

Замечания о симметричных многогранниках в геометрии 7

Исследование о многогранниках симметричной формы 11

§ 1. Асимметричные многогранники 14

§ 2. Симметричные многогранники без осей 14

§ 3. Симметричные многогранники с главной осью 15

§ 4. Симметричные сфероэдрические многогранники 26

Четыреждытройные многогранники 31

Десятитройные многогранники 34

Мемуар о системах точек, правильно распределенных на плоскости или в пространстве 41

§ I. Предварительные определения 41

§ II. О сетках вообще 46

§ III. Симметричные сетки 59

Классификация симметричных сеток 62

Ряды одного рода в симметричных сетках 63

§ IV. Совокупности в целом 66

Обозначение с четырьмя характеристиками 79

§ V. Симметричные совокупности 81

Двойная симметрия 87

Тридвойная симметрия 89

Тройная симметрия 91

Четверная симметрия 94

Шестерная симметрия 96

Тричетверная симметрия 97

Классификация симметричных совокупностей 104

Символические обозначения симметрии совокупностей 106

Различные виды размещения узлов в одном и том же классе совокупностей 108

Ретикулярные плоскости одного рода и ряды одного рода в симметричных совокупностях 111

§ VI. Полярные совокупности 115

Стр.

Кристаллографические этюды 139

Часть первая. Кристалл, рассматриваемый как простая совокупность точек 139

§ I. О внутренней структуре кристаллических тел 139
§ II. О семи кристаллических системах 141
§ III. Кристаллические формы и закон симметрии 142
§ IV. Вывод граней и выбор осей координат 146
§ V. Кристаллографические обозначения 149
§ VI. Сокращенные формы и число их граней 156
§ VII. Применение теории полярных совокупностей к методу зон 160
§ VIII. Вычисление углов кристалла 166
§ IX. Методы вычисления ретикулярной плотности граней кристалла 179
§ X. Определение кристаллического вида и примитивной формы минерального рода 187

Часть вторая. Кристалл, рассматриваемый как совокупность многоатомных молекул 207

§ I. О симметрии молекул кристаллических тел 207
§ II. О кристаллической системе, в которой должны группироваться молекулы с известной симметрией 216
§ III. Влияние симметрии молекулярного многогранника на облик косых кристаллических форм 224
§ IV. О влиянии, оказываемом молекулярным многогранником на облик параллельных и нормальных форм 237
§ V. Примеры естественных мериэдрических кристаллов 240

Часть третья. О двойниках и гемитропиях 247

§ I. О двойниках кристаллов, как следствии молекулярной гемитропии 247
§ II. Кристаллы, сдвойникованные молекулярной инверсией 253
§ III. Ретикулярная гемитропия 255

ПРИЛОЖЕНИЯ

Огюст Браве. Жизнь и творчество (по материалам Э. де Бомона) 273
Доклады О. Л. Коши о трудах О. Браве 281
Доклад о мемуаре О. Браве относительно некоторых систем или совокупностей материальных точек 281
Доклад о мемуаре, представленном О. Браве под заглавием «Этюды по кристаллографии» 284
И. И. Шафрановский и П. Л. Дубов. Роль О. Браве в развитии кристаллографии 289
Б. Н. Делоне, Р. В. Галиулин, М. И. Штогрин. Теория Браве и ее обобщение на n-мерные решетки 309

Стр.

Часть I. 3-мерные решетки 310

Глава 1. Геометрический вывод результатов Браве 310
§ 1. Некоторые сведения о решетках 310
§ 2. Теорема примитивности параллелепипеда, построенного на трех последовательных минимумах решетки 312
§ 3. Некоторые леммы об элементах симметрии решетки 313
§ 4. Вывод 7 голоэдрий 315
§ 5. 14 типов Браве решеток 319

Глава 2. Вывод голоэдрий и типов Браве решеток при помощи областей Дирихле 323
§ 1. Области Дирихле. Разбиения Дирихле 323
§ 2. Вывод 5 типов трехмерных параллелоэдров Дирихле способом слоев 324
§ 3. Характеристические параллелепипеды 328
§ 4. Вывод 14 параллелепипедов Браве 330
§ 5. Сорта решеток 332

Глава 3. Теория приведения 335
§ 1. Задача приведения 335
§ 2. Приведение двухмерной решетки по Лагранжу и трехмерной решетки по Зееберу 337
§ 3. Параметры Зеллинга. Символ Делоне 341
§ 4. Приведенный четырехсторонник 343
§ 5. Алгорифм приведения Зеллинга на символе Делоне 346
§ 6. Геометрический смысл приведенных параметров Зеллинга 348
§ 7. Необходимые и достаточные условия для определения сорта решетки 350
§ 8. Нахождение выражений векторов репера Браве через векторы исходного основного репера 352
§ 9. Приведение к реперу, построенному на трех последовательных минимумах решетки 357

Глава 4. Типы Браве решеток и полные группы движений, совмещающие решетки с собой 360
§ 1. Задание движений скобкой (g, t) 360
§ 2. Первая теорема Бибербаха и теорема о собственном векторе 361
§ 3. О совпадении классификации Браве решеток на 14 типов с абстрактной классификацией полных групп совмещений решеток с собой 363

Часть II. n-мерное исследование n-мерных решеток 365

Глава 5. Квадратичные формы, n-мерные решетки и конечные группы целочисленных матриц 365
§ 1. Метрическая матрица репера 365
§ 2. Взаимно-однозначное соответствие между метриками реперов и положительными квадратичными формами 367
§ 3. Векторы смежности. Неравенство Коркина и Золотарева 368
§ 4. Основная теорема о приспособленном репере 371

Стр.

§ 5. Теорема Машке 372
§ 6. Теорема Жордана 373
Глава 6. Связь конечных групп целочисленных матриц с типами Браве решеток. Геометрические голоэдрии 373
§ 1. Вторая теорема Бибербаха 373
§ 2. Типы Браве решеток. Классы Браве. Сингонии 375
§ 3. О геометрических голоэдриях 377
§ 4. К выводу типов Браве решеток при помощи центрировок 378
§ 5. Об энантиоморфных решетках 381

Часть III. N-мерный метод в исследовании n-мерных решеток 384

Глава 7. Пространство параметров положительных квадратичных форм . . . 384
§ 1. Конус K положительных квадратичных форм 384
§ 2. Группа $\{G\}$ эквивалентности конуса K 385
§ 3. Многообразия Браве 386
Глава 8. Применение G-инвариантных разбиений $\{Q\}$ конуса K к теории конечных групп целочисленных матриц и к разысканию типов Браве n-мерных решеток 389
§ 1. Методы нахождения конечных групп целочисленных матриц 389
§ 2. Определение разбиения $\{Q\}$ конуса K 392
§ 3. О конечности полных групп граней любого измерения разбиения $\{Q\}$ 392
§ 4. Связь конечных групп целочисленных $(n\times n)$-матриц с гранями разбиения $\{Q\}$ 393
§ 5. О «центрах тяжести» граней разбиения $\{Q\}$ 393
§ 6. Роль абсолютных граней в разыскании всех голоэдрий (типов Браве) 394
§ 7. Абсолютизация разбиения $\{Q\}$ 394
§ 8. Алгорифм разыскания n-мерных типов Браве решеток при помощи абсолютных граней 396
Глава 9. N-мерный метод в 3-мерной кристаллографии 398
§ 1. Область приведения Вороного 398
§ 2. Разыскание абсолютных граней области приведения Вороного . . . 401
§ 3. Вывод 14 типов Браве решеток и 24 сортов Делоне 404
§ 4. Приведение в многообразии Браве, ведущее к построению модели расположения нетриклинных решеток в пространстве параметров . . . 408
§ 5. Абсолютизированная область приведения Вороного 413
Литература 413



ОГЮСТ БРАВЕ

Кристаллографические этюды

Утверждено к печати
Редколлегией серии «Классики науки»
Академии наук СССР

Редактор издательства *Т. И. Сушкова*
Художник *Д. С. Данилов*
Технический редактор *А. П. Чистякова*
Корректоры *Э. Н. Липпа* и *Л. В. Субботина*

Сдано в набор 3 IX 1973 г. Подписано к печати 11/I 1974 г. Формат бумаги $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага № 1. Печ. л. $26^1/_4 + 1$ вкл. ($^1/_8$ печ. л.) = 30.85 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 29.86. Изд. № 5408. Тип. зак. № 560.
Тираж 2300. *Цена 2 р. 24 к.*

Ленинградское отделение издательства «Наука».
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, д. 1

1-я тип. издательства «Наука».
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12



ОГЮСТ БРАВЕ

1811—1863

О. БРАВЕ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

О. БРАВЕ